

Colle N°3 : 28 Septembre au 02 Octobre 2026

■ Au programme des exercices

- **Révisions de mécanique de MP2I** (**attention !** pas encore de particules chargées, de forces centrales ni de mécanique du solide !)
- **Chapitre CHIM1** : Systèmes chimiques, réaction chimique, constante d'équilibre thermodynamique et loi d'action de masse. Application à la détermination du sens d'évolution d'un système et à la recherche de son état final. Ruptures d'équilibre, formulation d'hypothèse sur le caractère très peu avancé ou quasi-total d'une réaction.

Si les réactions avec solides peuvent être étudiées, les notions de solubilité ou de constante de solubilité sont hors-programme.

Les réactions acido-basiques n'ont pas encore été traitées (les K_a , K_e , pH etc. ne sont pas encore définis)

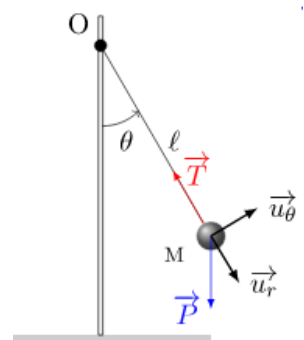
Pas d'exercice avec des mélanges gazeux

■ Questions de cours seules

1. a) ♥ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension
b) Définition et propriétés du gradient
2. a) ♥ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes, en rappelant les caractéristiques de ces mouvements.
b) Donner ces expressions dans le cas d'un mouvement quelconque dans une base cylindrique.
3. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .
a) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examineur, la seconde loi de Newton ou le théorème du moment cinétique.
b) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
c) ☆ ☆ Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?
4. ♥ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente de longueur L en fonction de la force F .
5. ♥ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .



6. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .
- ♥ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.
 - ♥ Rappeler dans le cas général les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.
 - Etablir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).

7. ♥ Considérons un oscillateur harmonique amorti en régime libre d'équation différentielle

$$m\ddot{z} - k(z - \ell_0) - h\dot{z} = 0$$

Discuter et donner les solutions générales à l'équation homogène en fonction de la valeur du facteur de qualité.

8. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

9. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{Q} i\omega + \omega_0^2)}$.

a) Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .

b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.

c) ☆☆ Démontrer les résultats précédents.

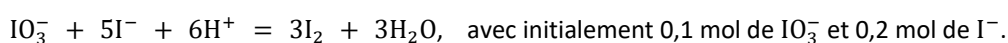
10. ☆☆ Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .

11. ♥ Déterminer la masse de soude $\text{NaOH}_{(s)}$ (sel dont la dissociation est totale dans l'eau) à utiliser pour préparer 50 mL d'une solution à 0,1 mol/L en ions hydroxyde HO^- . Donner les activités des ions hydroxydes HO^- et de l'eau.

Données : $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$, $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$, $M(\text{Na}) = 23 \text{ g.mol}^{-1}$

12. ♥ On mélange un volume $V_1 = 10 \text{ mL}$ d'une solution de chlorure de magnésium MgCl_2 entièrement dissous pour donner des ions magnésium Mg^{2+} et des ions chlorure Cl^- , de concentration $c_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ et un volume $V_2 = 20 \text{ mL}$ d'une solution de chlorure de potassium KCl entièrement dissous pour donner des ions sodium K^+ et des ions chlorure Cl^- , de concentration $c_2 = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$. Calculer les concentrations dans le mélange.

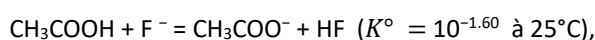
13. ♥ Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ($[\text{H}^+] = \text{cte}$) :



Dresser le tableau d'avancement et déterminer l'état final du système.

14. Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

- 1) ♥ Réaction acido-basique entre l'acide éthanoïque et les ions fluorure :



a) ♥ Conditions initiales : $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$, $[\text{F}^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HF}] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$.

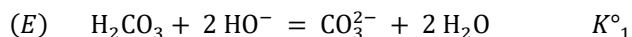
b) ♥ Conditions initiales : $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1} = [\text{F}^-]$, $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HF}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.

2) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium $\text{Ca(OH)}_2(\text{s})$:

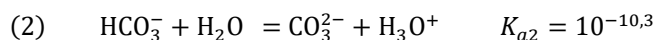
$\text{Ca}^{2+} + 2 \text{HO}^- = \text{Ca(OH)}_2(\text{s})$ $K^\circ = 10^{5,2}$; état initial : $[\text{Ca}^{2+}] = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HO}^-] = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

15. a- ♥ Indiquer comment obtenir la constante d'équilibre d'une réaction étant la combinaison linéaire de réactions de constantes d'équilibre connues. Traiter les cas particuliers d'une réaction inverse et d'une réaction dont on double les coefficients stœchiométriques.

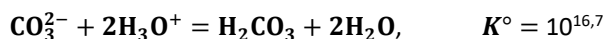
b- Exprimer la constante d'équilibre K°_1 de la réaction d'équation-bilan ci-dessous :



Données :

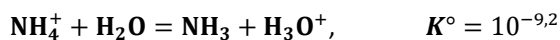


16. ♥ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :



La concentration initiale en ions carbonate est de $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et celle en ions oxonium est de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

17. ♥ On met en solution des ions ammonium à la concentration de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :



Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. a) ❤️ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

b) Définition et propriétés du gradient

a) En coordonnées cartésiennes, dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$, avec $f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix}$$

Dimension : $[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = [f] \cdot L^{-1}$.

b) Définition intrinsèque du gradient

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM} = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l}$$

La circulation élémentaire du champ de gradient d'une fonction scalaire f sur un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est égale à la variation df de cette fonction sur ce déplacement

Soit un chemin reliant 2 points A et B, la variation de f entre ces 2 points peut s'écrire :

$$f(B) - f(A) = \Delta f = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}$$

Le gradient est un **opérateur vectoriel linéaire**.

Propriétés du gradient à retenir

- **Le gradient caractérise la non-uniformité d'un champ scalaire**, c'est-à-dire ses variations spatiales.
- Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement, un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région.
- la direction du gradient est perpendiculaire aux courbes iso- f .
- **La direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement** (le gradient donne la direction privilégiée de variation de f i.e. la ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).
- Le **sens du gradient** indique la direction à suivre pour augmenter f . Le gradient est donc orienté dans le sens des valeurs croissantes de f (des plus petites valeurs vers les plus grandes).
- **La norme du gradient traduit la rapidité de cette variation spatiale le long de cette direction**. Plus le gradient est important en norme, plus la grandeur f varie de manière importante, puisque $|\overrightarrow{\text{grad}} f| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

2. a) ❤️ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes, en rappelant les caractéristiques de ces mouvements.

b) Donner ces expressions dans le cas d'un mouvement quelconque dans une base cylindrique.

MC (mouvement circulaire) : $r = R = cte$; $z = 0 = cte$

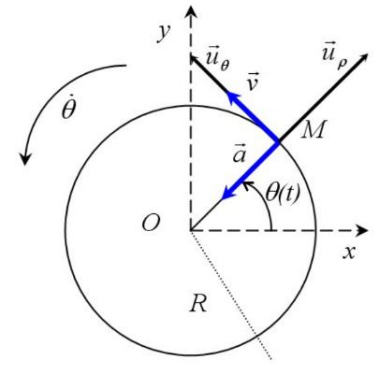
$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

MCU (mouvement circulaire uniforme) : de plus, uniforme : $v = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta$$

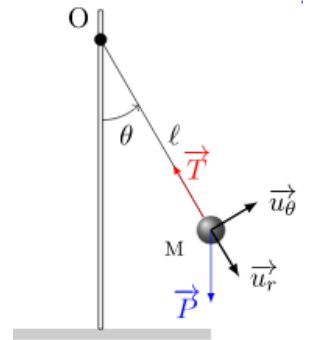
$$\vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$



Coordonnées	Vecteur position $\vec{OM}$	Vitesse $\vec{v}_R$	Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$	Accélération $\vec{a}_R$
cylindriques	$r \vec{u}_r(\theta) + z \vec{u}_z$	$\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$

3. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .

- d) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examineur, la seconde loi de Newton ou le théorème du moment cinétique.
- e) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
- f) ☆ ☆ Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?



Eléments de réponse :

a) Système : point M de masse m , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

en coordonnées polaires, $\vec{v}(M)_R = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\vec{a}(M)_R = (-L \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Bilan des actions mécaniques extérieures : M subit

- Son poids, vertical descendant : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

PFD : Selon la 2^{de} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(M)_R$

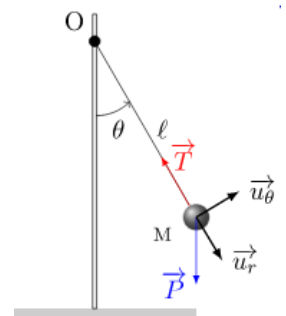
Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m \vec{a}(M)_R$
$\vec{u}_r$	$mg \cos \theta$	+	$-T$	=	$-mL \dot{\theta}^2$
$\vec{u}_\theta$	$-mg \sin \theta$	+	0	=	$mL \ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\vec{u}_\theta$:

$$mL \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

On introduit l'axe (Oy) vertical descendant

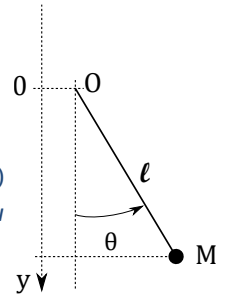


Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids.

Tension du fil,

Théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à l'axe Δ de rotation du pendule (axe (Oz) orthogonal au plan du mouvement, fixe dans le référentiel terrestre galiléen correspondant au référentiel d'étude) :



$$\left. \frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T})$$

Moments de forces :

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = 0$ (Force centrale, la droite d'action passe par l'axe, le bras de levier est nul).

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z$$

Avec $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$, $\vec{OM} \wedge \vec{P} = L \vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) = -mgL \sin \theta \vec{u}_z$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$$

Aussi, plus simplement : $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \pm P \times \text{bras de levier} \stackrel{\substack{\text{rotation par } \vec{P} \\ \text{dans le sens négatif}}}{=} -mg \times \text{bras de levier} = -mgL \sin \theta$

Moment cinétique

$L_{\Delta}(M) = \sigma_{\Delta}(M) = \vec{L}_{/O}(M) \cdot \vec{u}_z = (\vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_z = mL^2 \dot{\theta}$ soit

$$\left. \frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{TMC : } \left. \frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) \Leftrightarrow mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0}$$

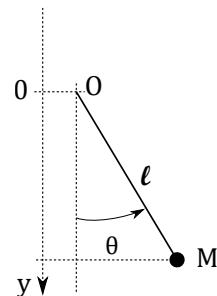
b) **Energie mécanique :**

Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgy + \text{cte}$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement)

Le système est donc conservatif.



$$y = +l \cos \theta$$

D'où : $E_p = -mg l \cos \theta + \text{cte}$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l , sa vitesse est $v = l \dot{\theta}$, d'où : $E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \text{cte} \stackrel{\substack{\text{systeme conservatif}}}{=} \text{cte}$

c) D'après la projection du PFD selon $\vec{u}_r$, on a $mg \cos \theta - T = -mL \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{L}$ Soit

$$\boxed{T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}}$$

En exploitant la conservation de l'énergie :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta + cte \quad \stackrel{\substack{\text{systeme conservatif} \\ + C.I.}}{=} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \alpha + cte^*$$

D'où l'expression de v donc celle de T

Fil tendu si $\forall t, T > 0$

4. ♥ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente de longueur L en fonction de la force F .

Éléments de réponse :

Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids $\vec{P}$ (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)
- réaction normale du support $\vec{R}_N$
- Force de frottement solide $\vec{F} = -F\vec{u}_x$, non conservative

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{\text{non conservative}}) = W(\vec{F})$$

Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = L$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -FL$$

$$\text{Avec } E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \quad \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} \quad mgz_A + cte \quad \text{et}$$

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$$E_m(B) - E_m(A) = -FL \quad \text{avec} \quad z_A - z_B = h : \quad \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -FL$$

soit

$$v_f = \sqrt{2\left(gh - \frac{FL}{m}\right)}$$

5. ♥ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

Éléments de réponse : Forme canonique : $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$ Soit

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_{\text{eq}}$$

avec $l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$ position d'équilibre (à l'équilibre, $\ddot{z}_{\text{eq}} = 0$) ;

Pulsation propre : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ en rad.s⁻¹ [ω_0] = T⁻¹

SGEH (Solution générale à l'équation homogène) :

$$z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

SPEC (solution particulière à l'équation complète) : $z_p(t) = K = l_{\text{eq}}$ (le second membre étant constant, on recherche la solution particulière stationnaire (sous forme de constante)).

$$\text{soit } z(t) = z_H(t) + z_p(t) = l_{\text{eq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = l_{\text{eq}} + Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

CICI :

$z(t_0 = 0) \equiv z_0$	$\equiv$	$A \cos(\omega_0 t_0) + B \sin(\omega_0 t_0) + l_{\text{eq}}$	$\Rightarrow$	$A = z_0 - l_{\text{eq}}$
C.I. énoncé	formule à t=0			
$\dot{z}(t_0 = 0) \equiv v_0$	$\equiv$	$-A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t_0)$	$\Rightarrow$	$B = \frac{v_0}{\omega_0}$
C.I. énoncé	formule à t=0			

$$z(t) = (z_0 - l_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + l_{\text{eq}}$$

6. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0 .

- d- ♥ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.
- e- ♥ Rappeler dans le cas général les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.
- f- Etablir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).

a. Axe (Oz) vertical descendant, origine au niveau du point A sur le pont. Origine des E_p de pesanteur en $z = 0$.

Système : sauteur, considéré comme un point matériel de masse m

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : axe Oz vertical descendant

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$,

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

A l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$; projection sur $\vec{u}_z$:

$$mg - k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0 \quad l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

b. Pour une force conservative, $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

Lien entre équilibre et énergie potentielle pour un point matériel repéré par un paramètre x unique,

Position d'équilibre : correspond à un **extremum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$

Position d'équilibre stable : **minimum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$

Position d'équilibre instable : **maximum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$

Graphiquement : Les positions d'équilibre sont associées localement à des puits (minimum local) ou des barrières (maximum local) de potentiel

c. Les deux forces dérivent d'une énergie potentielle, le système est conservatif :

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = -mgz + cte = -mgz$

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(z = 0) = E_m(z = L_{max})$

$$0 = \frac{1}{2} m v_{L_{max}}^2 - mgz_{L_{max}} + \frac{1}{2} k (z_{L_{max}} - l_0)^2 \text{ or } v_{L_{max}} = 0 \text{ et } z_{L_{max}} = L$$

$$0 = -mgL + \frac{1}{2} k (L - l_0)^2$$

On obtient une équation du deuxième degré en L .

7. ❤️ Considérons un oscillateur harmonique amorti en régime libre d'équation différentielle

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Discuter et donner les solutions générales à l'équation homogène en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Discriminant
$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$ $\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_e(t)$	$mr^2 + hr + k = 0$ $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$	$\Delta = h^2 - 4km$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en rad.s^{-1} $[\omega_0] = \text{T}^{-1}$

facteur de qualité de l'oscillateur : $Q = \frac{1}{h} \sqrt{km}$ sans unité ; $[Q] = 1$.

Solutions générales à l'équation homogène, dont la forme dépend de la valeur du facteur de qualité

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 > 4km$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 = 4km$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 < 4km$
	$h^2 > 4km$: cas de $h^2 = 9km$	$h^2 = 4km$	$h^2 < 4km$: cas de $h = 0$, $h^2 = \frac{km}{16}$
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique	Deux racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = -\lambda \pm \Omega$	Une racine double r_0 : $r_0 = -\omega_0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = -\lambda \pm j\Omega$ avec Ω valeur absolue de la partie imaginaire : pseudo pulsation $-\lambda$: partie réelle

Forme générale des solutions homogènes	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $x_H(t) = D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$
--	--	--	---

8. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

Éléments de réponse : En régime sinusoïdal forcé, réponse $x(t)$ de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On pose $\underline{x}(t) = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}$, on a alors

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \text{ donc } \ddot{\underline{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

A partir de l'équation différentielle

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \underline{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x} = \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) \underline{x} \quad \text{soit}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t}$$

$$\underline{X}_m = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)}, \text{ d'où}$$

$$X_m = |\underline{X}_m e^{i\varphi}| = \left| \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)} \right| = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q} \omega\right)^2}} \quad \text{Arg}(\underline{X}_m) = \varphi$$

9. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)}$.

a) Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .

b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.

c) ☆☆☆ Démontrer les résultats précédents.

Éléments de réponse : $\underline{X}_M = X_m e^{i\varphi} = \frac{X_0}{1-u^2+i\frac{u}{Q}}$

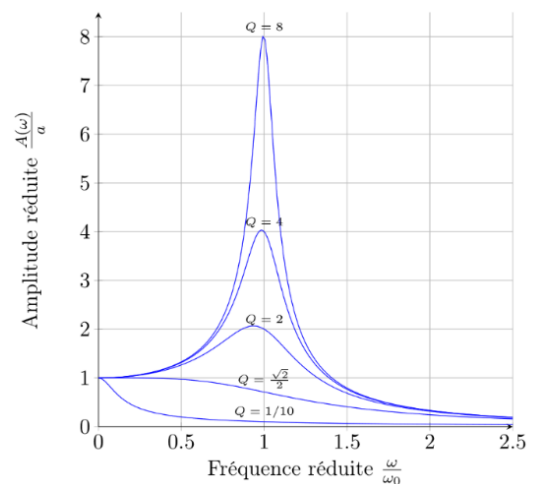
$$X_M = |\underline{X}_M| = \frac{X_0}{\left|1-u^2+i\frac{u}{Q}\right|} = \frac{X_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Allure de la courbe : aux faibles fréquences, $X_M \rightarrow X_0$, aux hautes fréquences : $X_M \rightarrow 0$.

Condition de résonance : C'est une résonance soumise à condition : absence de résonance aux faibles facteurs de qualité ($Q < 1/\sqrt{2}$), et pour les facteurs de qualité élevés ($Q > 5$), la pulsation de résonance est $\omega_r \approx \omega_0$ avec une amplitude à la résonance $X_M(\omega_0) = QX_0$

Le facteur de qualité donne le gain à la résonance :

$$G(\omega_r \approx \omega_0) = \frac{X_M(\omega_0)}{X_0} = Q$$



10. ☆☆☆ Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .

Démonstration attendue : bilan 1d sur une tranche mésoscopique de surface S et d'épaisseur dz plutôt que bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.

La tranche de fluide subit

- des forces pressantes latérales : résultante nulle, les forces se compensent deux à deux par symétrie, la pression ne dépendant que de z .
- la force pressante sur la face du bas : $+P(z)S \vec{e}_z$; sur la face du haut : $-P(z+dz)S \vec{e}_z$
- son poids $dm\vec{g} = -dm g \vec{e}_z = -\mu S dz g \vec{e}_z$

A l'équilibre, $-\mu S dz g \vec{e}_z + P(z)S \vec{e}_z - P(z+dz)S \vec{e}_z = \vec{0}$ D'où $dP = P(z+dz) - P(z) = -\mu g dz$

11. Déterminer la masse de soude $\text{NaOH}_{(s)}$ (sel dont la dissociation est totale dans l'eau) à utiliser pour préparer 50 mL d'une solution à 0,1 mol/L en ions hydroxyde HO^- . Donner les activités des ions hydroxydes HO^- et de l'eau.

Données : $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$, $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$, $M(\text{Na}) = 23 \text{ g.mol}^{-1}$

dissociation de n_0 moles du sel dans l'eau :



E.F. : $n_F(\text{HO}^-) = n_0$ et $[\text{HO}^-]_{\text{eq}} = \frac{n_0}{V} = 0,1 \text{ mol/L}$

Nombre $n_0 = V [\text{HO}^-]_{\text{eq}}$ de moles de NaOH introduites dans la solution : $n_0 = \frac{m_{\text{NaOH}}}{M(\text{NaOH})}$

avec $M(\text{NaOH}) = M(\text{Na}) + M(\text{O}) + M(\text{H}) = 40 \text{ g/mol}$:

$$m_{\text{NaOH}} = n_0 M(\text{NaOH}) = V [\text{HO}^-]_{\text{eq}} M(\text{NaOH})$$

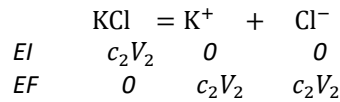
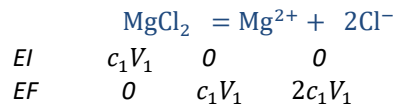
A.N. : $m_{\text{NaOH}} = 0,05 * 0,1 * 40 = 0,2 \text{ g}$

$$a_{\text{OH}} = \frac{[\text{HO}^-]}{C^\circ} = 0,1 \quad a_{\text{eau}} = a_{\text{solvant}} = 1$$

12. ♥ On mélange un volume $V_1 = 10 \text{ mL}$ d'une solution de chlorure de magnésium MgCl_2 entièrement dissous pour donner des ions magnésium Mg^{2+} et des ions chlorure Cl^- , de concentration $c_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ et un volume $V_2 = 20 \text{ mL}$ d'une solution de chlorure de potassium KCl entièrement dissous pour donner des ions sodium K^+ et des ions chlorure Cl^- , de concentration $c_2 = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$. Calculer les concentrations dans le mélange.

Éléments de réponse :

Réactions de dissolution :



Les concentrations correspondent par définition au nombre de mole du soluté considéré sur le volume total, soit ici :

$$[\text{Mg}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{Mg}^{2+}, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_1 V_1}{V_1 + V_2} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L} \quad [K^+]_{\text{eq}} = \frac{n_{K^+, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,1 \text{ mol/L}$$

Les ions chlorure sont apportés par les deux solides :

$$[\text{Cl}^-]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{Cl}^-, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{2c_1 V_1 + c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$$

13. ♥ Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ($[\text{H}^+] = \text{cte}$) :



Dresser le tableau d'avancement et déterminer l'état final du système.

Éléments de réponse :

	avancement (mol)	IO_3^-	+	5I^-	+	6H^+	=	3I_2	+	$3\text{H}_2\text{O}$
Etat initial	0	0,1		0,2		Cte		0		0
A t	ξ	$0,1 - \xi$		$0,2 - 5\xi$		Cte		3ξ		3ξ
A t_∞ (état final)	ξ_{max}	$0,1 - \xi_{\text{max}}$		$0,2 - 5\xi_{\text{max}}$		Cte		$3\xi_{\text{max}}$		$3\xi_{\text{max}}$
	16	$0,1 - 0,04 = 0,06$		0		Cte		$3 \times 0,04 = 0,12$		$3 \times 0,04 = 0,12$

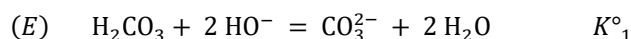
Si IO_3^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0,1 - \xi_{\text{max},1} = 0$ soit $\xi_{\text{max},1} = 0,1 \text{ mol}$;

Si I^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0,2 - 5\xi_{\text{max},2} = 0$ soit $\xi_{\text{max},2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} < \xi_{\text{max},1} = 0,1 \text{ mol}$;

C'est donc I^- qui est l'espèce limitante, avec $\xi_{\text{max},2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} = 0,04 \text{ mol}$

14. a- ♥ Indiquer comment obtenir la constante d'équilibre d'une réaction étant la combinaison linéaire de réactions de constantes d'équilibre connues. Traiter les cas particuliers d'une réaction inverse et d'une réaction dont on double les coefficients stœchiométriques.

b- Exprimer la constante d'équilibre K°_1 de la réaction d'équation-bilan ci-dessous :



Données :

- (1) $\text{H}_2\text{CO}_3 + \text{H}_2\text{O} = \text{HCO}_3^- + \text{H}_3\text{O}^+ \quad K_{a1} = 10^{-6,3}$
- (2) $\text{HCO}_3^- + \text{H}_2\text{O} = \text{CO}_3^{2-} + \text{H}_3\text{O}^+ \quad K_{a2} = 10^{-10,3}$
- (3) $2\text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^- \quad K_e = 10^{-14}$

a- ♥ Si l'équation bilan (E) est une combinaison linéaire d'équations (E_j) telle que $(E) = \sum \alpha_j (E_j)$, sa constante d'équilibre K° s'exprime en fonction des constantes d'équilibre K°_j relatives aux réactions d'équation (E_j) selon :

$$K^\circ = \prod_j K_j^{\alpha_j}$$

et en particulier :

pour une réaction inverse d'une réaction de constante K° : $(E') = -(E) \Rightarrow K^{\circ'} = (K^\circ)^{-1} = \frac{1}{K^\circ}$

pour une réaction $(E) : 0 = \sum \nu_i B_i$ de constante K° dont on double les ν_i : $(E') : 0 = \sum 2\nu_i B_i \Rightarrow K^{\circ'} = K^{\circ 2}$

b- Méthode N°1 : Par combinaison linéaire : $(E) = (1) + (2) - 2 \times (3)$ or

Ici, on a donc

$$K^{\circ 1} = \frac{K_{a1} K_{a2}}{K_e^2} = 10^{11,4} = 2,5 \cdot 10^{11}$$

Méthode N°2 : on peut retrouver cette relation en exploitant les L.A.M. pour retrouver $K^{\circ 1} = \frac{K_{a1} K_{a2}}{K_e^2}$

Avec L.A.M. :

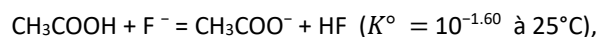
$$K^{\circ 1} = \frac{a_{\text{eq}}(\text{CO}_3^{2-}) a_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})^2}{a_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{CO}_3) a_{\text{eq}}(\text{HO}^-)^2} \underset{\substack{\text{a}(\text{H}_2\text{O})=1 \\ (\text{solvant})}}{=} \frac{a_{\text{eq}}(\text{CO}_3^{2-})}{a_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{CO}_3) a_{\text{eq}}(\text{HO}^-)^2}$$

et

$$K_{a1} = \frac{a_{\text{eq}}(\text{HCO}_3^-) a_{\text{eq}}(\text{H}_3\text{O}^+)}{a_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{CO}_3) \times 1} \quad K_{a2} = \frac{a_{\text{eq}}(\text{CO}_3^{2-}) a_{\text{eq}}(\text{H}_3\text{O}^+)}{a_{\text{eq}}(\text{HCO}_3^-) \times 1} \quad K_e = \frac{a_{\text{eq}}(\text{H}_3\text{O}^+) a_{\text{eq}}(\text{HO}^-)}{1}$$

15. Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

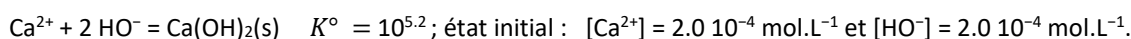
1) ♥ Réaction acido-basique entre l'acide éthanóïque et les ions fluorure :



c) ♥ Conditions initiales : $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$, $[\text{F}^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HF}] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$.

d) ♥ Conditions initiales : $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1} = [\text{F}^-]$, $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HF}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.

2) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium $\text{Ca}(\text{OH})_2(\text{s})$:



Eléments de réponse :

1) a) On a $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 0 < K^\circ$: Evolution dans le sens direct

Bilan en concentrations	CH_3COOH	+	F^-	=	HF	+	CH_3COO^-
E.I.	c_0		c_0		0		0
E.F.	$c_0(1 - \alpha)$		$c_0(1 - \alpha)$		$c_0\alpha$		$c_0\alpha$

$$\text{L.A.M. : } K^\circ = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{HF}]_{\text{eq}}}{[\text{F}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}} = \frac{(c_0\alpha)^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = 13,7\%$$

b) On a $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 1 > K^\circ = 10^{-1,6}$

Evolution dans le sens indirect :

on peut par exemple considérer la réaction inverse de constante $K^{\circ'} = \frac{1}{K^\circ} = 10^{+1,6}$

Bilan en concentrations	CH_3COO^-	+	HF	=	F^-	+	CH_3COOH
-------------------------	---------------------------	---	-------------	---	--------------	---	--------------------------

E.I.	c_0	c_0	c_0	c_0
E.F.	$c_0(1-\alpha)$	$c_0(1-\alpha)$	$c_0(1+\alpha)$	$c_0(1+\alpha)$

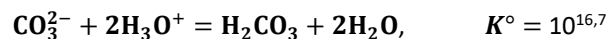
L.A.M. : $K^{\circ'} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}} \cdot [\text{F}^-]_{\text{eq}}}{[\text{HF}]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{eq}}} = \frac{(c_0(1+\alpha))^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ d'où $1+\alpha = \sqrt{K^{\circ'}}(1-\alpha)$ soit

$$\alpha = \frac{\sqrt{K^{\circ'}}-1}{1+\sqrt{K^{\circ'}}} = 72,6\%$$

2) $Q_{r,0} = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]_0^2} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \times 4 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{8} 10^{12} > K^{\circ} = 10^{5,2}$:

évolution dans le sens indirect, or en l'absence de produit dans l'état initial, absence de réaction : il ne se passe rien.

16. ❤ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :



La concentration initiale en ions carbonate est de $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et celle en ions oxonium est de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

Eléments de réponse :

Absence de réactifs dans l'état initial, $Q_r = 0$, avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

Bilan en mol /L	CO_3^{2-}	+	$2\text{H}_3\text{O}^+$	=	H_2CO_3	+	$2\text{H}_2\text{O}$
E.I.	10^{-3}		10^{-2}		0		/
E.F.	$10^{-3} - x$		$10^{-2} - 2x$		x		/
E.F. approché	ε		$8 \cdot 10^{-3}$		10^{-3}		/

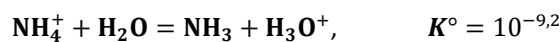
Avec $K^{\circ} = 10^{16,7} \gg 1$, on peut faire l'hypothèse d'une réaction quasi-totale, avec consommation complète du réactif limitant, soit ici $x \approx 10^{-3} \text{ mol/L}$ et $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3} \text{ mol/L}$

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K^{\circ} = \frac{[\text{H}_2\text{CO}_3] \times 1}{[\text{CO}_3^{2-}] \times [\text{H}_3\text{O}^+]^2} = \frac{x}{(10^{-3} - x)(10^{-2} - 2x)^2} \approx \frac{10^{-3}}{\varepsilon(8 \cdot 10^{-3})^2} = 10^{16,7}$$

Soit $\varepsilon = \frac{10^{-13,7}}{64} = 3,1 \cdot 10^{-16} \text{ mol/L}$: on a bien $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3} \text{ mol/L}$, hypothèse validée.

17. ❤ On met en solution des ions ammonium à la concentration de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :



Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

Eléments de réponse :

Absence de réactifs dans l'état initial, $Q_r = 0$, avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

Bilan en mol /L	NH_4^+	+	H_2O	=	NH_3	+	H_3O^+
E.I.	10^{-2}		/		0		0
E.F.	$10^{-2} - x$		/		x		x
E.F. approché	10^{-2}		/		ε		ε

Avec $K^{\circ} = 10^{-9,2} \ll 1$, on peut faire l'hypothèse d'une réaction très peu avancée, soit ici $10^{-2} - x \approx 10^{-2} \text{ mol/L}$ et $x = \varepsilon \ll 10^{-2} \text{ mol/L}$

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K_s = \frac{[\text{NH}_3] \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{NH}_4^+] \times 1} = \frac{x^2}{(10^{-2} - x)} \approx \frac{\varepsilon^2}{10^{-2}} = 10^{-9,2}$$

Soit $\varepsilon = 10^{-5,6} \text{ mol/L} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol/L}$

On a bien $\varepsilon \ll 10^{-2} \text{ mol/L}$ hypothèse validée.