

DS. DE PHYSIQUE N°1 - MPI**Durée : 4h**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

PROBLEME N°1 : ACCORDEUR DE GUITARE

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $ue(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .

— On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un ordinateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure 1.

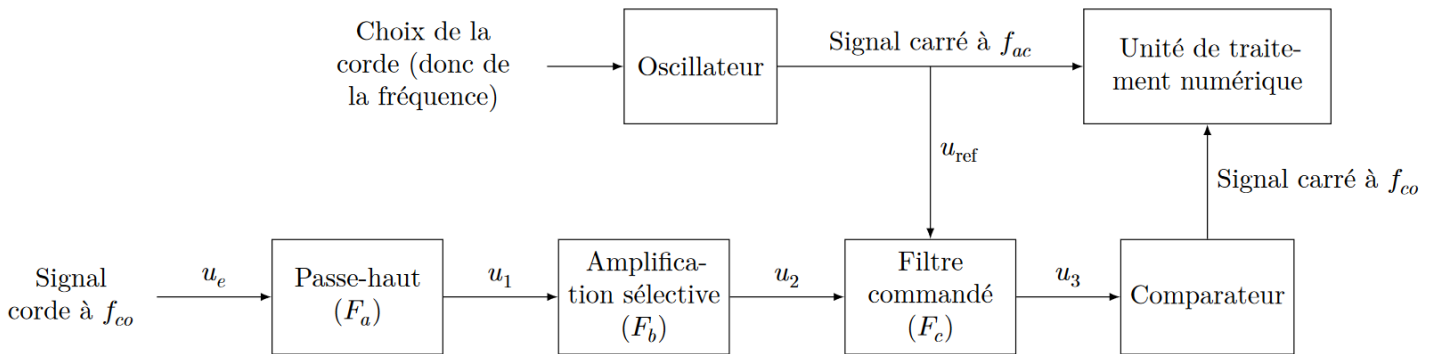


Figure 1 Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

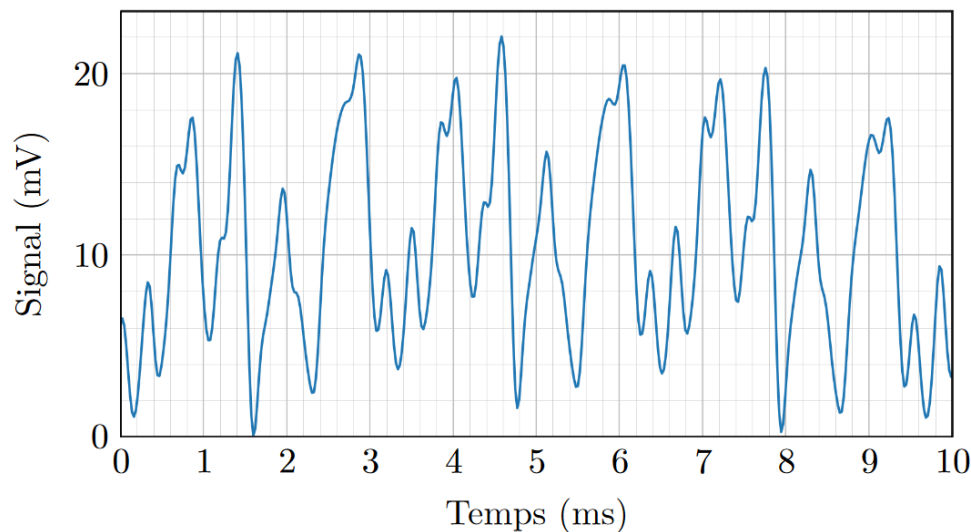


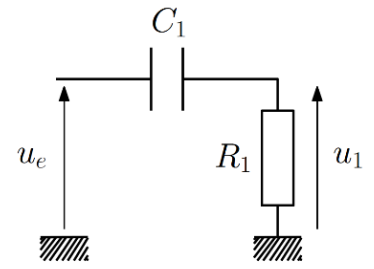
Figure 2 Signal de la guitare

- 1- Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal, ainsi qu'une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- 2- L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

B – Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

- 3 - En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
- 4 - De quel type de filtre s'agit-il ? Le vérifier par une étude qualitative du comportement à haute et basse fréquence. Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
- 5 - Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
- 6 - On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

Figure 3 Filtre (F_a)

C – Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

C.1) Préambule

Soit le filtre de la figure 4(a).

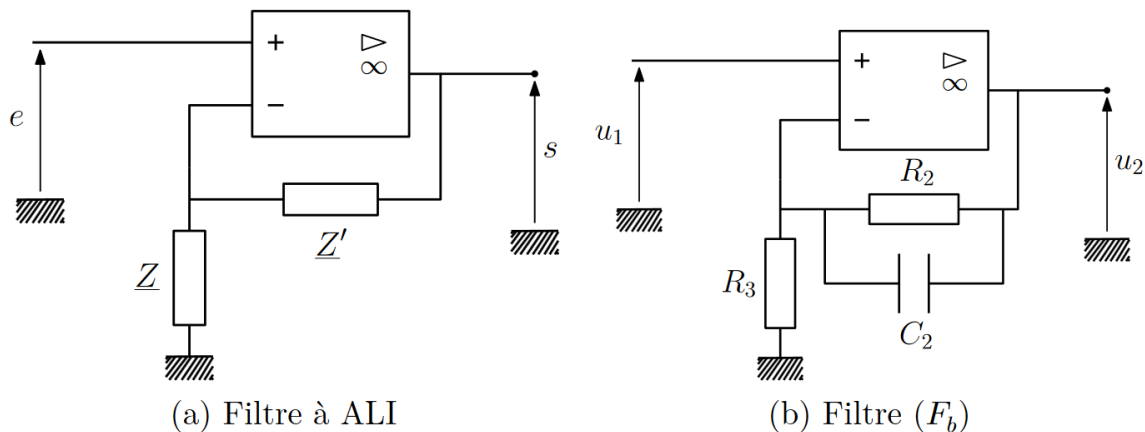


Figure 4 Deux filtres

- 7 - Montrer que sa fonction de transfert \underline{H} s'écrit en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' selon $\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$
- 8 - Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

C.2) Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4(b) (filtre (F_b)).

- 9 - Dédire des questions précédentes l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 . La mettre sous la forme $\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ et donner les expressions de G_0 et ω_2 .
- 10 - Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

- 11 - Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

D – Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la sous-partie F.

D.1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

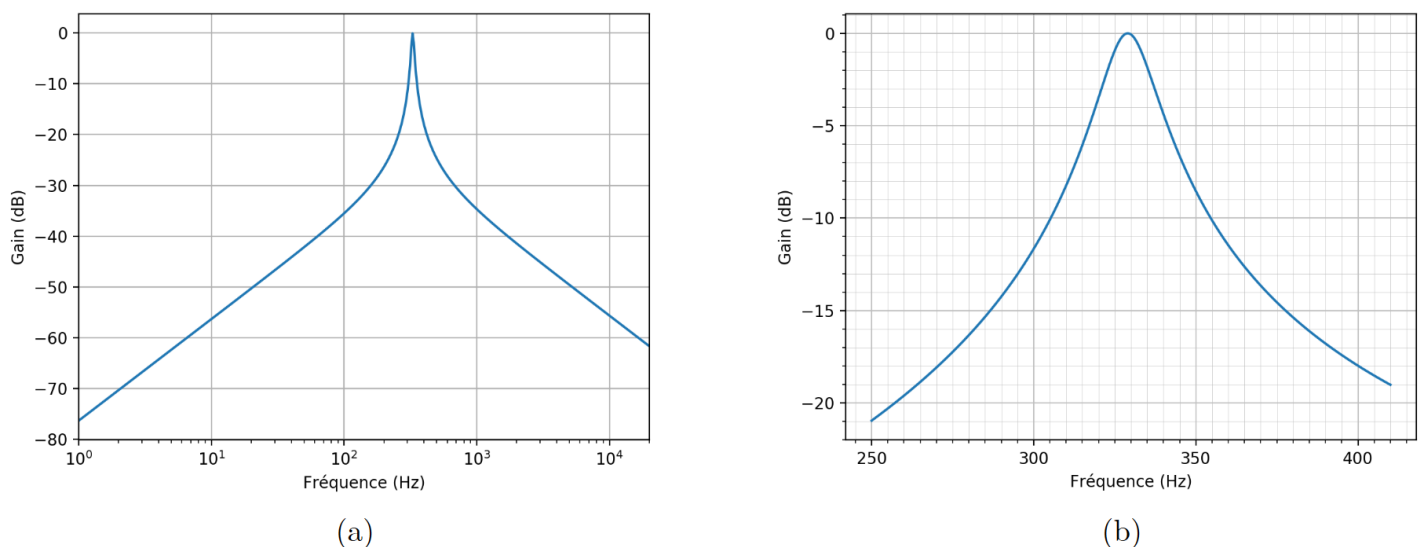


Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

- 12 - Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ? Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.
- 13 - Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

D.2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

- 14 - Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
- 15 - En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a). Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
- 16 - Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

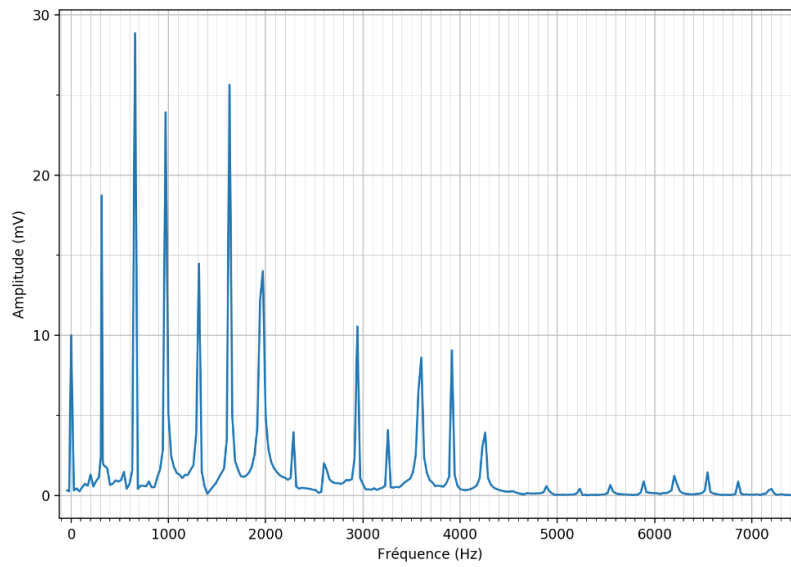
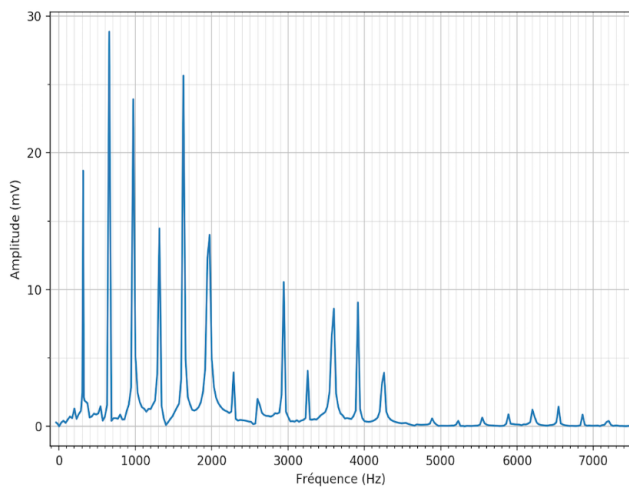
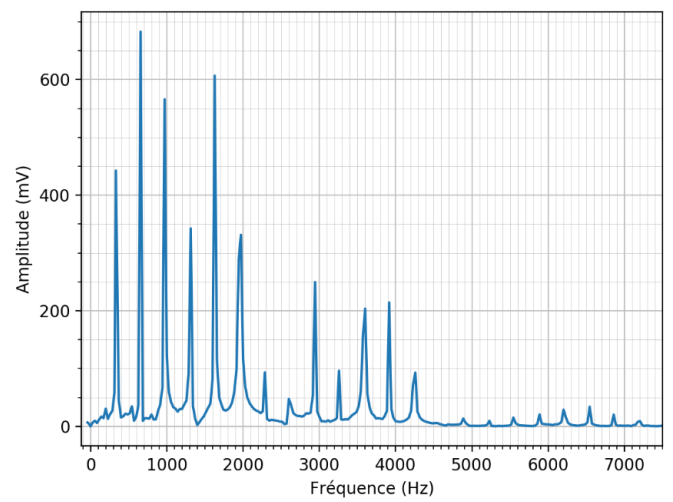


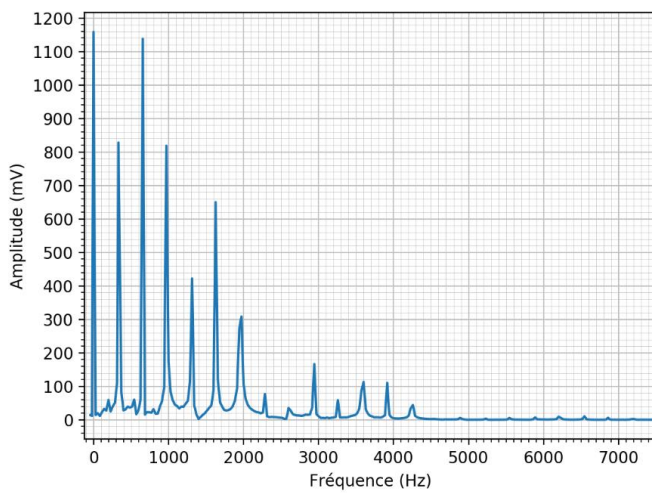
Figure 6 Spectre du signal d'entrée



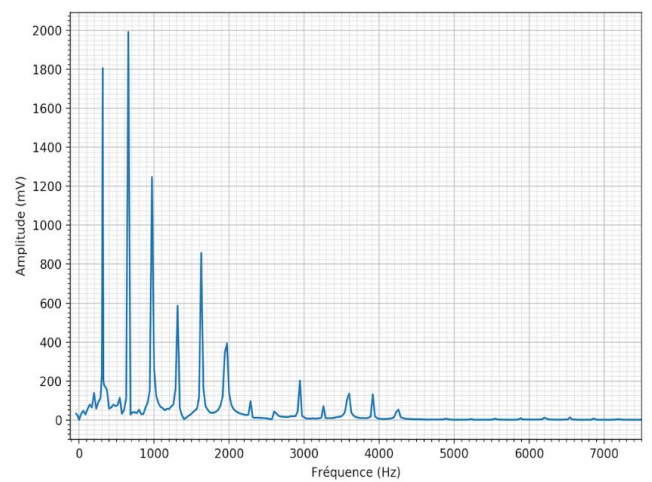
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres

I.E – Mise en forme non traitée**F – Retour sur le filtre sélectif commandé**

Regardons plus en détails la manière de fabriquer le filtre (F_C) dont la fréquence centrale est commandée par un signal carré externe. On utilise pour cela un filtre à capacité commutée.

F.1) Capacité commutée

Soit un condensateur de capacité C aux bornes duquel on applique une tension u_C .

17- Rappeler l'expression de la charge q transférée au condensateur en fonction de C et u_C . On précisera, à l'aide d'un schéma, les conventions utilisées.

On monte maintenant le condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B , comme l'indique la figure 9 ci-dessous.

On fait les hypothèses suivantes.

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).
- Ils sont toujours dans des états complémentaires : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal $u_{réf}$ carré périodique de fréquence f_k (période T_k)) de telle sorte que :
 - sur l'intervalle $[0, T_k/2]$: K_A est fermé et K_B ouvert ;
 - sur l'intervalle $[T_k/2, T_k]$: K_A est ouvert et K_B fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
- La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

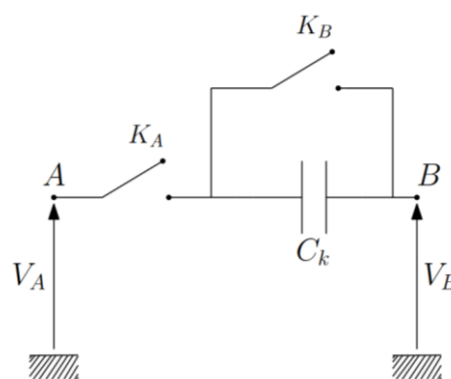


Figure 9 Capacité commutée

18- Donner les expressions de q_1 et q_2 , les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, T_k/2]$ et $[T_k/2, T_k]$. On précisera les conventions utilisées.

On en déduit $\delta q = q_2 - q_1$ la charge transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

19- À quoi est alors égale la charge totale Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

- 20 - En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A , V_B , C_k et f_k .
- 21 - Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance en fonction de f_k et C_k .

La capacité commutée se comporte donc comme une résistance R_k dont la valeur est commandée par un signal extérieur et plus exactement par la fréquence f_k de ce signal.

F.2) Filtre à capacité commutée

- 22 - Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_c).

PROBLEME N°2 : SYNTHÈSE DU TRIOXYDE DE SOUFRE

Le trioxyde de soufre est produit comme intermédiaire de la production industrielle d'acide sulfurique. On s'intéresse à la synthèse du trioxyde de soufre $SO_{3(g)}$ en phase gazeuse à partir du dioxyde de soufre $SO_{2(g)}$ et du dioxygène $O_{2(g)}$.

- 23 - Ecrire l'équation de réaction correspondante en prenant un coefficient stœchiométrique égal à 2 pour $SO_{3(g)}$.

On part d'un mélange contenant une quantité $n_0 = 1,0$ mol de $O_{2(g)}$ et $2n_0$ de $SO_{2(g)}$. On suppose que la pression P est maintenue constante et égale à la pression standard $P^\circ = 1$ bar et que les gaz sont assimilables à des gaz parfaits.

- 24 - Sous ces hypothèses, montrer que l'activité d'un gaz s'écrit $a_i = n_i/n_{tot}$, où n_i est le nombre de moles du gaz considéré et n_{tot} le nombre total de moles de gaz.
- 25 - On note ξ l'avancement de la réaction, exprimé en mole. Dresser le tableau d'avancement de la réaction. On ajoutera une colonne donnant le nombre total de moles de gaz. Exprimer le quotient de réaction Q en fonction de ξ/n_0 uniquement.

À une température T_0 donnée, le système évolue jusqu'à atteindre un équilibre chimique. On mesure l'avancement à l'équilibre : $\xi_{\text{éq}} = 0,9$ mol.

- 26 - Calculer numériquement la constante d'équilibre $K^\circ(T_0)$ ainsi que les fractions molaires des différents gaz à l'équilibre.

On étudie à présent l'influence de la température sur l'avancement à l'équilibre de cette réaction, en partant du même mélange de réactifs (1,0 mol de $O_{2(g)}$, 2,0 mol de $SO_{2(g)}$) et en conservant $P = P^\circ$. On donne la relation entre la constante d'équilibre K° et la température T (exprimée en Kelvins) :

$$K^\circ(T) = \exp\left(\frac{198 \cdot 10^3 - 188 \times T}{8,31 \times T}\right)$$

Pour déterminer $\xi_{\text{éq}}$ à une température T donnée, on propose d'utiliser une méthode dichotomique. On définit pour cela la fonction $f(\xi) = Q(\xi) - K^\circ$.

- 27- Que vaut $f(\xi_{\text{éq}})$? Tracer qualitativement l'allure de la fonction f (une étude de fonction n'est pas attendue) et rappeler, en 5 lignes maximum, le principe de la méthode dichotomique en vous appuyant sur cette représentation graphique.

Le script 1 présente une trame de programme, écrite en langage Python, mettant en jeu cette méthode.

SCRIPT 1

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from math import exp
3 def constante(T):
4     return exp(198000-188*T)/(8.31*T)
5
6 def quotient(ksi):
7     # A COMPLETER
8
9 def avancement_eq(T)
10     gauche = # A COMPLETER
11     droite = # A COMPLETER
12     ksi = 0.5
13     K = constante(T)
14     Q = quotient(ksi)
15
16     while abs(Q-K) > 0.0001:
17         if Q > K:
18             # A COMPLETER
19         else:
20             # A COMPLETER
21         ksi = # A COMPLETER
22         Q = quotient(ksi)
23     return ksi
24
25 # Balayage de la température entre 600 K et 1500 K
26 # construction de la liste liste_ksi contenant les valeurs de ksi
27 # à l'équilibre pour les différentes températures
28
29 liste_T = [T for T in range (600, 1501, 10)]
30 liste_ksi = []
31 for T in liste_T:
32     # A COMPLETER
```

- 28- Compléter le corps de la fonction quotient, renvoyant la valeur du quotient réactionnel pour l'avancement ksi.
- 29- Dans le corps de la fonction avancement_eq, compléter les lignes 10, 11, 18, 20 et 21.

- 30 - Dans la partie « Balayage en température » du script, compléter le corps de la boucle for permettant de remplir la liste `liste_ksi` avec les valeurs de `avancement_eq(T)` pour les valeurs de T comprises dans la liste `liste_T`.

La figure 10 représente l'évolution de l'avancement à l'équilibre en fonction de la température.

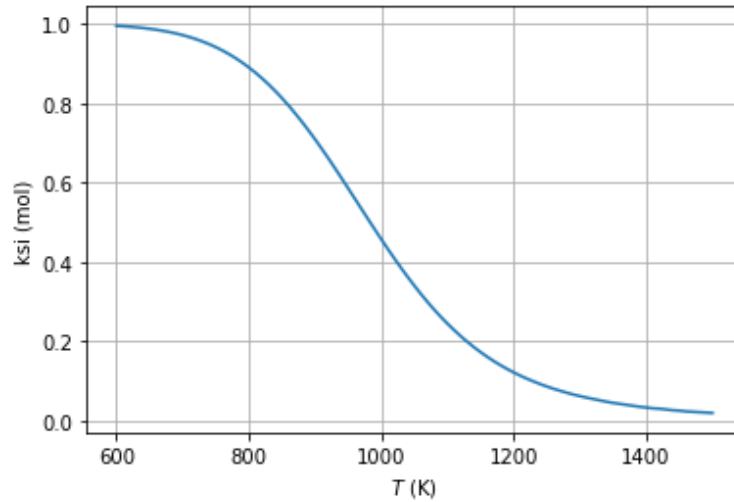


Figure 10 – Evolution de l'avancement à l'équilibre en fonction de la température

- 31 - En calculant les valeurs de la constante de réaction pour des températures de 600 K et 1500 K, vérifier la cohérence des valeurs limites observées.
- 32 - Dans quel sens faut-il faire évoluer la température pour favoriser la synthèse du trioxyde de soufre ? Justifier.
- 33 - On cherche à vérifier le résultat obtenu à la question 26. Calculer numériquement la température T_0 à partir de la valeur de $K^\circ(T_0)$ obtenue à la question 26 en utilisant la loi $K^\circ(T)$ fournie, puis comparer vos résultats à la figure 10.

PROBLEME N° 3 : ASPECTS MECANIQUES DE LA SECURITE ROUTIERE

Ce problème étudie le freinage en fonction de l'état de la chaussée puis analyse le principe du relèvement d'un virage

A. Influence de l'état de la route sur le freinage

DOCUMENT 2 : Quelques coefficients de frottement dynamique

matériaux	coefficient de frottement dynamique λ
acier sur acier	0,40
verre sur verre	0,40
pneu sur béton sec	0,70
pneu sur béton mouillé	0,50
semelle de cuir sur bois	0,20
semelle de cuir sur tapis	0,50

On considère un véhicule roulant sur une route rectiligne horizontale (Ox). On notera \vec{e}_x le vecteur unitaire de l'axe (Ox) dans le sens du déplacement. Pour les éventuelles applications numériques, on se reportera au document 2 si nécessaire.

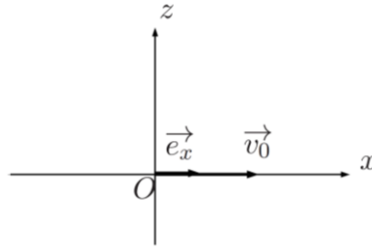


Figure 11 : Véhicule sur une route horizontale.

On considère dans un premier temps que la route est en béton, rectiligne, horizontale et sèche. Le véhicule de masse $m = 1000$ kg est assimilé à un point matériel.

- 34 - Rappeler les lois de frottement de Coulomb-Amontons. On notera \vec{N} et \vec{T} respectivement les composantes normale et tangentielle de la réaction en notant λ le coefficient de frottement dynamique qu'on suppose égal au coefficient de frottement statique.
- 35 - On modélise l'action du conducteur sur la pédale de frein par une force \vec{f} colinéaire au déplacement s'exerçant sur le véhicule et s'opposant à son déplacement, venant s'ajouter à la réaction de la route sur le véhicule. Etablir un bilan des forces s'exerçant sur le véhicule et reproduire le schéma de la figure 11 en représentant ces forces.
- 36 - Dans le cas où il y a glissement, par exemple lors d'un freinage où les roues se bloquent, déterminer la force de frottement exercée par la route sur le véhicule.
- 37 - Exprimer la norme de la force de freinage \vec{f} si le véhicule subit une décélération de norme $a_0 = 12 \text{ m.s}^{-2}$. Comparer les forces de freinage et de frottement.
- 38 - Toujours dans cette situation de glissement en bloquant les roues, calculer l'énergie dépensée pour arrêter un véhicule roulant initialement à une vitesse de 90 km.h^{-1} .
- 39 - Pour garder le contact du véhicule sur la route, il ne doit pas y avoir glissement. Etablir l'inégalité que doit vérifier l'accélération pour éviter ce glissement (attention, il y a absence de glissement du pneu par rapport à la route, mais la voiture n'est pas à l'arrêt : il s'agit de la phase de freinage avec la décélération de norme a_0). Effectuer les applications numériques pour les valeurs limites sur béton sec et béton mouillé, en conservant la valeur de la force de freinage obtenue précédemment. Conclure sur l'influence de l'état de la route sur le freinage.
- 40 - On s'intéresse à la situation où le véhicule aborde une descente sur une route inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Etablir la nouvelle inégalité que doit vérifier la force de freinage en descente en l'absence de glissement et commenter.

B. Relèvement d'un virage

Dans cette étude, le véhicule roule sans freiner ; la force de freinage \vec{f} est donc nulle. On revient au cas d'une route sèche et horizontale mais qui n'est plus rectiligne. On la modélise par un arc de cercle horizontal de rayon R et de centre O .

- 41 - Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine O et d'axe vertical (Oz) . On veut parcourir cette portion de route à vitesse constante v avec un véhicule de masse m . Donner en justifiant brièvement l'expression de l'accélération du véhicule en coordonnées cylindriques.
- 42 - Montrer qu'il y a une force radiale \vec{T} au cours du mouvement, et qu'elle correspond nécessairement à la réaction tangentielle du sol. On donnera l'expression de sa norme en fonction de m, v et R .
- 43 - Pour que le virage soit pris dans de bonnes conditions de sécurité, il ne faut pas que le véhicule glisse sur la route. Déterminer la valeur maximale v_{max} de la vitesse permettant de prendre ce virage en sécurité (on exprimera v_{max} en fonction de λ, g et R). Donner sa valeur numérique sur route sèche pour un virage de rayon $R = 50$ m.
- 44 - Si le virage est mouillé voire verglacé, que peut-on dire du coefficient de frottement ? de la vitesse maximale v_{max} avec laquelle on peut aborder le virage ? Vers quelle limite tend v_{max} quand le frottement tend à s'annuler ?
- 45 - Pour améliorer le contact pneu - route, on relève le virage d'un angle β . La valeur de β est obtenue en cherchant à annuler l'accélération verticale. **On suppose ici qu'il n'y a pas de frottement.** Dans ce cas, déterminer l'expression de la norme de la réaction normale N en fonction de m, g et β .

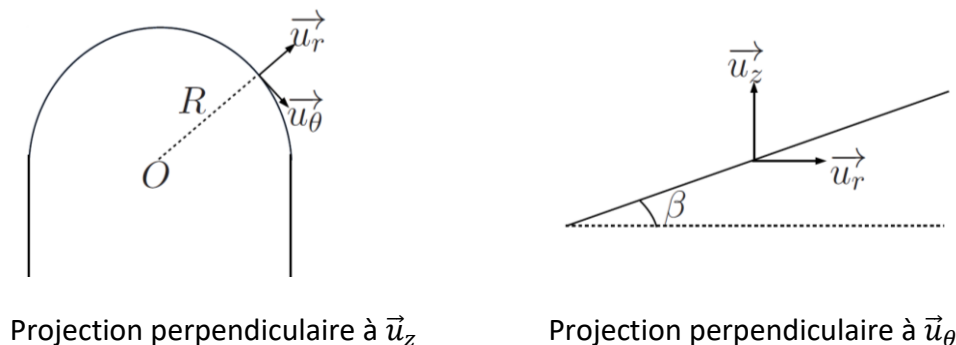


Figure 12 : Deux projections du relèvement d'un virage.

- 46 - Etablir l'expression de la valeur de la vitesse constante v dans le virage en fonction de g, R et β . Donner sa valeur pour $\beta = 20^\circ$ et $R = 50$ m. Calculer la valeur de β pour retrouver la vitesse v_{max} obtenue précédemment pour la route horizontale en présence de frottements.

Et en bonus, si vous avez abordé le reste du devoir...

PROBLEME N°4 : ANALYSE DE FOURIER ET ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL ELECTRONIQUE

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau \hat{e} , ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

- – 1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \frac{1}{T_e}$.

- – 2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

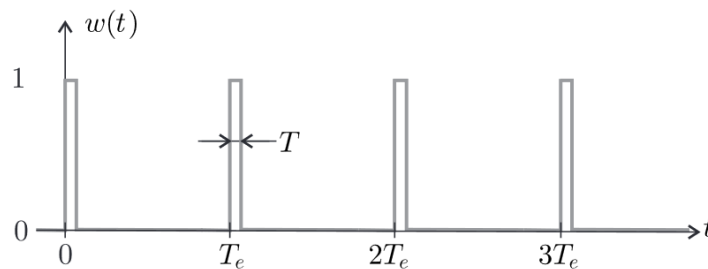


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

- – 3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

- – 4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».
- – 5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

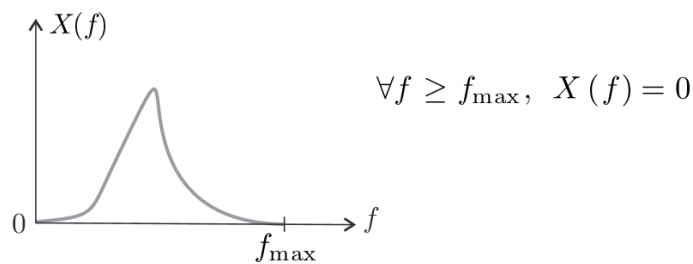


FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

- – 6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.
- – 7. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44,1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

D.S. DE PHYSIQUE N°1 - ELEMENTS DE CORRECTION

PROBLEME N°1 : ACCORDEUR DE GUITARE (CCS TSI 2019)

I.A Le signal

1 - Valeur moyenne du signal : $\approx 10 \text{ mV}$.

On relève la période T sur le graphe de la figure 2 : $T \approx \frac{7,7-1,4}{2} \approx 3,2 \text{ ms}$. Fréquence correspondante : $f \approx 320 \text{ Hz}$.

La fréquence donnée dans le tableau 1 la plus proche de la fréquence mesurée correspond à la corde de **Mi aigu** (**désaccordée**, au vu de l'écart entre la valeur mesurée et la valeur tabulée, de l'ordre de 3%).

2 - Le signal n'étant pas sinusoïdal, **plusieurs harmoniques** seront présents dans le spectre, avec des fréquences multiples de la fréquence fondamentale .

I.B Premier filtre

3 - R_1 et C_1 étant en série (filtre à vide), ils forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

4 - On peut reconnaître la forme canonique $\underline{H}_1(jx) = \frac{H_0jx}{1+jx}$ d'un **filtre passe-haut** d'ordre 1.

Sinon : étude du comporte aux basses et hautes fréquences.

A basse fréquence, $x \ll 1$ soit $1 + jx \sim 1$ et $\underline{H}_{1,BF} \sim H_0jx \rightarrow 0$: basses fréquences coupées

A haute fréquence, $x \gg 1$ soit $1 + jx \sim jx$ et $\underline{H}_{1,HF} \sim H_0$: hautes fréquences transmises

Par identification avec la forme canonique :

$x = \frac{\omega}{\omega_0} = R_1C_1\omega$ soit $\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}$, correspondant à la pulsation de coupure du filtre.

ici, on demande de préciser et non de démontrer ou d'établir : résultat de cours

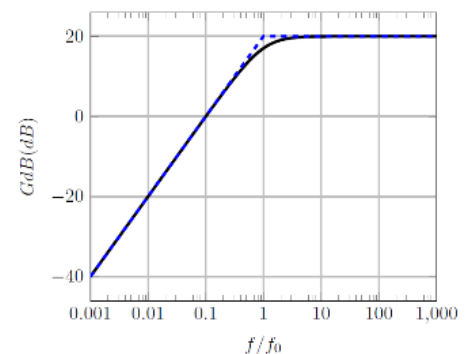
5 - Filtre passe-haut d'ordre 1 : cf cours : **asymptotes** :

gain à haute fréquence : $G_{HF} = |H_0| = 1$ soit $G_{dB,HF} = 20 \log G_{HF} = 0$,

pente de +20 dB / décade aux basses fréquences (on peut la retrouver à partir de $\underline{H}_{1,BF} \sim H_0jx$ mais l'énoncé stipule sans calculs).

pulsation de coupure $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} = 1$ avec $G_{dB}(x_c = 1) = G_{dB,HF} - 3 \text{ dB}$

On peut alors tracer l'allure du **diagramme de Bode** ci-contre



6 - Fréquence de coupure : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$

A.N. : $f_c \approx 15,9 \text{ Hz}$.

Fréquence de coupure basse, plus d'une décade d'écart avec le fondamental : seule la composante continue présente dans le signal d'origine sera supprimée, ce filtre permettant d'obtenir un signal de valeur moyenne nulle.

I.C. Deuxième filtre

C.1) Prémabule

7 - ALI idéal, pas de courant d'entrée dans la borne inverseuse, les dipôles \underline{Z} et \underline{Z}' sont donc en série. De plus, du fait de la boucle de rétroaction négative, on a $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$, soit $V^+ = V^- = e(t)$.

On a donc la tension $e(t)$ aux bornes de \underline{Z} et la tension $s(t)$ aux bornes de \underline{Z} et \underline{Z}' en série, qui forment donc un pont diviseur de tension, d'où $\underline{e}(t) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} s(t)$, soit :

$$\underline{H} = \frac{s(t)}{e(t)} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

On obtient alors $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$: Montage **amplificateur non inverseur**.

C.2) Amplification (légèrement) sélective

8 - On peut définir l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\acute{e}q}$ à l'association parallèle de R_2 et C_2 .

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}$$

D'après ce qui précède, montage de fonction de transfert de la forme $\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$ avec ici $\underline{Z}' = \underline{Z}_{\acute{e}q} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$ et $\underline{Z} = R_3$, soit

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}$$

De la forme demandée par l'énoncé : $\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega_2}$, avec par identification

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

9 - **Basses fréquences** : $\omega \ll \omega_2$ soit $1 + j\frac{\omega}{\omega_2} \rightarrow 1$ et $\underline{H}_2 \rightarrow \underline{H}_{2,BF} = 1 + \frac{R_2}{R_3} = 1 + G_0$

Hautes fréquences : $\omega \gg \omega_2$ soit $1 + j\frac{\omega}{\omega_2} \rightarrow j\frac{\omega}{\omega_2}$ et $\frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \rightarrow 0$, soit $\underline{H}_2 \rightarrow \underline{H}_{2,HF} = 1$

10 - On a $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$ A.N. : $f_2 \approx 498 \text{ Hz}$ et $G_0 \approx 113$.

Ce second filtre va donc **amplifier fortement les fréquences inférieures à 500 Hz, soit ici le fondamental que l'on veut extraire, et beaucoup moins les harmoniques, voire pas du tout pour ceux de rang élevé.**

D – Filtrage (très) sélectif commandé

11 - Diagramme de Bode caractéristique d'un filtre **pass-bande du second ordre** avec des asymptotes à +/- 20 dB/décade à basse et haute fréquence ; le gain diminue rapidement en dehors d'une bande passante ici restreinte : filtre sélectif.

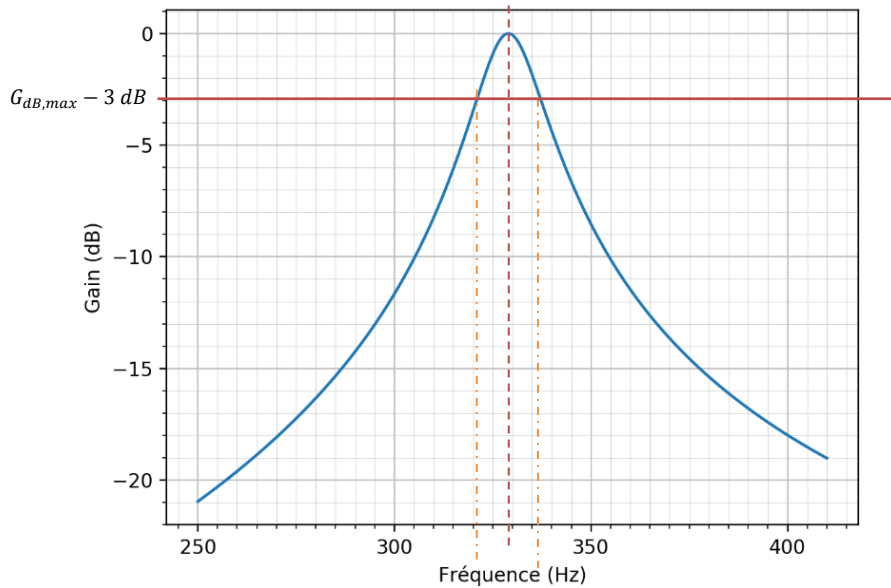
Par lecture graphique : **fréquence centrale** caractéristique f_0 correspondant à la fréquence pour laquelle le gain maximal est atteint, soit ici $f_0 \approx 329$ à 330 Hz

remarque : on peut supposer qu'il s'agit de $f_0 = 329,6 \text{ Hz}$, fréquence du Mi aigu.

Bande passante : plage de fréquences telles que $G_{dB}(f) > G_{dB,max} - 3 \text{ dB}$

Fréquences de coupure f_c : fréquences pour lesquelles le gain $G(f_c) = |\underline{H}|(f_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$, ou encore $G_{dB}(f_c) = G_{dB,max} - 3 \text{ dB}$

Bande passante : $f \in [f_{c1}; f_{c2}]$ Cf. schéma : on lit $f_{c1} \approx 321 \text{ Hz} \approx 320 \text{ Hz}$ et $f_{c2} \approx 337 \text{ Hz} \approx 340 \text{ Hz}$



12 - On lit graphiquement $G_{dB}(315 \text{ Hz}) = -6 \text{ dB}$, correspondant à un gain G tel que $G_{dB} = 20 \log G$ soit $G = 10^{G_{dB}/20}$

A.N. : $G \approx 0,5 = \frac{1}{2}$: atténuation d'un facteur 2.

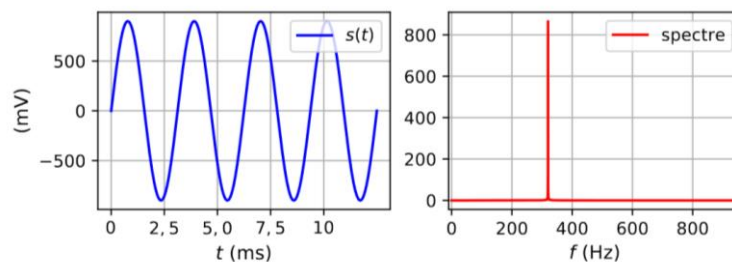
D.2) Analyse spectrale

13 - Le spectre présente :

- un pic à fréquence nulle d'amplitude 10 V associé à la composante continue du signal d'entrée u_e (question 1) ;
- un pic correspondant au fondamental à une fréquence f_0 légèrement supérieure à 300 Hz, ce qui est bien compatible avec un signal à 315 Hz (question 1) ;
- des harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale pour ce signal qui n'est pas sinusoïdal. Par exemple, le 10^{ème} harmonique a une fréquence f_{10} d'environ 3200 Hz qui correspond bien à une fréquence $f_{10} = 10f_0$

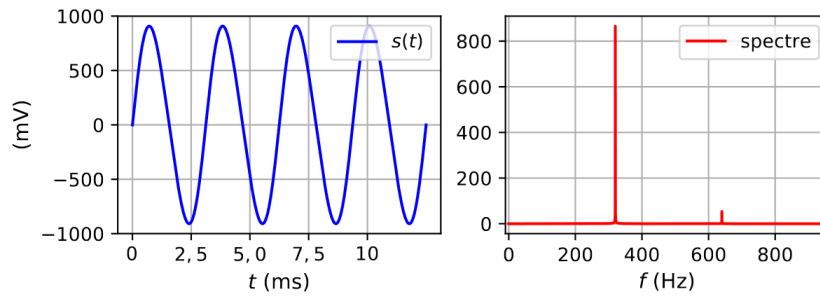
14 - En sortie du premier filtre, seule la composante continue sera supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du spectre (a). À 315 Hz, le filtre B amplifie d'un facteur G_0 soit d'environ 100 fois le fondamental, qui passe d'une amplitude de 18 mV à 1800 mV. Ce filtre amplifie un peu moins l'harmonique de rang 2 et quasiment pas les autres harmoniques. Le spectre correspondant à ces caractéristiques, avec notamment un fondamental d'amplitude environ égale à 1800 mV, est le spectre (d).

15 - Le spectre du signal en sortie de (Fc) comprendra un fondamental d'amplitude environ divisée par 2 (gain à -6 dB) soit environ 900 mV, un harmonique de rang 2 très faible et des autres harmoniques quasi-absents. Le signal temporel sera donc quasi-sinusoïdal, d'amplitude 900 mV, et de fréquence 315 Hz.



En tenant compte pour plus de précision de l'harmonique de rang 2 : $f_2 \approx 640 \text{ Hz}$ avec d'après le diagramme de Bode du filtre une atténuation de 30 dB, soit un facteur d'atténuation de $10^{\frac{30}{20}} \approx 0,032$; on trouve alors une amplitude d'environ 63 mV.

Le tracé temporel précis nécessiterait de connaître le déphasage du filtre passe-bande qui n'est pas fourni ici. En 2^{ème} approximation :



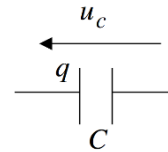
E) Mise en forme

F – Retour sur le filtre sélectif commandé

F.1) Capacité commutée

- 16 - Relation charge – tension pour un condensateur, avec la convention ci-contre (q charge de l'armature vers laquelle la flèche de la tension)

$$q = C u_c$$



- 17 - Sur l'intervalle $[0, T_k/2]$: K_A fermé et K_B ouvert ; d'après l'énoncé, C_k a eu le temps de se charger, et devient donc équivalent à un interrupteur ouvert. On a donc $q_1 = C_k(V_B - V_A)$.

Sur l'intervalle $[T_k/2, T_k]$: K_A est ouvert et K_B fermé, C_k a eu le temps de se décharger, la tension à ses bornes est nulle (il est court-circuité par K_B) d'où $q_2 = 0$.

- 18 - On a $\delta q = q_2 - q_1 = C_k(V_A - V_B)$ charge transférée pendant une période T_k . Au bout d'un temps t suffisamment long, on peut considérer qu'il y a quasiment un nombre entier de périodes T_k , d'où :

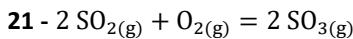
$$Q \approx \delta q \times \frac{t}{T_k} = C_k(V_A - V_B) \times \frac{t}{T_k}$$

- 19 - On a $i = \frac{dq}{dt}$, d'où intensité moyenne : $I_m \approx \frac{\delta q}{T_k} = \frac{C_k(V_A - V_B)}{T_k} = C_k f_k (V_A - V_B)$

- 20 - On a $I_m = C_k f_k (V_A - V_B) \Leftrightarrow V_A - V_B = \frac{1}{C_k f_k} I_m = u_k = R_k I_m$ en convention récepteur. Par identification

$$R_k = \frac{1}{C_k f_k}$$

PROBLEME N°2 : SYNTHÈSE DU TRIOXYDE DE SOUFRE (E3A MPI 2024)



- 22 - Pour un gaz : $a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$ avec P_i pression partielle, correspondant à la pression qu'aurait le gaz s'il était seul dans le même volume et à la même température.

Pour un gaz parfait, d'après l'équation d'état : $P_i = \frac{n_i RT}{V}$ avec pour la pression totale $P = \frac{n_{tot} RT}{V}$ où n_{tot} correspond au nombre de moles total de gaz.

Ici, on a $P = \frac{n_{tot} RT}{V} = P^\circ$, soit $a_i = \frac{P_i}{P^\circ} = \frac{\frac{n_i RT}{V}}{\frac{n_{tot} RT}{V}} = n_i / n_{tot}$

- 23 - Tableau d'avancement

Quantités de matière	$2 \text{SO}_{2(g)}$	+	$\text{O}_{2(g)}$	=	$2 \text{SO}_{3(g)}$	$n_{tot} = n_{tot,gaz}$
E.I.	$2n_0$		n_0		0	$3n_0$

E quelconque	$2n_0 - 2\xi$	$n_0 - \xi$	2ξ	$3n_0 - \xi$
E.F. (équilibre)	$2n_0 - 2\xi_{\text{éq}}$	$n_0 - \xi_{\text{éq}}$	$2\xi_{\text{éq}}$	$3n_0 - \xi_{\text{éq}}$

Quotient de réaction, avec $a_i = n_i/n_{\text{tot}}$:

$$Q \stackrel{\text{définition}}{=} \prod_i a_i^{v_i} \stackrel{\text{équation bilan}}{=} \frac{a_{\text{SO}_3}^2}{a_{\text{O}_2} a_{\text{SO}_2}^2} \stackrel{a_i = n_i/n_{\text{tot}}}{=} \frac{n_{\text{SO}_3}^2 n_{\text{tot}}}{n_{\text{O}_2} n_{\text{SO}_2}^2} \stackrel{\text{tableau d'avancement}}{=} \frac{(2\xi)^2 (3n_0 - \xi)}{(n_0 - \xi)(2n_0 - 2\xi)^2}$$

$$Q = \frac{\xi^2 (3n_0 - \xi)}{(n_0 - \xi)^3}$$

$$Q = \frac{(\xi/n_0)^2 (3 - \xi/n_0)}{(1 - \xi/n_0)^3}$$

24 - Relation de Guldberg et Waag à l'équilibre : $K^\circ \stackrel{\text{L.A.M.}}{=} Q_{\text{éq}} = \frac{(\xi_{\text{éq}}/n_0)^2 (3 - \xi_{\text{éq}}/n_0)}{(1 - \xi_{\text{éq}}/n_0)^3}$

A.N. avec $\xi_{\text{éq}} = 0,9$ mol à T_0 : $K^\circ(T_0) = 1701 \approx 1700$

Fractions molaires à l'équilibre $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$, en exploitant le tableau d'avancement à l'équilibre :

$$x_{\text{O}_2(\text{g})} = \frac{n_{\text{O}_2(\text{g})}}{n_{\text{tot}}} = \frac{n_0 - \xi_{\text{éq}}}{3n_0 - \xi_{\text{éq}}} = 4,8\%$$

$$x_{\text{SO}_2(\text{g})} = \frac{n_{\text{SO}_2(\text{g})}}{n_{\text{tot}}} = \frac{2n_0 - 2\xi_{\text{éq}}}{3n_0 - \xi_{\text{éq}}} = 9,5\%$$

$$x_{\text{SO}_3(\text{g})} = \frac{n_{\text{SO}_3(\text{g})}}{n_{\text{tot}}} = \frac{2\xi_{\text{éq}}}{3n_0 - \xi_{\text{éq}}} = 1 - x_{\text{SO}_2(\text{g})} - x_{\text{O}_2(\text{g})} = 85,7\%$$

25 - $f(\xi_{\text{éq}}) = Q(\xi_{\text{éq}}) - K^\circ \stackrel{\text{L.A.M.}}{=} 0$

Pour $\xi_{\text{min}} = 0$, absence de produit, $Q(\xi_{\text{min}} = 0) = 0$ donc $f(0) = Q(0) - K^\circ = -K^\circ < 0$

Pour $\xi_{\text{max}} \stackrel{\text{si réaction totale}}{=} n_0$

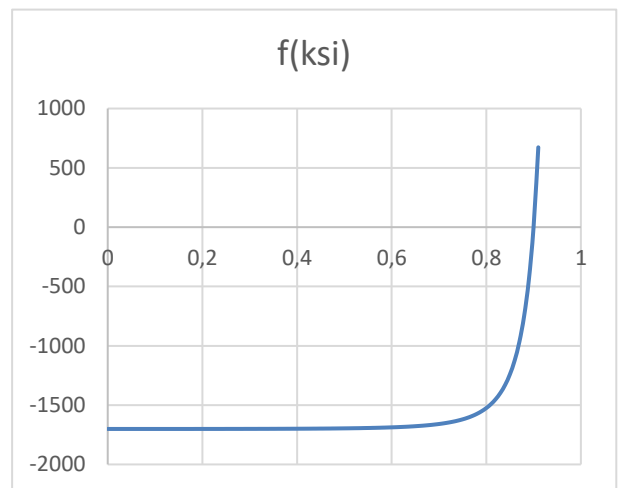
$$Q(\xi_{\text{max}}) \rightarrow +\infty \text{ et } f(\xi_{\text{max}}) = Q(\xi_{\text{max}}) - K^\circ \rightarrow +\infty$$

Avec $Q(\xi)$ fonction croissante de ξ , on a donc $f(\xi)$ croissante.

Principe de la méthode dichotomique :

On cherche une solution $\xi_{\text{éq}}$ de l'équation $f(\xi) = 0$ dans l'intervalle $[\xi_{\text{min}} = 0; \xi_{\text{max}} = n_0]$ avec $f(\xi_{\text{min}})f(\xi_{\text{max}}) < 0$.

- On calcule le milieu $m = \frac{\xi_{\text{min}} + \xi_{\text{max}}}{2}$ de l'intervalle $[\xi_{\text{min}}; \xi_{\text{max}}]$.
- Deux cas possibles : Si $f(\xi_{\text{min}})$ et $f(m)$ sont de signes opposés, soit $f(m) > 0$, $\xi_{\text{éq}}$ appartient à $[\xi_{\text{min}}; m]$; on réaffecte alors $\xi_{\text{max}} \leftarrow m$. Sinon $\xi_{\text{éq}}$ appartient à $[m; \xi_{\text{max}}]$; on réaffecte alors $\xi_{\text{min}} \leftarrow m$
- On recommence l'étape 1 avec le nouvel intervalle $[\xi_{\text{min}}; \xi_{\text{max}}]$
- On arrête la recherche lorsque $\xi_{\text{max}} - \xi_{\text{min}} < \varepsilon$, précision souhaitée.



26 - `return ksi**2*(3-ksi)/(1-ksi)**3`

ou

```
n_0 = 1      #composition initiale en moles
return (ksi/n_0)**2*(3-ksi/n_0)/(1-ksi/n_0)**3
```

27 - Dichotomie complétée

```
def avancement_eq(T):
```

```
    gauche = 0
```

```
    droite = 1
```

```
    ksi = 0.5
```

```
    K = constante(T)
```

```
    Q = quotient(ksi)
```

```
    while abs(Q-K) > 0.0001:
```

```
        if Q > K:
```

```
            droite = ksi
```

```
        else :
```

```
            gauche = ksi
```

```
            ksi = (droite+gauche)/2
```

```
            Q = quotient(ksi)
```

```
    return ksi
```

28 - « Balayage en température »

```
liste_T = [T for T in range (600, 1501, 10)]
```

```
liste_ksi = []
```

```
for T in liste_T:
```

```
    liste_ksi.append(avancement_eq(T))
```

29 - A.N. : $K^\circ(T = 600) = 2,6 \cdot 10^7$ et $K^\circ(T = 1500) = 1,2 \cdot 10^{-3}$

$K^\circ(T = 600) \gg 1$: réaction quasi-totale avec les réactifs limitants quasi totalement consommés : $\xi_{\text{éq}} \rightarrow n_0 = 1$ mol

$K^\circ(T = 1500) \ll 1$: réaction très peu avancée avec un avancement négligeable devant les quantités de matière initiales, soit $\xi_{\text{éq}} \rightarrow 0$: cohérent avec les valeurs limites du graphe fourni.

30 - Afin de favoriser la synthèse du trioxyde de soufre, il faut avoir l'avancement à l'équilibre le plus élevé possible afin d'obtenir une quantité de matière de trioxyde de soufre à l'équilibre la plus élevée possible. Il faut donc baisser la température pour avoir $\xi_{\text{éq}} \rightarrow 1$ mol.

31 - On a

$$K^\circ(T) = \exp\left(\frac{198 \cdot 10^3 - 188 \times T}{8,31 \times T}\right) \text{ soit } \ln(K^\circ) = \frac{198 \cdot 10^3 - 188 \times T}{8,31 \times T} \text{ d'où}$$

$$8,31 \times T \times \ln(K^\circ) = 198 \cdot 10^3 - 188 \times T$$

$$T = \frac{198 \cdot 10^3}{8,31 \times \ln(K^\circ) + 188}$$

A.N. : $T = 793 \text{ K}$

Sur le graphe fourni, on voit qu'à cette température d'environ 800 K, on a bien un avancement $\text{ksi} = 0,9$ cohérent avec la valeur utilisée pour le calcul de la constante d'équilibre. Ouf !

PROBLEME N°3 : ASPECTS MECANIQUES DE LA SECURITE ROUTIERE (E3A MP 2017)

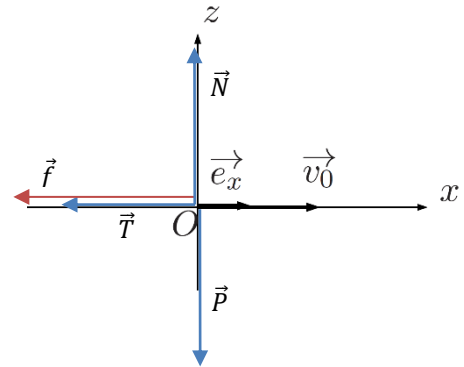
A. Influence de l'état de la route

32 - Lois de Coulomb du frottement solide

Pour un solide S en contact avec un support également solide, on distingue deux situations :

- **Non glissement** du solide sur le support : la force tangentielle vérifie $\|\vec{T}\| < \lambda\|\vec{N}\|$. On a alors $\vec{v}_{g1/2} = \vec{0}$
- **Glissement** du solide sur le support $\|\vec{T}\| = \lambda\|\vec{N}\|$, avec \vec{T} colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_{g1/2} \neq \vec{0}$ et de sens opposé : $\vec{T} \cdot \vec{v}_{g1/2} < 0$

- 33 - Dans le référentiel lié à la route et supposé galiléen, les forces appliquées sont le poids, la réaction exercée par la route se décomposant en sa composante normale \vec{N} et sa composante tangentielle \vec{T} , ainsi que la force de freinage \vec{f} .



- 34 - Principe fondamental de la dynamique au système voiture étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}$$

En l'absence de mouvement vertical, projection sur \vec{e}_z : $0 = \|\vec{N}\| - mg$ soit

$$\|\vec{N}\| = mg$$

Dans le cas où il y a glissement, d'après les lois de Coulomb, $\|\vec{T}\| = \lambda\|\vec{N}\|$ soit

$$\|\vec{T}\| = \lambda mg$$

Avec $\vec{T} \cdot \vec{v} < 0$, soit $\vec{T} = -\lambda mg \vec{e}_x$

- 35 - Mouvement rectiligne décéléré selon \vec{e}_x : $\vec{a} = -a_0 \vec{e}_x$

Projection du PFD sur \vec{e}_x :

$$-ma_0 = -\|\vec{T}\| - f = -\lambda mg - f$$

$$f = ma_0 - \lambda mg$$

A.N. pour une route en béton sèche, soit avec $\lambda = 0,70$: $\|\vec{T}\| = 6,9 \text{ kN}$ et $f = 5,1 \text{ kN}$, du même ordre de grandeur (je ne sais pas trop ce qu'ils attendaient de plus ??)

- 36 - Théorème de l'énergie cinétique appliqué au système voiture dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre l'instant correspondant au début de freinage et l'instant correspondant à l'arrêt du véhicule :

$$\Delta E_c = \sum_i W_{i,ext} = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W(\vec{N}) + W(\vec{f})$$

Avec $\Delta E_c = E_{c,final} - E_{c,0} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$\Delta E_c = W = -\mathcal{E}_{dépensée} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

A.N. : $\mathcal{E}_{dépensée} = 312 \text{ kJ}$

Remarque : Mouvement horizontal et forces toujours orthogonales au mouvement : $W(\vec{P}) = W(\vec{N}) = 0$; ce sont les forces de frottement et de freinage qui dissipent cette énergie cinétique sous forme de chaleur.

37 - D'après les lois de Coulomb, condition de non glissement :

$$\|\vec{T}\| < \lambda \|\vec{N}\|$$

Par projection du PFD :

En l'absence de mouvement vertical, projection sur \vec{e}_z : $0 = \|\vec{N}\| - mg$ soit

$$\|\vec{N}\| = mg$$

Et projection du PFD sur \vec{e}_x :

$$-ma_0 = -\|\vec{T}\| - f$$

Attention, en l'absence de glissement, on n'a plus $\|\vec{T}\| = \lambda mg$

Condition de non glissement : $\|\vec{T}\| < \lambda \|\vec{N}\| \Leftrightarrow ma_0 - f < \lambda mg$ soit

$$a_0 < \lambda g + \frac{f}{m}$$

A.N. : Béton sec : $\lambda = 0,7$ et $a_0 < 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ béton mouillé : $\lambda = 0,5$ et $a_0 < 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

L'état de la route joue un rôle non négligeable dans les conditions possibles de freinage, et moins il y a de frottements, et plus il faut décélérer prudemment.

38 - Par projection du PFD :

En l'absence de mouvement vertical, projection sur \vec{e}_y :

$$0 = \|\vec{N}\| - mg \cos(\alpha) \text{ soit}$$

$$\|\vec{N}\| = mg \cos(\alpha)$$

Et projection du PFD sur \vec{e}_x :

$$-ma_0 = -\|\vec{T}\| - f + mg \sin(\alpha)$$

Condition de non glissement :

$$\|\vec{T}\| < \lambda \|\vec{N}\| \Leftrightarrow$$

$$ma_0 - f + mg \sin(\alpha) < \lambda mg \cos(\alpha) \text{ soit}$$

$$a_0 < g(\lambda \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) + \frac{f}{m}$$

Pour des pentes raisonnables, on a $|\lambda \cos(\alpha) - \sin(\alpha)| < 1$

Comme attendu, l'accélération limite diminue lorsque la pente augmente, le véhicule glisse plus facilement en descente.

B. Relèvement d'un virage

39 - Pour un mouvement circulaire, on a $r = R = cte$

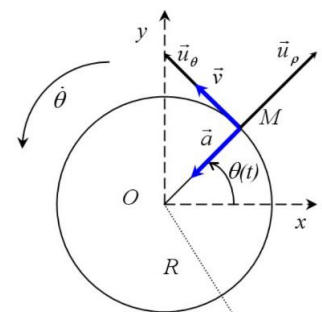
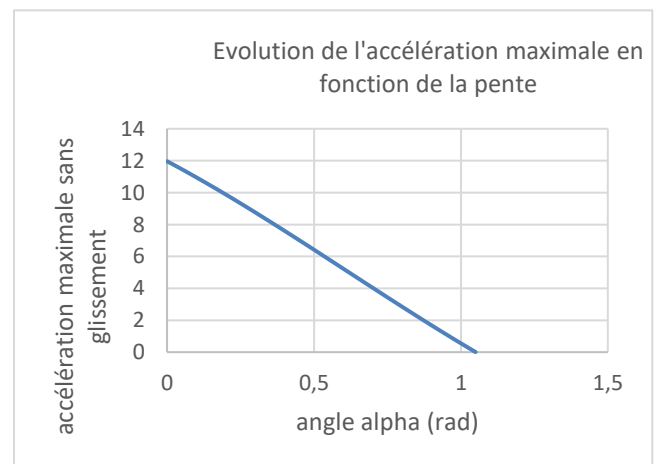
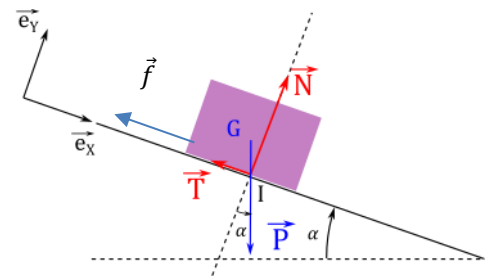
$$\vec{v}_R = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -\underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_N} \vec{u}_r + \underbrace{R\ddot{\theta}}_{\vec{a}_T} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

Si la vitesse est constante (mouvement circulaire uniforme) : $v = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$



40 - Principe fondamental de la dynamique au système voiture étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = -m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

Projection selon \vec{u}_z : $\|\vec{N}\| = mg$;

Projection selon \vec{u}_r : $\vec{T} \cdot \vec{u}_r = -m \frac{v^2}{R}$: il existe bien une force avec une composante radiale.

Projection selon \vec{u}_θ : $\vec{T} \cdot \vec{u}_\theta = 0$ en l'absence de composante orthoradiale de l'accélération.

On a donc $\vec{T} = -\|\vec{T}\| \vec{u}_r = -m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r$: la composante normale correspond à la réaction tangentielle exercée par la route

41 - Condition de non glissement : $\|\vec{T}\| < \lambda \|\vec{N}\| \Leftrightarrow m \frac{v^2}{R} < \lambda mg$

$$v < v_{max} = \sqrt{\lambda R g}$$

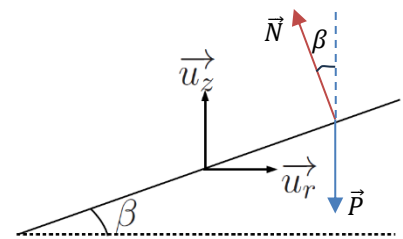
A.N. : $v_{max} = 18,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 67,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

42 - Si le virage est mouillé, ou verglacé, le coefficient de frottement **diminue, ainsi que la vitesse v_{max}** . Si ce coefficient tend vers zéro, v_{max} **tend également vers zéro**. En l'absence de frottements, impossible de tourner sans glisser.

43 - Bilan des actions mécaniques extérieures : il reste seulement le poids et la réaction normale en l'absence de frottement (voir schéma ci-contre).

En l'absence d'accélération selon \vec{u}_z , par projection du PFD sur \vec{u}_z , on a à

$$\text{présent : } mg = \|\vec{N}\| \cos \beta$$



44 - Projection du PFD sur l'axe radial \vec{u}_r , en exploitant ensuite $mg = \|\vec{N}\| \cos \beta$:

$$-m \frac{v^2}{R} = -\|\vec{N}\| \sin(\beta) = -\frac{mg}{\cos \beta} \sin(\beta)$$

$$\text{Soit } v = \sqrt{Rg \tan(\beta)}$$

A.N. : $v = 13,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 48,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Pour retrouver la vitesse $v_{max} = \sqrt{\lambda R g}$ obtenue précédemment, il faut

$$\beta = \text{Arctan} \left(\frac{v_{max}^2}{Rg} \right) = \text{arctan}(\lambda)$$

A.N. : $\beta = 35^\circ$

PROBLEME N°4 : ANALYSE DE FOURIER ET ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL ELECTRONIQUE (CMP PSI 2022)