

Colle N°4 : 05 au 09 Octobre 2026■ **Au programme des exercices**

- **Révisions de mécanique de MP2I** (**attention !** pas encore de particules chargées, de forces centrales ni de mécanique du solide !)
- **Chapitre CHIM1** : Systèmes chimiques, réaction chimique, constante d'équilibre thermodynamique et loi d'action de masse. Application à la détermination du sens d'évolution d'un système et à la recherche de son état final. Ruptures d'équilibre, formulation d'hypothèse sur le caractère très peu avancé ou quasi-total d'une réaction.

**Si les réactions avec solides peuvent être étudiées, les notions de solubilité ou de constante de solubilité sont hors-programme.**

**Les réactions acido-basiques n'ont pas encore été traitées (les  $K_a$ ,  $K_e$ , pH etc. ne sont pas encore définis)**

**Pas d'exercice avec des mélanges gazeux**

■ **Questions de cours seules**

1. ♥ Déterminer la masse de soude  $\text{NaOH}_{(s)}$  (sel dont la dissociation est totale dans l'eau) à utiliser pour préparer 50 mL d'une solution à 0,1 mol/L en ions hydroxyde  $\text{HO}^-$ . Donner les activités des ions hydroxydes  $\text{HO}^-$  et de l'eau.

Données :  $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M(\text{Na}) = 23 \text{ g.mol}^{-1}$

2. ♥ On mélange un volume  $V_1 = 10 \text{ mL}$  d'une solution de chlorure de magnésium  $\text{MgCl}_2$  entièrement dissous pour donner des ions magnésium  $\text{Mg}^{2+}$  et des ions chlorure  $\text{Cl}^-$ , de concentration  $c_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  et un volume  $V_2 = 20 \text{ mL}$  d'une solution de chlorure de potassium  $\text{KCl}$  entièrement dissous pour donner des ions sodium  $\text{K}^+$  et des ions chlorure  $\text{Cl}^-$ , de concentration  $c_2 = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$ . Calculer les concentrations dans le mélange.

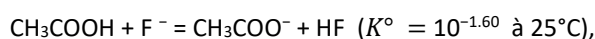
3. ♥ Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ( $[\text{H}^+] = \text{cte}$ ) :



Dresser le tableau d'avancement et déterminer l'état final du système.

4. Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

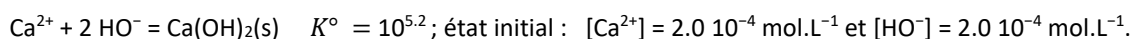
- 1) ♥ Réaction acido-basique entre l'acide éthanoïque et les ions fluorure :



- a) ♥ Conditions initiales :  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ ,  $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$ ,  $[\text{F}^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[\text{HF}] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$ .

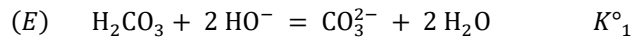
- b) ♥ Conditions initiales :  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1} = [\text{F}^-]$ ,  $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[\text{HF}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ .

- 2) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2(s)$  :



5. a- ♥ Indiquer comment obtenir la constante d'équilibre d'une réaction étant la combinaison linéaire de réactions de constantes d'équilibre connues. Traiter les cas particuliers d'une réaction inverse et d'une réaction dont on double les coefficients stœchiométriques.

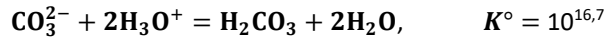
b- Exprimer la constante d'équilibre  $K^\circ_1$  de la réaction d'équation-bilan ci-dessous :



Données :

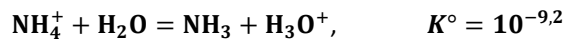
- (1)  $\text{H}_2\text{CO}_3 + \text{H}_2\text{O} = \text{HCO}_3^- + \text{H}_3\text{O}^+ \quad K_{a1} = 10^{-6,3}$   
 (2)  $\text{HCO}_3^- + \text{H}_2\text{O} = \text{CO}_3^{2-} + \text{H}_3\text{O}^+ \quad K_{a2} = 10^{-10,3}$   
 (3)  $2 \text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^- \quad K_e = 10^{-14}$

6. ♥ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :



La concentration initiale en ions carbonate est de  $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  et celle en ions oxonium est de  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

7. ♥ On met en solution des ions ammonium à la concentration de  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :



Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

8. ♥ Calculer la charge totale portée par :

- 1) un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec une densité superficielle de charge  $\sigma$ .
- 2) Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho$ .
- 3) Une boule de rayon  $R$  chargée avec une densité volumique de charge variant avec la distance  $r$  au centre de la boule :  $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$  pour  $r \leq R$  et  $\rho(r) = 0$  pour  $r \geq R$ .

9. ♥ On s'intéresse au champ électrostatique créé en  $M(x, y, z)$  par le plan  $Oxy$  chargé uniformément avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . Etudier les symétries et invariances de la distribution et en déduire les caractéristiques du champ électrostatique créé en un point  $M$  quelconque.

10. ♥ Considérons un signal créneau de fréquence  $f_0 = 2 \text{ kHz}$ , décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3} \sin(2\pi 3f_0 t) + \frac{A}{5} \sin(2\pi 5f_0 t) + \frac{A}{7} \sin(2\pi 7f_0 t).$$

Ce signal est échantillonné à  $f_e = 15 \text{ kHz}$ . Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

11. On étudie une fonction continue et monotone  $f(x)$  sur un intervalle  $[a; b]$  telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signes opposés. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur  $x_0$  telle  $f(x_0) = 0$ ) et proposer le code en python.

## ■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. Déterminer la masse de soude  $\text{NaOH}_{(s)}$  (sel dont la dissociation est totale dans l'eau) à utiliser pour préparer 50 mL d'une solution à 0,1 mol/L en ions hydroxyde  $\text{HO}^-$ . Donner les activités des ions hydroxydes  $\text{HO}^-$  et de l'eau.

Données :  $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M(\text{Na}) = 23 \text{ g.mol}^{-1}$

dissociation de  $n_0$  moles du sel dans l'eau :



$$\text{E.F.} : n_F(\text{HO}^-) = n_0 \text{ et } [\text{HO}^-]_{\text{eq}} = \frac{n_0}{V} = 0,1 \text{ mol/L}$$

$$\text{Nombre } n_0 = V [\text{HO}^-]_{\text{eq}} \text{ de moles de NaOH introduites dans la solution : } n_0 = \frac{m_{\text{NaOH}}}{M(\text{NaOH})}$$

avec  $M(\text{NaOH}) = M(\text{Na}) + M(\text{O}) + M(\text{H}) = 40 \text{ g/mol}$  :

$$m_{\text{NaOH}} = n_0 M(\text{NaOH}) = V [\text{HO}^-]_{\text{eq}} M(\text{NaOH})$$

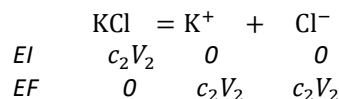
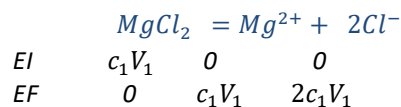
$$\text{A.N.} : m_{\text{NaOH}} = 0,05 * 0,1 * 40 = 0,2 \text{ g}$$

$$a_{\text{OH}} = \frac{[\text{HO}^-]}{C^\circ} = 0,1 \quad a_{\text{eau}} = a_{\text{solvant}} = 1$$

2. ❤ On mélange un volume  $V_1 = 10 \text{ mL}$  d'une solution de chlorure de magnésium  $\text{MgCl}_2$  entièrement dissous pour donner des ions magnésium  $\text{Mg}^{2+}$  et des ions chlorure  $\text{Cl}^-$ , de concentration  $c_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  et un volume  $V_2 = 20 \text{ mL}$  d'une solution de chlorure de potassium  $\text{KCl}$  entièrement dissous pour donner des ions sodium  $\text{K}^+$  et des ions chlorure  $\text{Cl}^-$ , de concentration  $c_2 = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$ . Calculer les concentrations dans le mélange.

**Éléments de réponse :**

Réactions de dissolution :



Les concentrations correspondent par définition au nombre de mole du soluté considéré sur le volume total, soit ici :

$$[\text{Mg}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{Mg}^{2+}, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_1 V_1}{V_1 + V_2} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L} \quad [\text{K}^+]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{K}^+, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,1 \text{ mol/L}$$

Les ions chlorure sont apportés par les deux solides :

$$[\text{Cl}^-]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{Cl}^-, \text{eq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{2c_1 V_1 + c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$$

3. ❤ Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ( $[\text{H}^+] = \text{cte}$ ) :



Dresser le tableau d'avancement et déterminer l'état final du système.

**Éléments de réponse :**

|              | avancement<br>(mol) | $\text{IO}_3^-$ | + | $5 \text{I}^-$ | + | $6\text{H}^+$ | = | $3 \text{I}_2$ | + | $3 \text{H}_2\text{O}$ |
|--------------|---------------------|-----------------|---|----------------|---|---------------|---|----------------|---|------------------------|
| Etat initial | 0                   | 0,1             |   | 0,2            |   | Cte           |   | 0              |   | 0                      |

|                                |             |                     |                     |     |                        |                        |
|--------------------------------|-------------|---------------------|---------------------|-----|------------------------|------------------------|
| $A t$                          | $\xi$       | $0,1 - \xi$         | $0,2 - 5 \xi$       | Cte | $3\xi$                 | $3\xi$                 |
| $A t_{\infty}$<br>(état final) | $\xi_{max}$ | $0,1 - \xi_{max}$   | $0,2 - 5 \xi_{max}$ | Cte | $3 \xi_{max}$          | $3 \xi_{max}$          |
|                                | 16          | $0,1 - 0,04 = 0,06$ | 0                   | Cte | $3 \times 0,04 = 0,12$ | $3 \times 0,04 = 0,12$ |

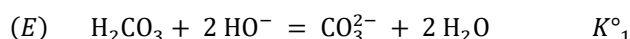
Si  $IO_3^-$  est l'espèce limitante, dans l'état final  $0,1 - \xi_{max,1} = 0$  soit  $\xi_{max,1} = 0,1 \text{ mol}$  ;

Si  $I^-$  est l'espèce limitante, dans l'état final  $0,2 - 5\xi_{max,2} = 0$  soit  $\xi_{max,2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} < \xi_{max,1} = 0,1 \text{ mol}$  ;

C'est donc  $I^-$  qui est l'espèce limitante, avec  $\xi_{max,2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} = 0,04 \text{ mol}$

4. a- ♥ Indiquer comment obtenir la constante d'équilibre d'une réaction étant la combinaison linéaire de réactions de constantes d'équilibre connues. Traiter les cas particuliers d'une réaction inverse et d'une réaction dont on double les coefficients stœchiométriques.

b- Exprimer la constante d'équilibre  $K^\circ_1$  de la réaction d'équation-bilan ci-dessous :



Données :

- (1)  $H_2CO_3 + H_2O = HCO_3^- + H_3O^+ \quad K_{a1} = 10^{-6,3}$   
(2)  $HCO_3^- + H_2O = CO_3^{2-} + H_3O^+ \quad K_{a2} = 10^{-10,3}$   
(3)  $2 H_2O = H_3O^+ + HO^- \quad K_e = 10^{-14}$

- a- ♥ Si l'équation bilan (E) est une combinaison linéaire d'équations ( $E_j$ ) telle que  $(E) = \sum \alpha_j (E_j)$ , sa constante d'équilibre  $K^\circ$  s'exprime en fonction des constantes d'équilibre  $K^\circ_j$  relatives aux réactions d'équation ( $E_j$ ) selon :

$$K^\circ = \prod_j K_j^{\alpha_j}$$

et en particulier :

pour une réaction inverse d'une réaction de constante  $K^\circ$  :  $(E') = -(E) \Rightarrow K'^{\circ} = (K^\circ)^{-1} = \frac{1}{K^\circ}$

pour une réaction (E) :  $0 = \sum \nu_i B_i$  de constante  $K^\circ$  dont on double les  $\nu_i$  :  $(E') : 0 = \sum 2\nu_i B_i \Rightarrow K'^{\circ} = K^{\circ 2}$

b- Méthode N°1 : Par combinaison linéaire :  $(E) = (1) + (2) - 2 \times (3)$  or

Ici, on a donc

$$K^\circ_1 = \frac{K_{a1} K_{a2}}{K_e^2} = 10^{11,4} = 2,5 \cdot 10^{11}$$

Méthode N°2 : on peut retrouver cette relation en exploitant les L.A.M. pour retrouver  $K^\circ_1 = \frac{K_{a1} K_{a2}}{K_e^2}$

Avec L.A.M. :

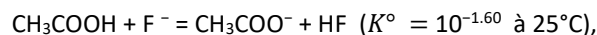
$$K^\circ_1 = \frac{a_{\text{éq}}(CO_3^{2-}) a_{\text{éq}}(H_2O)^2}{a_{\text{éq}}(H_2CO_3) a_{\text{éq}}(HO^-)^2} \underset{\substack{a_{(H_2O)}=1 \\ (\text{solvant})}}{=} \frac{a_{\text{éq}}(CO_3^{2-})}{a_{\text{éq}}(H_2CO_3) a_{\text{éq}}(HO^-)^2}$$

et

$$K_{a1} = \frac{a_{\text{éq}}(HCO_3^-) a_{\text{éq}}(H_3O^+)}{a_{\text{éq}}(H_2CO_3) \times 1} \quad K_{a2} = \frac{a_{\text{éq}}(CO_3^{2-}) a_{\text{éq}}(H_3O^+)}{a_{\text{éq}}(HCO_3^-) \times 1} \quad K_e = \frac{a_{\text{éq}}(H_3O^+) a_{\text{éq}}(HO^-)}{1}$$

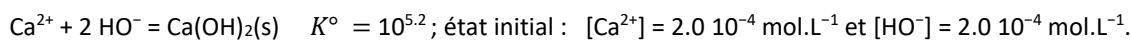
5. Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

- 1) ♥ Réaction acido-basique entre l'acide éthanoïque et les ions fluorure :



- c) ♥ Conditions initiales :  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ ,  $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$ ,  $[\text{F}^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[\text{HF}] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$ .
- d) ♥ Conditions initiales :  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1} = [\text{F}^-]$ ,  $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[\text{HF}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ .

2) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2(\text{s})$  :



**Eléments de réponse :**

- 1) a) On a  $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 0 < K^\circ$  : Evolution dans le sens direct

| Bilan en concentrations | $\text{CH}_3\text{COOH}$ | + | $\text{F}^-$      | = | $\text{HF}$ | + | $\text{CH}_3\text{COO}^-$ |
|-------------------------|--------------------------|---|-------------------|---|-------------|---|---------------------------|
| E.I.                    | $c_0$                    |   | $c_0$             |   | 0           |   | 0                         |
| E.F.                    | $c_0(1 - \alpha)$        |   | $c_0(1 - \alpha)$ |   | $c_0\alpha$ |   | $c_0\alpha$               |

L.A.M. :  $K^\circ = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{éq}} \cdot [\text{HF}]_{\text{éq}}}{[\text{F}^-]_{\text{éq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{éq}}} = \frac{(c_0\alpha)^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$  d'où  $\alpha = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = 13,7\%$

b) On a  $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 1 > K^\circ = 10^{-1.6}$

Evolution dans le sens indirect :

on peut par exemple considérer la réaction inverse de constante  $K'^{\circ} = \frac{1}{K^\circ} = 10^{+1.6}$

| Bilan en concentrations | $\text{CH}_3\text{COO}^-$ | + | $\text{HF}$       | = | $\text{F}^-$      | + | $\text{CH}_3\text{COOH}$ |
|-------------------------|---------------------------|---|-------------------|---|-------------------|---|--------------------------|
| E.I.                    | $c_0$                     |   | $c_0$             |   | $c_0$             |   | $c_0$                    |
| E.F.                    | $c_0(1 - \alpha)$         |   | $c_0(1 - \alpha)$ |   | $c_0(1 + \alpha)$ |   | $c_0(1 + \alpha)$        |

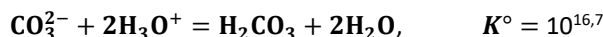
L.A.M. :  $K'^{\circ} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{éq}} \cdot [\text{F}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HF}]_{\text{éq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{éq}}} = \frac{(c_0(1+\alpha))^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$  d'où  $1 + \alpha = \sqrt{K'^{\circ}}(1 - \alpha)$  soit

$$\alpha = \frac{\sqrt{K'^{\circ}} - 1}{1 + \sqrt{K'^{\circ}}} = 72,6\%$$

2)  $Q_{r,0} = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]_0^2} = \frac{1}{2.10^{-4} \times 4.10^{-8}} = \frac{1}{8} 10^{12} > K^\circ = 10^{5.2}$  :

évolution dans le sens indirect, or en l'absence de produit dans l'état initial, absence de réaction : il ne se passe rien.

6. ♥ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :



La concentration initiale en ions carbonate est de  $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  et celle en ions oxonium est de  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

**Eléments de réponse :**

Absence de réactifs dans l'état initial,  $Q_r = 0$ , avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

| Bilan en mol /L | $\text{CO}_3^{2-}$ | + | $2\text{H}_3\text{O}^+$ | = | $\text{H}_2\text{CO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$ |
|-----------------|--------------------|---|-------------------------|---|-----------------------------------------------|
| E.I.            | $10^{-3}$          |   | $10^{-2}$               |   | 0 /                                           |
| E.F.            | $10^{-3} - x$      |   | $10^{-2} - 2x$          |   | $x$ /                                         |
| E.F. approché   | $\varepsilon$      |   | $8.10^{-3}$             |   | $10^{-3}$ /                                   |

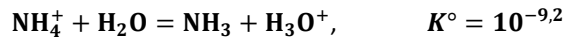
Avec  $K^\circ = 10^{16,7} \gg 1$ , on peut faire l'hypothèse d'une réaction quasi-totale, avec consommation complète du réactif limitant, soit ici  $x \approx 10^{-3} \text{ mol/L}$  et  $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3} \text{ mol/L}$

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K^\circ = \frac{[\text{H}_2\text{CO}_3] \times 1}{[\text{CO}_3^{2-}] \times [\text{H}_3\text{O}^+]^2} = \frac{x}{(10^{-3} - x)(10^{-2} - 2x)^2} \approx \frac{10^{-3}}{\varepsilon(8 \cdot 10^{-3})^2} = 10^{16,7}$$

Soit  $\varepsilon = \frac{10^{-13,7}}{64} = 3,1 \cdot 10^{-16} \text{ mol/L}$  : on a bien  $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3} \text{ mol/L}$ , hypothèse validée.

7. ❤ On met en solution des ions ammonium à la concentration de  $10^{-2} \text{ mol/L}^1$ . Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :



Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

**Éléments de réponse :**

Absence de réactifs dans l'état initial,  $Q_r = 0$ , avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

| Bilan en mol /L | $\text{NH}_4^+$ | + | $\text{H}_2\text{O}$ | = | $\text{NH}_3$ | + | $\text{H}_3\text{O}^+$ |
|-----------------|-----------------|---|----------------------|---|---------------|---|------------------------|
| E.I.            | $10^{-2}$       |   | /                    |   | 0             |   | 0                      |
| E.F.            | $10^{-2} - x$   |   | /                    |   | $x$           |   | $x$                    |
| E.F. approché   | $10^{-2}$       |   | /                    |   | $\varepsilon$ |   | $\varepsilon$          |

Avec  $K^\circ = 10^{-9,2} \ll 1$ , on peut faire l'hypothèse d'une réaction très peu avancée, soit ici  $10^{-2} - x \approx 10^{-2} \text{ mol/L}$  et  $x = \varepsilon \ll 10^{-2} \text{ mol/L}$

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K_s = \frac{[\text{NH}_3] \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{NH}_4^+] \times 1} = \frac{x^2}{(10^{-2} - x)} \approx \frac{\varepsilon^2}{10^{-2}} = 10^{-9,2}$$

Soit  $\varepsilon = 10^{-5,6} \text{ mol/L} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol/L}$

On a bien  $\varepsilon \ll 10^{-2} \text{ mol/L}$  hypothèse validée.

8. ❤ Calculer la charge totale portée par :

- 4) un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec une densité superficielle de charge  $\sigma$ .
- 5) Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho$ .
- 6) Une boule de rayon  $R$  chargée avec une densité volumique de charge variant avec la distance  $r$  au centre de la boule :  $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$  pour  $r \leq R$  et  $\rho(r) = 0$  pour  $r \geq R$ .

9. ❤ On s'intéresse au champ électrostatique créé en  $M(x, y, z)$  par le plan  $Oxy$  chargé uniformément avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . Etudier les symétries et invariances de la distribution et en déduire les caractéristiques du champ électrostatique créé en un point  $M$  quelconque.

10. ❤ Considérons un signal créneau de fréquence  $f_0 = 2 \text{ kHz}$ , décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3} \sin(2\pi 3f_0 t) + \frac{A}{5} \sin(2\pi 5f_0 t) + \frac{A}{7} \sin(2\pi 7f_0 t).$$

Ce signal est échantillonné à  $f_e = 15 \text{ kHz}$ . Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

**Composantes du signal :** pics à  $f_0, 3f_0, 5f_0$  et  $7f_0$  d'amplitudes respectives  $A, \frac{A}{3}, \frac{A}{5}$  et  $\frac{A}{7}$

**Réplication du spectre** : entre 0 et 15 kHz, fréquences supplémentaires à  $f_e - 7f_0 = 1$  kHz (amplitude  $\frac{A}{7}$ )  $f_e - 5f_0 = 5$  kHz (amplitude  $\frac{A}{5}$ ),  $f_e - 3f_0 = 9$  kHz (amplitude  $\frac{A}{3}$ ) ,  $f_e - f_0 = 14$  kHz (amplitude  $A$ ) : **phénomène de recouvrement** entre les composantes du spectre du signal analogique et celles associées à ses répliques, menant dans la plage  $f < f_N = f_e/2$  à la présence de « fausses fréquences » ou fréquences « fantômes » (repliement spectral).

Critère de Shannon : il faut au minimum  $f_e > 2f_{\max} = 2 \times 7f_0 = 28$  kHz

11. On étudie une fonction continue et monotone  $f(x)$  sur un intervalle  $[a; b]$  telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signes opposés. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur  $x_0$  telle  $f(x_0) = 0$ ) et proposer le code en python.

Comme  $f$  est continue et change de signe entre  $a$  et  $b$ , elle s'annule dans  $[a; b]$  (théorème des valeurs intermédiaires). On se donne les bornes  $a$  et  $b$  de l'intervalle de recherche et une précision  $\varepsilon$ .

Tant que  $|a - b| > \varepsilon$ , on réalise la boucle suivante :

On définit le milieu de l'intervalle :  $m = \frac{a+b}{2}$

→ Si  $f(a) \times f(m) \leq 0$ ,  $f$  change de signe entre  $a$  et  $m$  : la solution appartient à  $[a, m]$

nouvel intervalle de recherche :  $a = a$  et  $b = m$  (on réaffecte  $b \leftarrow m$ )

→ sinon :  $f(a) \times f(m) > 0$ ,  $f(a)$  et  $f(m)$  ont le même signe, donc  $f$  change de signe entre  $m$  et  $b$  : la solution appartient à  $[m, b]$ , donc on réaffecte  $a \leftarrow m$

nouvel intervalle de recherche :  $a = m$  ( $a \leftarrow m$ ) et  $b = b$ .

À chaque étape l'intervalle contient toujours le zéro et sa largeur est divisée par 2.

La boucle se poursuit tant que  $m$  n'est pas suffisamment proche de la valeur recherchée, soit tant que

$$|a - b| > \varepsilon$$

Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de  $m$ , à  $\varepsilon/2$  près.

```
def dichotomie(f, a, b, eps):
    """zéro de f sur [a, b] ; on suppose f(a)*f(b) < 0"""
    g, d = a, b
    while d - g > eps:
        m = (g + d) / 2
        if f(g) * f(m) > 0: # même signe en g et m : le zéro est dans [m, d]
            g = m
        else: # changement de signe (ou f(m) = 0) : le zéro est dans [g, m]
            d = m
    return (g + d) / 2
```

