COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2026-2027

Colle N°6 : 02 au 06 Novembre 2026

Au programme des exercices

→ **Révisions de mécanique de MP2I – mécanique du solide** (**attention !** pas encore de particules chargées ni de forces centrales !)

→ **Révisions de thermodynamique de MP2I**

→ **Révisions d'induction de MP2I** **Attention ! Pas encore d'exercices faisant intervenir des moments magnétiques**

→ **Chapitre EM1 : Electrostatique -** Distribution de charges, Champ $\vec{E}$, théorème de Gauss de l'électrostatique et de la gravitation, potentiel électrostatique, équations de Maxwell relatives au champ électrostatique et équations de Poisson et Laplace, cartes de champ et équipotentielles.

Les condensateurs ne sont pas abordés dans ce chapitre.

Questions de cours seules

1. ❤️ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3}\sin(2\pi\, 3f_0 t) + \frac{A}{5}\sin(2\pi\, 5f_0 t) + \frac{A}{7}\sin(2\pi\, 7f_0 t)\,.$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

2. On étudie une fonction continue et monotone $f(x)$ sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur x_0 telle $f(x_0) = 0$) et proposer le code en python.

3. ❤️ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

4. ❤️ Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes

5. ❤️ Une masse m d'eau passe de l'état solide à −10°C à l'état liquide à +10°C sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334\ kJ.kg^{-1}$ à $0°C$ sous $1\ atm$

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}2\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

6. Un ballon d'eau chaude d'un volume de $10{,}0\ \mathrm{m}^3$ contient $169\ \mathrm{kg}$ d'eau sous $10{,}0\ \mathrm{bar}$.

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante

$P = 10\ \mathrm{bar}$

$\theta = 179{,}86°C$

Volume massique		**Enthalpie massique**	
liquide	vapeur	liquide	vapeur
$v_l\ (\mathrm{m^3.kg^{-1}})$	$v_v\ (\mathrm{m^3.kg^{-1}})$	$h_l\ (\mathrm{kJ.kg^{-1}})$	$h_v\ (\mathrm{kJ.kg^{-1}})$
$1{,}127.10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

a) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.

b) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à $\theta = 179{,}86°C$ ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de $10{,}0$ bar.

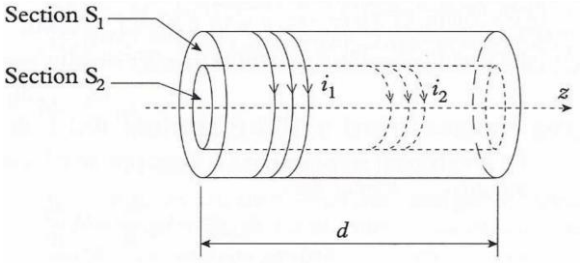
7. A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

8. ❤️ Rappeler les principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1er principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

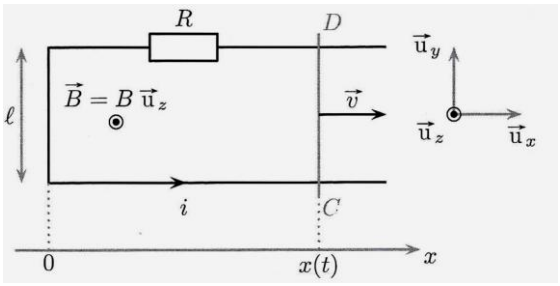
9. ❤️ Enoncer la condition d'équilibre d'un solide. Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe : rappeler les principales analogies avec un point en translation, puis énoncer le théorème du moment cinétique scalaire.

10. Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

11. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.



12. ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



13. Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0\left(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\overrightarrow{e_y}\right)$$

Une spire de surface S est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan (Oyz). La spire se comportant comme une résistance R, établir l'expression du courant i qui la parcourt.

14. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

15. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

16. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

17. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

18. ❤️ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

19. ❤️ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

20. **Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Retrouver le théorème de Gauss à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

21. **Enoncer l'équation de Maxwell-Faraday et donner son expression dans le cadre de l'électrostatique. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Etablir le passage à la formulation intégrale de cette équation et indiquer la conséquence associée.

22. a) Rappeler les principales caractéristiques des cartes de champs et de potentiels électrostatiques.

b) ** Faire le lien entre ces caractéristiques et les équations locales.

23. Soit une distribution de charge de densité volumique de charge $\rho(r) \approx -\frac{2q^2 n_0 V(r)}{k_B T}$, créant un champ de potentiel électrostatique $V(\mathrm{r})$. Montrer qu'il est de la forme $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\delta}}$ où A est une constante.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤️ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3}\sin(2\pi\, 3f_0 t) + \frac{A}{5}\sin(2\pi\, 5f_0 t) + \frac{A}{7}\sin(2\pi\, 7f_0 t)\,.$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

> ***Composantes du signal : pics à*** $f_0, 3f_0, 5f_0$ *et* $7f_0$ *d'amplitudes respectives A,* $\frac{A}{3}, \frac{A}{5}$ *et* $\frac{A}{7}$
>
> ***Réplication du spectre :*** *entre 0 et 15 kHz, fréquences supplémentaires à* $f_e - 7f_0 = 1$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{7}$*)* $f_e - 5f_0 = 5$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{5}$*),* $f_e - 3f_0 = 9$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{3}$*)* , $f_e - f_0 = 14$ *kHz (amplitude* A*) :* ***phénomène de recouvrement*** *entre les composantes du spectre du signal analogique et celles associées à ses répliques, menant dans la plage* $f < f_N = f_e/2$ *à la présence de « fausses fréquences » ou fréquences « fantômes » (repliement spectral).*
>
> *Critère de Shannon : il faut au minimum* $\boldsymbol{f_e > 2f_{max} = 2 \times 7f_0 = 28}$ ***kHz***

2. On étudie une fonction continue et monotone $f(x)$ sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur x_0 telle $f(x_0) = 0$) et proposer le code en python.

Comme f est continue et change de signe entre a et b, elle s'annule dans [a ; b] (théorème des valeurs intermédiaires). On se donne les bornes a et b de l'intervalle de recherche et une précision ε.

Tant que $|a - b| > \varepsilon$, on réalise la boucle suivante :

On définit le milieux de l'intervalle : $m = \frac{a+b}{2}$

→ Si $f(a) \times f(m) \leq 0$, f change de signe entre a et m : la solution appartient à $[a, m]$

nouvel intervalle de recherche : $a = a$ et $b = m$ (on réaffecte $b \leftarrow m$)

→ sinon : $f(a) \times f(m) > 0$, f(a) et f(m) ont le même signe, donc f change de signe entre m et b : la solution appartient à $[m, b]$, donc on réaffecte $a \leftarrow m$

nouvel intervalle de recherche : $a = m$ $(a \leftarrow m)$ et $b = b$.

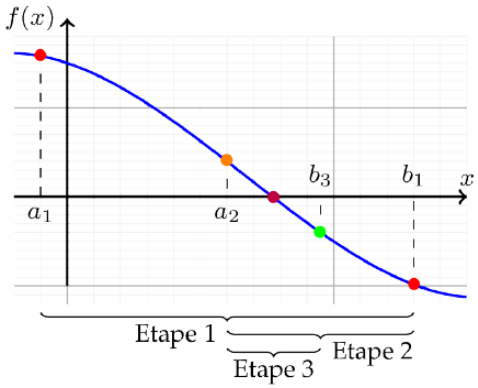
À chaque étape l'intervalle contient toujours le zéro et sa largeur est divisée par 2.

La boucle se poursuit tant que m n'est pas suffisamment proche de la valeur recherchée, soit tant que

$$|a - b| > \varepsilon$$

Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de m, à $\varepsilon/2$ près.

```
def dicho(f, a, b, eps):
    """zéro de f sur [a, b] ; on suppose f(a)*f(b) < 0"""
    g, d = a, b
    while d - g > eps:
        m = (g + d)/2
        if f(g)*f(m) > 0:   # même signe en g et m : le zéro est dans [m, d]
            g = m
        else:               # changement de signe (ou f(m) = 0) : le zéro est dans [g, m]
            d = m
    return (g + d)/2
```



3. ❤️ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace : $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$\Delta U_{12} \underbrace{=}_{1er\ principe} W_{12} + Q_{12}$ *avec* $Q_{12} = 0$ *car la transformation est adiabatique, et*

$\Delta U_{12} \underbrace{=}_{G.P.} \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$

4. ❤️ Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes

Second principe de la thermodynamique : Pour tout système, on peut définir une entropie $\boldsymbol{S} > \boldsymbol{0}$ qui est une fonction d'état extensive et non conservative, indiquant l'importance du désordre / manque d'information telle que :

Bilans d'entropie (hors programme ATS) : $\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{éch} + \boldsymbol{S}_{créée}$

L'entropie S est une grandeur telle que l'entropie créée $S_{créée} \geq \boldsymbol{0}$, avec $S_{créée} = \boldsymbol{0}$ pour une transformation réversible

$S_{créée} > 0$ pour une transformation irréversible

Echanges d'entropie : ils ont lieu par le biais d'éventuels échanges de matière et/ou d'énergie thermique avec le milieu extérieur. Au cours d'une transformation quelconque pendant laquelle un système fermé reçoit des transferts thermiques Q_i de la part de thermostats (sources de chaleur) aux températures T_i, $S_{éch} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$

Dimension et unité de l'entropie : J/K

5. ❤️ Une masse m d'eau passe de l'état solide à $-10°C$ à l'état liquide à $+10°C$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334\ kJ.kg^{-1}$ à $0°C$ sous $1\ atm$

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}2\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

Transformation isobare en l'absence de travail autre que celui des forces de pression : $\Delta H = Q$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer les étapes suivantes :

Etape 1 : solide réchauffé de θ_i à θ_0 où $\theta_0 = 0°C = \theta_{fus}$ température de fusion à pression atmosphérique ;

Etape 2 : solide totalement fondu à la température θ_0,

Etape 3 : liquide obtenu chauffé de θ_0 à θ_f, soit :

$$\Delta H = m\left(c_s(\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l(\theta_f - \theta_0)\right) = Q$$

6. Un ballon d'eau chaude d'un volume de $10{,}0\ \text{m}^3$ contient $169\ \text{kg}$ d'eau sous $10{,}0\ \text{bar}$.

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante

$P = 10\ \text{bar}$

$\theta = 179{,}86°C$

Volume massique		Enthalpie massique	
liquide	vapeur	liquide	vapeur
$v_l\ (\text{m}^3.\text{kg}^{-1})$	$v_v\ (\text{m}^3.\text{kg}^{-1})$	$h_l\ (\text{kJ}.\text{kg}^{-1})$	$h_v\ (\text{kJ}.\text{kg}^{-1})$
$1{,}127.10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

c) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.

d) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à $\theta = 179{,}86°C$ ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de $10{,}0\ \text{bar}$.

7. A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

Exemple du moteur : Bilan issu du 1er principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta U_{cycle} = W + Q_{ch} + Q_{fr} \underbrace{=}_{\substack{Cycle+ \\ U\ fonction\ d'état}} 0$ (1)

Bilan issu du 2nd principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta S = S_e + S_c \underbrace{=}_{\substack{Cycle+ \\ S\ fonction\ d'état}} 0$ avec d'après le second principe,

$S_c \geq 0$, égalité pour une transformation réversible. Il s'agit d'un moteur ditherme, échanges de chaleur avec deux sources aux températures T_{fr} et T_{ch}, d'où : $S_e = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}}$, soit $\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0$ (2) ; inégalité de Clausius.

Expression de l'efficacité d'un moteur thermique : $\eta_{moteur} = \left|\frac{grandeur\ d'intérêt}{grandeur\ de\ coût}\right| = \frac{-W}{Q_{ch}}$ (3)

Or d'après (1), $-W = Q_{ch} + Q_{fr}$ soit dans (3) : $\eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$.

D'après (2) : $\frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq -\frac{T_{fr}}{T_{ch}}$. *soit* : $\eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

Efficacité de Carnot : $\boxed{\eta_{carnot,m} = \mathbf{1} - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}}$

obtenue pour un fonctionnement ***réversible,*** *correspondant à* ***l'efficacité maximale*** *pouvant être atteinte.*

8. ❤️ Compléter le tableau des principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1er principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

Machine cyclique ditherme	**Moteur**	**Réfrigérateur**	**Pompe à chaleur**
Formes du premier principe sur un cycle pour les machines cycliques dithermes $\Delta U_{cycle} \underbrace{=}_{\substack{cycle+ \\ U\ fonction\ d'état}} 0 \underbrace{=}_{1er\ principe} W + Q_c + Q_f \Leftrightarrow \mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{th,c} + \mathcal{P}_{th,f} \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ +cycle+ \\ U\ fonction\ d'état}} 0$			
Signe du travail reçu W reçu par le système	$W < 0$	$W > 0$	$W > 0$
Signe de la quantité de chaleur Q_f reçue en provenance de la source froide	$Q_f < 0$	$Q_f > 0$	$Q_f > 0$
Signe de la quantité de chaleur Q_c reçue en provenance de la source chaude	$Q_c > 0$	$Q_c < 0$	$Q_c < 0$
Expression de l'efficacité *expression toujours vérifiée*	$e_m = r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{-\mathcal{P}_{méca}}{\mathcal{P}_{th,c}}$	$e_{frig} = CoP_{frig} = \frac{Q_f}{W} = \frac{\mathcal{P}_{th,f}}{\mathcal{P}_{méca}}$	$e_{PAC} = CoP_{PAC} = -\frac{Q_c}{W} = -\frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{mé}}$
Efficacité de Carnot = efficacité théorique maximale vérifiée dans le cas d'un cycle réversible	$e_{mot,c} = r_{mot,c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$	$e_{frig,max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_{PAC,max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

9. ❤️ Enoncer la condition d'équilibre d'un solide. Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe : rappeler les principales analogies avec un point en translation, puis énoncer le théorème du moment cinétique scalaire.

Condition d'équilibre d'un solide

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ **ET** $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext/O}} = \vec{0}$ (avec des vitesses initiales nulles)

Loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe $\Delta = (Oz)$ fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à N actions mécaniques de moment $\mathcal{M}_{\Delta,n}(1 \leq n \leq N)$ par rapport à cet axe :

$$\left.\frac{dL_\Delta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{M}_{\Delta,n} = \mathcal{M}_{ext/\Delta} \quad \text{avec } L_\Delta = J_\Delta\,\omega \quad \text{donc} \quad J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{ext/\Delta}$$

Equivalence entre les variables translation et les variables rotation

translation	X	$\dot{X} = v$	$a \doteq v = \ddot{X}$	m	$p = mv$	$½\, mv^2$	F	$m\ddot{X} = F$	$\mathcal{P} = Fv$
Rotation par rapport à un axe Δ	θ	$\dot{\theta} = \omega$	$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$	J_Δ	$L_{/\Delta} = J_\Delta\,\omega$	$½\, J_\Delta \omega^2$	$\mathcal{M}_{/\Delta}$	$J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{/\Delta}$	$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{/\Delta}\omega$

10. Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

On suppose la bobine parcourue par un courant I (attention ! il faut l'orienter !) ; le champ magnétique créé par ce courant est $\vec{B}_{int} = \mu_0 nI\,\vec{e_z}$ à l'intérieur de la bobine.

Orienter $d\vec{S}$ avec I.

> $\vec{B}_{int}$ et $d\vec{S}$ sont nécessairement dans le même sens, imposé par l'orientation de I.

Calcul du flux de ce champ à travers une spire de la bobine est $\Phi_1 = \iint_{1\ spire} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 nIS = \frac{\mu_0 NIS}{\ell}$

Le flux de ce champ à travers les N spires de la bobine est $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 IS}{\ell}$

L'inductance de la bobine longue est : $L = \frac{\Phi}{I}$

$$\boldsymbol{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}} = 0{,}25 \text{ mH}$$

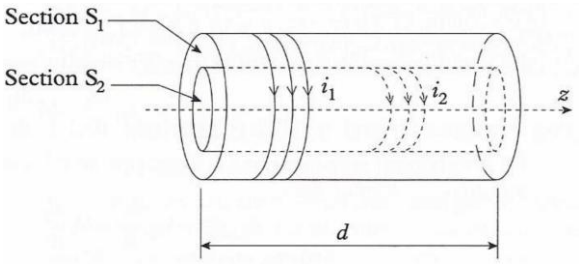
Energie stockée par la bobine : en fonction de i, N, μ_0, ℓ et S : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2$

Densité volumique d'énergie magnétique : énergie stockée par la bobine par unité de volume :

$$w_m = \frac{\mathcal{E}_L}{\ell S} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2 S} i^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2}{\ell^2} i^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\mu_0 N i}{\ell}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

On admet que ce résultat est général et que l'énergie est localisée dans les régions de l'espace où règne un champ magnétique et non au niveau de ses sources.

11. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.



Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = Mi_1$ et $\Phi_{21} = Mi_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12}.

a) Calcul de $M = M_{12}$ tel que $\phi_{1\to 2} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B}_1) = M_{12} i_1$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_1$!

or $\vec{B}_1$ créé par $\mathcal{C}_1$: $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} i_1 \vec{u}_z$ (cf orientation i_1)

et $\phi_{12} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B}_1) = N_2 \phi_{1 \text{ spire}}(\vec{B}_1) = N_2 \iint_{(\mathcal{C}_2)\ 1 \text{ spire de } \mathcal{C}_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_2$

flux de $\vec{B}_1$ à travers $\mathcal{C}_2$

or $\vec{dS}_2 = dS_2 \vec{u}_z$

cf orientation i_2 + main droite

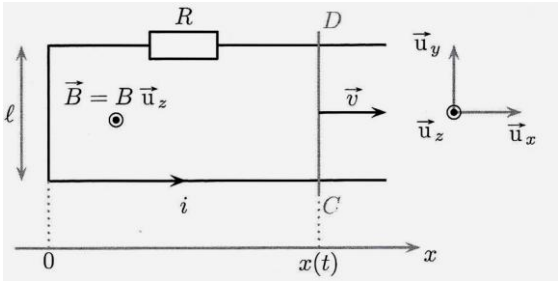
soit $\phi_{12} = N_2 \times B_1 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d} i_2$

$\vec{B}_1$ uniforme sur toute la surface

$M = M_{12}$

! arbitraire ! peut être en sens opposé !

12. ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



⇨ ***Analyse qualitative :*** *la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)*

⇨ ***Equation électrique***

1. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i.*
2. *Orienter la surface*
3. *Calcul du flux :* $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bax$
4. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$, *donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. *Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :*

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ *soit* $Ri = -Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

1. *Système ; 2. Bilan des actions mécaniques extérieures : poids* $\vec{P}$ *; réactions des rails* $\vec{R}$ *(normale car pas de frottements) ; Force* $\overrightarrow{Fop}$ *; Force de Laplace :* $\overrightarrow{F_{Laplace}}$ = iBa $\overrightarrow{u_x}$ *(attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

3. *PFD appliqué à la tige* 4. *projeté sur* $\overrightarrow{ux}$: $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)*

Bilan énergétique

On multiplie (EE) *par i :* $ei = Ri^2 = -Ba\,\dot{x}\,i$

On multiplie (EM) *par* $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} + Bia\,\dot{x}$

- ***Terme de couplage*** $Ba\dot{x}i$

$ei = -Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par le générateur induit*

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)*

La somme de ces deux puissances est nulle.

cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\underbrace{F\dot{x}}_{\mathcal{P}_{opérateur}} = \underbrace{\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt}}_{\frac{dEc}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{Joule}}$

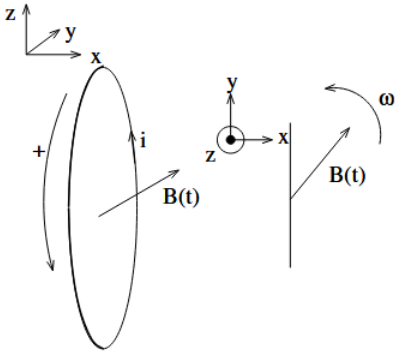
Il y a c*onversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.*

13. ❤️ Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0\left(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\overrightarrow{e_y}\right)$$

Une spire plate de surface S est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan (Oyz). La spire se comportant comme une résistance R, établir l'expression du courant i qui la parcourt.

On oriente le courant de manière à prendre pour orientation positive de la spire le sens donné par $\overrightarrow{dS} = \vec{e}_x$.



Le flux du champ magnétique au travers de cette spire est alors donné par:

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = SB_0\cos\omega t$$

Ce flux variant dans le temps, d'après la loi de Faraday, La fem induite dans la spire s'exprime alors comme :

$$e_N = -\frac{d\phi}{dt} = SB_0\sin(\omega t)$$

Avec un schéma électrique équivalent du circuit (attention ! fém en convention générateur), on obtient

$$e_N = Ri \qquad i = \frac{SB_0}{R}\sin\omega t$$

Pour les calculs de champ électrostatique ou gravitationnel, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances de la distribution, conséquences sur le champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$ (principe de Curie et propriétés associées dans le cas de champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$ à citer à bon escient)*
4) *choix de la surface de Gauss (la définir soigneusement et vérifier qu'elle passe par le point M)*
5) *Calcul de la charge intérieure ou de la masse intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss, la disjonction de cas sur la charge / masse intérieure se répercutant sur $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

14. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

15. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

16. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

Distribution	**Astre sphérique de masse volumique ρ**	**Cylindre infini chargé en volume (ρ)**	**Plan $x = 0$ infini chargé (σ)**
Champ $\vec{G}$ ou $\vec{E}$	$r \leq R : \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\frac{\rho r}{3}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\frac{\rho R^3}{3\,r^2}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{M_{tot}}{r^2}\vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\,\varepsilon_0\,r}\vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$

17. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

1ère méthode : $V = \int -\vec{E}\,.\,\overrightarrow{d\ell} = \int -E\ \overrightarrow{u_r}\,.\,\overrightarrow{d\ell} = -\int E\ dr + cte$

2ème méthode : $\vec{E} = E\ \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\ dr + cte$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\int E_{int}\,dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.dr$ $V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = -\int E_{ext}\,dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.dr$ $V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 –Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}+K_1=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow K_1=\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}(2+1)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$r<R$	$r>R$
$\boxed{V_{int}=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$	$\boxed{V_{ext}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$

4 – Cohérence $[V]=\frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}$ …

$r<R$	$r>R$
$[V_{int}]=\frac{[\rho]L^2}{[\varepsilon_0]}=\frac{[charge]L^2}{[\varepsilon_0]L^3}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$	$[V_{ext}]=\frac{[\rho]L^3}{[\varepsilon_0]L}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$
Homogène - cohérent	

18. ❤️ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z>0: \vec{E}=\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z<0: \vec{E}=-\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z=0$.

1 – Variable d'intégration

$$V=\int -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}+K=\int -E\ \overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{d\ell}+K=-\int E\ dz+K=-\int \varepsilon\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dz+K=-\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}+K$$

2 – Origine du potentiel

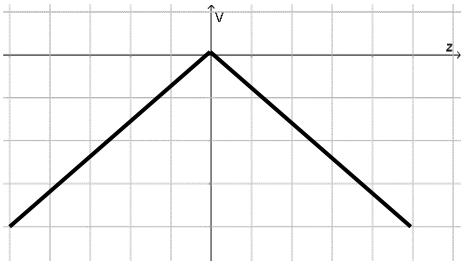
Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty)=0$. On prend l'origine en O.

$$V(0)=0=0+K\Rightarrow K=0$$

$$\boxed{V=-\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}}$$

4 – Cohérence $[V]=\frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}$ … : $[V]=\frac{[\sigma]L}{[\varepsilon_0]}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$ *Cohérent*

5 – Graphe $\boldsymbol{V(r)}$



19. ❤️ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12}=V_1-V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F}=q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad soit \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad soit \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

20. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Retrouver le théorème de Gauss à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

Equation de Maxwell-Gauss : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$div(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Soient Σ une surface fermée quelconque

$\mathcal{V}$ le volume délimité par la surface fermée Σ

En intégrant l'équation de Maxwell Gauss sur la volume considéré, on obtient :

$$\iiint_V div(\vec{E})\, d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

*Avec Q_{int} la charge comprise à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$ délimité par la **surface Σ fermée (surface de Gauss).** Or, d'après le théorème d'Ostrogradski, en orientant la surface Σ vers l'extérieur :*

$$\oiint_{\Sigma_G} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_V div(\vec{E})\, d\tau$$

Soit finalement $\boldsymbol{\oiint_{\Sigma_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

Cette équation correspond au théorème de Gauss, qui constitue donc l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss locale.

21. **Enoncer l'équation de Maxwell-Faraday et donner son expression dans le cadre de l'électrostatique. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Etablir le passage à la formulation intégrale de cette équation et indiquer la conséquence associée.

Équation de Maxwell-Faraday en régime variable

En tout point M de l'espace :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M)\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire (cas de l'électrostatique)

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M)\right) = \vec{0}}$$

Equation locale valable si et seulement si en régime stationnaire : le champ électrostatique est dit irrotationnel.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{a}}) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_{z,x} - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_{x,y} \\ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_{x,y} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_{z,x} \end{vmatrix}$$

Avec l'opérateur nabla : $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\nabla} \wedge \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

Passage de la formulation locale à la formulation intégrale à l'aide du théorème de Stokes

Soient Γ *une courbe fermée orientée quelconque*

S *une surface s'appuyant sur* Γ*, orientée par celle-ci.*

Théorème de Stokes appliqué à $\vec{E}$ *:*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\,(\vec{E}) \cdot d\vec{S} \underbrace{=}_{\substack{Maxwell-Faraday \\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{E})=\vec{0}}} 0$$

Le champ <u>électrostatique</u>** est à **circulation conservative

Le champ électrostatique étant un champ à rotationnel nul, soit à circulation conservative, c'est donc un champ de gradient ; il existe une fonction scalaire dont $\vec{E}$ *est le gradient :*

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{V})$ *soit* $\boldsymbol{dV} = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{dl}}$

La force électrostatique est donc une force conservative.

22. a) Rappeler les principales caractéristiques des cartes de champs et de potentiels électrostatiques.

b) ** Faire le lien entre ces caractéristiques et les équations locales.

→ *Dans une région de l'espace vide de charges, le champ* $\vec{\boldsymbol{E}}$ *est à flux conservatif (cf. équation de Maxwell-Gauss), donc plus les lignes de champs se resserrent, plus le champ électrique est intense.*

→ *Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique plus intense (cf.* $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{V})$*).*

→ *Les lignes de champ électrique partent des charges positives et arrivent vers les charges négatives (cf. équation de Maxwell-Gauss) ; elles ne sont jamais refermées sur elles-mêmes (elles ne tourbillonnent jamais, cf. équation de Maxwell-Faraday).*

→ *Le potentiel ne présente pas d'extremum en dehors des charges (cf. équation de Poisson :* $\Delta V > 0$ *traduit l'existence d'un minimum local,* $\Delta V < 0$ *celle d'un maximum local.*

23. Soit une distribution de charge de densité volumique de charge $\rho(r) \approx -\frac{2q^2 n_0 V(r)}{k_B T}$, créant un champ de potentiel électrostatique $V(\mathrm{r})$. Montrer qu'il est de la forme $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\delta}}$ où A est une constante.

Equation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ *soit ici en coordonnées sphériques avec* $\rho(r)$ *donc* $V(r)$ *:*

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV) \approx \frac{2q^2 n_0 V(r)}{\varepsilon_0\, k_B T}$$

Soit $\frac{d^2}{dr^2}(rV) - KrV = 0$ *en posant* $K = \frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0\, k_B T} = cte$

En posant $f(r) = rV(r)$ *et* $K = \frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0\, k_B T} = cte = \frac{1}{\delta^2}$*, soit* $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, k_B T}{2q^2 n_0}}$*, on reconnait une équation différentielle du second ordre de forme canonique :*

$$\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{f}{\delta^2} = 0.$$

Résolution : l'équation caractéristique associée est de la forme $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ *d'où* $r_{\pm} = \pm\frac{1}{\delta}$.

Solution générale à l'équation homogène = solution générale à l'équation complète en l'absence de second membre :

$$f(r) = Ae^{-\frac{r}{\delta}} + Be^{+\frac{r}{\delta}} = rV(r)$$

Soit

$$V(r) = \frac{A}{r}e^{-\frac{r}{\delta}} + \frac{B}{r}e^{+\frac{r}{\delta}}$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$ *(de plus, sans cela, on aurait un potentiel qui divergerait à l'infini, ce qui n'est pas physiquement possible) :*

$$\boxed{V(r) = \frac{A}{r}e^{-\frac{r}{\delta}}}$$