COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2026-2027

Colle N°8 : 16 au 20 Novembre 2026

Au programme des exercices

→ **Chapitre CHIM.2 :** Réactions acido-basiques **(pas de méthode de la R.P. au programme, une seule réaction à prendre en compte)**

→ **Chapitre EM2 : Conduction électrique :** Vecteur densité de courant, équations de conservation de la charge, globale et locale, Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale, forme intégrale de la loi d'Ohm, résistance d'un conducteur cylindrique, effet Joule à l'échelle mésoscopique.

→ **Chapitre EM1 partie 2 : Conducteurs à l'équilibre - condensateurs :** Conducteur en équilibre électrostatique – modélisation électrostatique d'un condensateur, énergie électrostatique **(pas d'électrostatique sans condensateurs ou énergie électrostatique)**

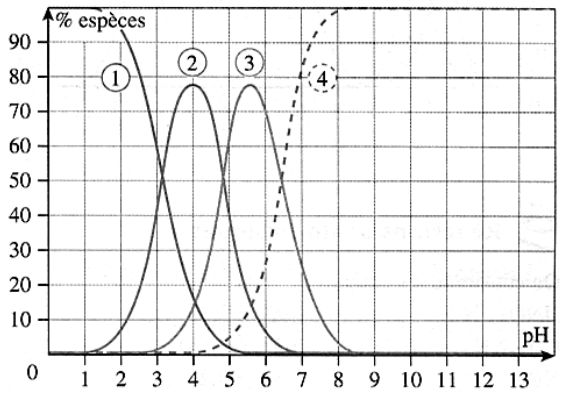
Questions de cours seules

1. ❤️ Quel est le pH d'une solution contenant des ions oxonium H_3O^+ à la concentration $c = 3.10^{-3}$ mol. L^{-1} ? d'une solution 10 fois plus concentrée ? Quelle est la concentration en ions oxonium H_3O^+ et en ions hydroxyde HO^- d'une solution d'eau de Javel de $pH = 11{,}5$?

2. ❤️ Définir la constante d'acidité d'un couple acido-basique. On met en solution de l'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $c = 0{,}1$ mol/L dans de l'eau pure. Déterminer les concentrations des espèces à l'équilibre ainsi que le pH de la solution ainsi obtenue. Donnée : Pour l'acide éthanoïque : $pK_A(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4{,}8$.

3. ❤️ Tracer le diagramme de prédominance de l'acide phosphorique H_3PO_4 ($pK_{A,i} = 2{,}1$; $7{,}2$; $12{,}4$). L'acidité du jus de citron est due à l'acide citrique $C_6H_8O_7$ ($pK_A = 3{,}1$) Le pH du jus de citron frais étant voisin de 2,5, quelle est l'espèce qui prédomine dans ce jus ?

4. ❤️ Le document ci-contre donne le diagramme de distribution de l'acide citrique, triacide noté H_3A, en fonction du pH. Identifier chacune des courbes et en déduire les constantes pK_{Ai} et K_{Ai} des différents couples. Considérons une solution d'acide citrique à la concentration $c = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} : déterminer la composition du mélange à $pH = 6$.



5. ❤️ les mélanges en solution aqueuse ci-dessous, calculer la constante de réaction associée puis indiquer si la réaction est favorisée ou défavorisée thermodynamiquement (favorisée dans le sens direct ou indirect).

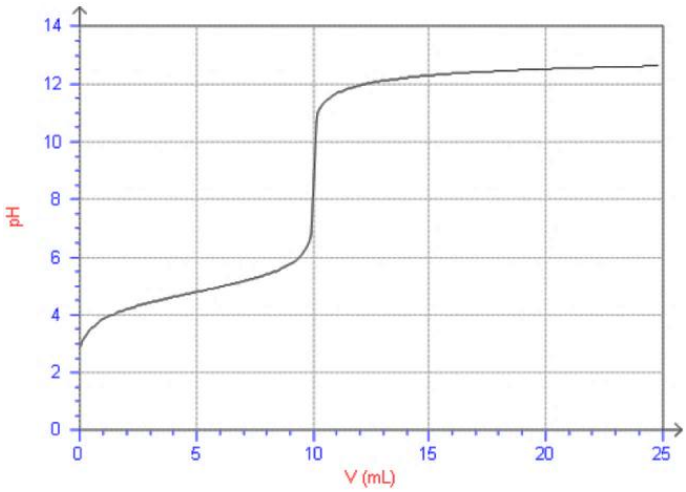
a) Mélange d'acide carbonique $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ et d'ions phosphate PO_4^{3-} ;

b) Mélange d'hydrogénocarbonate de sodium HCO_3^- ; Na^+ et d'hydrogénophosphate de disodium HPO_4^{2-}; $2Na^+$.

Données : H_3PO_4 ($pK_A = 2{,}1$; $7{,}2$; $12{,}4$); $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ ($pK_A = 6{,}3$; $10{,}3$).

6. ❤️ Calculer le pH d'une solution d'ammoniac NH_3 à $c = 10^{-2}$ mol/L ($pK_A(NH_4^+/NH_3) = 9{,}2$).

7. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume $V_0 = 100\ \text{mL}$ d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH de concentration c_a par de la soude à la concentration $c = 0{,}1\ \text{mol.L}^{-1}$.



Donnée : pKa(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4,8

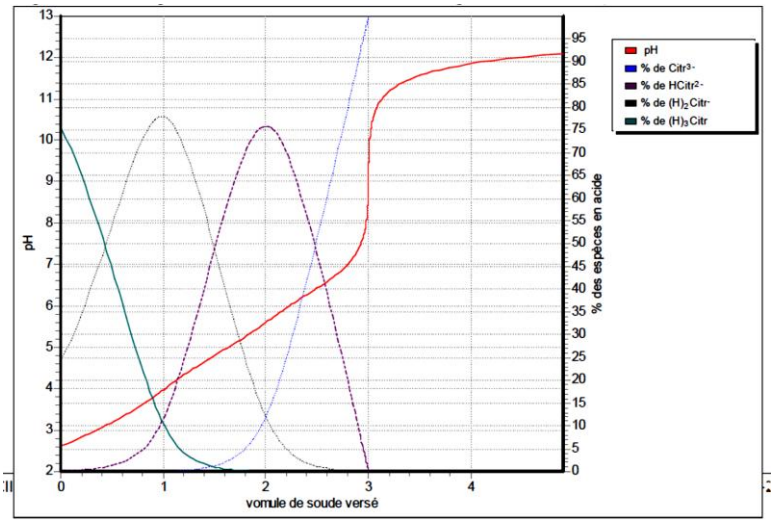
a. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?

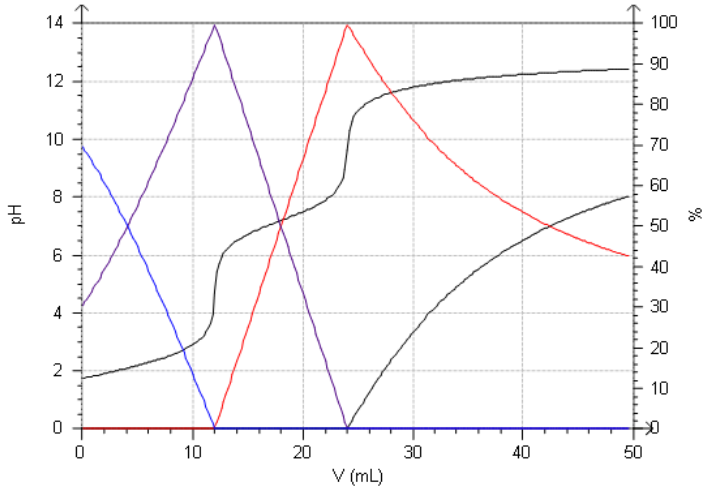
b. Déterminer la concentration c_a de l'acide éthanoïque.

c. Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.

8. ** Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude NaOH à la concentration $c =$ 0,1 mol.L^{-1} :

a) titrage d'un volume $V_a = 20\ \text{mL}$ d'acide phosphorique H_3PO_4 à la concentration c_a (polyacide de $pK_{A1} = 2{,}1$; $pK_{A2} = 7{,}2$; $pK_{A3} = 12{,}4$).





b) titrage d'un volume $V_a = 20\ \text{mL}$ d'acide citrique à la concentration c_a (polyacide de $pK_{A1} = 3{,}2$; $pK_{A2} = 4{,}7$; $pK_{A3} = 6{,}4$)

9. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.

a) ❤️ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

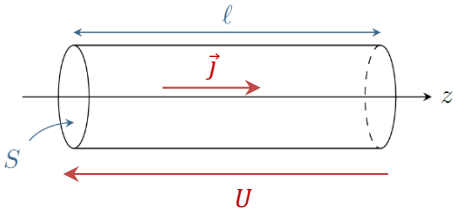
b) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

10. ❤️ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

11. ❤️ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

12. Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation $\omega = 2\pi f$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

13. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



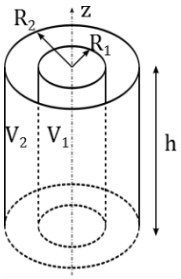
a) ❤️ Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

b) ❤️ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.

14. ** Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.

15. ❤️ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$ (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).

16. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

17. **Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤️ Quel est le pH d'une solution contenant des ions oxonium H_3O^+ à la concentration $c = 3.10^{-3}$ mol. L^{-1} ? d'une solution 10 fois plus concentrée ? Quelle est la concentration en ions oxonium H_3O^+ et en ions hydroxyde HO^- d'une solution d'eau de Javel de pH = 11,5 ?

Par définition : $pH = -log(h) = -log(c = 3.10^{-3}) = 2{,}5$;

$$pH' = -log(c' = 10c) = -log(10) - log(c) = pH - 1 = 1{,}5$$

Toute augmentation par 10 de la concentration en ions oxonium H_3O^+ se traduit par une diminution d'une unité du pH ; de même, toute dilution par 100 se traduit par une augmentation de deux unités pH

Par définition, $[H_3O^+] = h = 10^{-pH} = 10^{-11{,}5}\ mol.L^{-1} = 3{,}2.10^{-12}\ mol.L^{-1}$;

$$[HO^-] = \omega = \frac{K_e}{h} = 10^{pH-14} = 10^{-2{,}5}\ mol.L^{-1} = 3{,}2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

2. ❤️ On met en solution de l'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $c = 0{,}1$ mol/L dans de l'eau pure. Déterminer les concentrations des espèces à l'équilibre ainsi que le pH de la solution ainsi obtenue. Donnée : constante d'acidité de l'acide éthanoïque CH_3COOH : $K_A = 10^{-4{,}8}$.

Constante d'acidité de l'acide éthanoïque CH_3COOH (couple CH_3COOH / CH_3COO^-) : $K_A = 10^{-4{,}8}$*, correspondant par définition à la constante d'équilibre de mise en solution de l'acide dans l'eau*

En mol/L	CH_3COOH + H_2O = CH_3COO^- + H_3O^+	$K° = K_A = 10^{-pKa} = 10^{-4{,}8}$
EI	c / 0 0	
EF	$c(1-\alpha)$ / $c\alpha$ $c\alpha$	

Avec $K° = K_A = 10^{-4{,}8} \ll 1$ *: Hypothèse : réaction très peu avancée, avec* $c(1-\alpha) \approx c$ *soit L.A.M. :*

$$K_A = 10^{-4{,}8} = \frac{h[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = \frac{(c\alpha)^2}{c(1-\alpha)} \approx c\alpha^2$$

$$c\alpha^2 = K_A = 10^{-4{,}8} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{K_A}{c} = 10^{-3{,}8} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{K_A}{c}} = 10^{-1{,}9} \ll 1$$

Hypothèse validée, on a donc $[CH_3COO^-] = [H_3O^+] = h = c\alpha = 10^{-2{,}9}\ mol/L = 1{,}2.10^{-3}\ mol/L$

$$pH = -log(h) = 2{,}9$$

Remarque 1 : expression générale du pH d'une solution d'un acide faiblement dissocié :

$$pH = -log(h) = -log(\sqrt{cK_A}) = 1/2\ (pK_A + pc)$$

Remarque 2 : Résolution complète possible

$$\alpha^2 = \frac{K_A}{c}(1-\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + \frac{K_A}{c}\alpha - \frac{K_A}{c} = 0$$

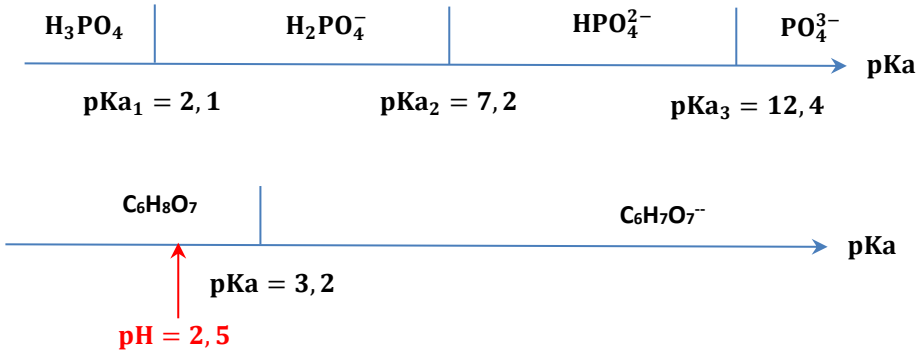
Avec $\Delta = \left(\frac{K_A}{c}\right)^2 + 4\frac{K_A}{c}$ $\quad \alpha = \frac{-\frac{K_A}{c} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\alpha \in [0;1]$*, d'où seule solution physiquement acceptable :* $\alpha = \frac{-\frac{K_A}{c} + \sqrt{\Delta}}{2}$

3. ❤️ Tracer le diagramme de prédominance de l'acide phosphorique H_3PO_4 ($pK_{A,i}$ = 2,1 ; 7,2 ; 12,4). L'acidité du jus de citron est due à l'acide citrique $C_6H_8O_7$ (pK_A = 3,1) Le pH du jus de citron frais étant voisin de 2,5, quelle est l'espèce qui prédomine dans ce jus ?

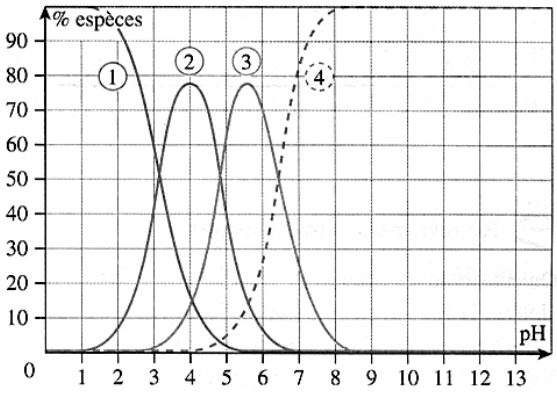
Forme basique prédominante : $[B] > [A] \Leftrightarrow pH > pKa$

Forme acide prédominante : $[B] < [A] \Leftrightarrow pH < pKa$



A ce pH, domaine de prédominance de ***$C_6H_8O_7$***

4. ❤️ Le document ci-contre donne le diagramme de distribution de l'acide citrique, triacide noté H_3A, en fonction du pH. Identifier chacune des courbes et en déduire les constantes pK_{Ai} et K_{Ai} des différents couples. Considérons une solution d'acide citrique à la concentration $c = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} : déterminer la composition du mélange à $pH = 6$.



1) A $pH = 0$, l'espèce prédominante correspond nécessairement à l'acide le plus fort. Courbe 1 : (1) = % H_3A ; lorsque le pH augmente, la première espèce à se former à partir de l'acide le plus fort est sa base conjuguée, on a donc (2) = % H_2A^-, puis de la même manière : (3) = % HA^{2-} et (4) = % A^{3-}

2) A l'intersection des courbes de % de deux espèces d'un couple acide-base, on a $pH = pK_A$, soit ici : intersection de (1) et (2) : $pH = pK_{A1} =$ 3,2 (ou 3,3) ; intersection de (2) et (3) : $pH = pK_{A2} =$ 4,7 (ou 4,8) ; intersection de (3) et (4) : $pH = pK_{A3} = 6,4$.

Pour chaque couple, $K_{Ai} = 10^{-pK_{Ai}}$.

Attention ! le pH à l'intersection de deux courbes de % d'espèces ne correspondant pas à un même couple de donne pas accès à un pK_A ! Par exemple, pas de détermination de pK_A par le biais de l'intersection de (1) et (3).

3) Par lecture graphique à $pH = 6$: % $H_3A = 0$; % $H_2A^- \approx 6\%$; % $HA^{2-} \approx 68\%$; % $A^{3-} \approx 26\%$ (en arrondissant de manière à avoir un total à 100 % 😊)

Avec une concentration totale $c = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1}, on a $[A_i] = \%A_i \times c$:

$[H_3A] = 0$; $[H_2A^-] \approx 0,06 \times c \approx 1,2.10^{-3}$ mol. L^{-1} ; $[HA^{2-}] \approx 0,68 \times c \approx 1,4.10^{-2}$ mol. L^{-1} ;

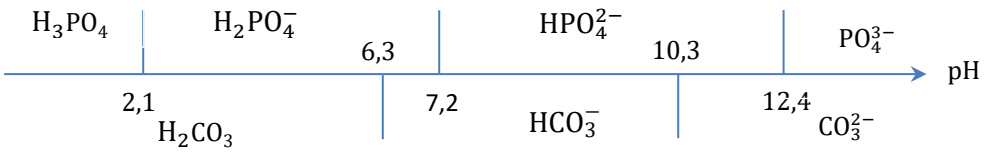
$[A^{3-}] \approx 0,26 \times c \approx 5,2.10^{-3}$ mol. L^{-1}

5. ❤️ Pour les mélanges en solution aqueuse ci-dessous, calculer la constante de réaction associée puis indiquer si la réaction est favorisée ou défavorisée thermodynamiquement (favorisée dans le sens direct ou indirect).

c) Mélange d'acide carbonique $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ et d'ions phosphate PO_4^{3-} ;

d) Mélange d'hydrogénocarbonate de sodium HCO_3^- ; Na^+et d'hydrogénophosphate de disodium HPO_4^{2-}; $2Na^+$.

Données : H_3PO_4 ($pK_A = 2,1$; 7,2 ; 12,4); $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ ($pK_A = 6,3$; 10,3).



a) domaines de prédominance de H_2CO_3 et de PO_4^{3-} disjoints, réaction déplacée dans le sens direct.

$$K° = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{12,4-6,3} = 10^{6,1} \gg 1$$

b) domaines de prédominance de HCO_3^- et de HPO_4^{2-} avec une intersection non nulle, réaction peu favorisée, déplacée dans le sens indirect.

$$K° = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{7,2-10,3} = 10^{-3,1} \ll 1$$

6. ❤️ Calculer le pH d'une solution d'ammoniac NH_3 à $c = 10^{-2}$ mol/L ($pK_A(NH_4^+/NH_3) = 9,2$).

Constante de basicité du couple NH_4^+/NH_3 : $K_b = K_e/K_A = 10^{-4,8}$, correspondant par définition à la constante d'équilibre de mise en solution de la base dans l'eau

En mol/L	NH_3 + H_2O = NH_4^+ + HO^-	$K° = K_b = K_e/K_A = 10^{-4,8}$
EI	c / 0 0	
EF	$c - \omega$ / ω ω	

Avec $K° = K_b = 10^{-4,8} \ll 1$: Hypothèse : réaction très peu avancée, avec $c - \omega \approx c$ soit L.A.M. :

$$K_b = 10^{-4,8} = \frac{\omega[NH_4^+]}{[NH_3]} = \frac{(\omega)^2}{c-\omega} \approx \frac{\omega^2}{c}$$

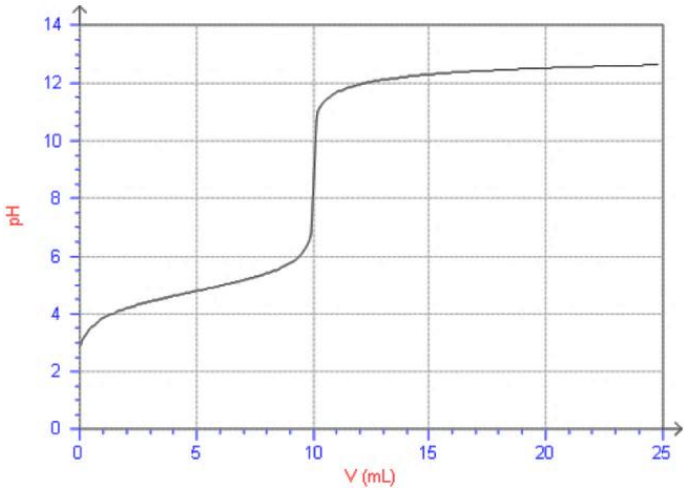
$$\frac{\omega^2}{c} = K_b = 10^{-4,8} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = cK_b = 10^{-5,8} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{cK_b} = 10^{-2,9} \ll 1$$

Hypothèse validée, on a donc $[NH_4^+] = [HO^-] = \omega = 10^{-2,9}\ mol/L = 1{,}2.10^{-3}\ mol/L$

$$pOH = -log(\omega) = 2,9$$

$$pH = 14 - pOH = 14 - 2,9 = 11,1$$

7. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume $V_0 = 100$ mL d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH de concentration c_a par de la soude à la concentration $c = 0,1$ mol. L^{-1}.



Donnée : pKa(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4,8

1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?
2. Déterminer la concentration c_a de l'acide éthanoïque.
3. Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.

$$CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O$$

$$K° = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{14 - pK_{A,acide}} = 10^{9,2} \gg 1$$

Réactions quantitatives pour $K° > 4$ soit $pK_{A,acide} < 10$; Pour des acides trop faibles, la réaction de titrage par la soude n'est pas quasi-quantitative ; le dosage ne peut être effectué de cette manière-ci.

En mol	CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O
EI	c_aV_0 cV 0 excès

EF pour $V = V_{éq}$	$c_a V_0 - \xi_{éq} \approx 0$	$cV_{éq} - \xi_{éq} \approx 0$	$\xi_{éq} = cV_{éq} = c_a V_0$	excès

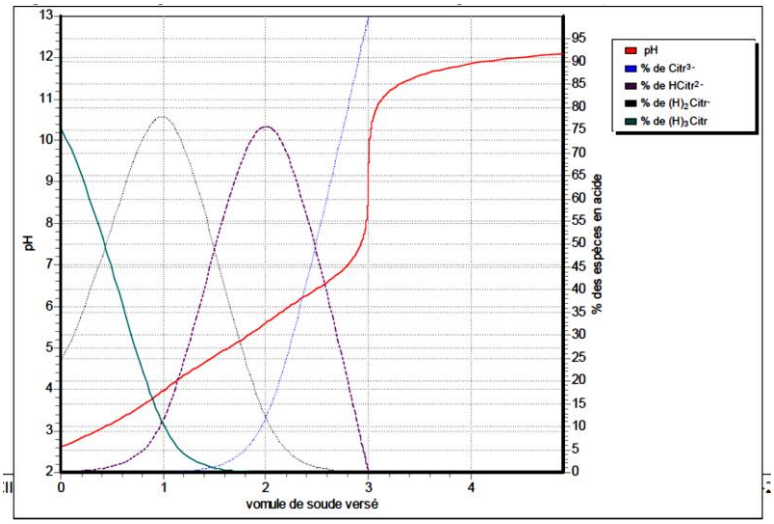
A l'équivalence, $c_a V_0 - \xi_{éq} = c_b V_{éq} - \xi_{éq} = 0$ *d'où* $c_b V_{éq} = c_a V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_a = \frac{cV_{éq}}{V_0}}$

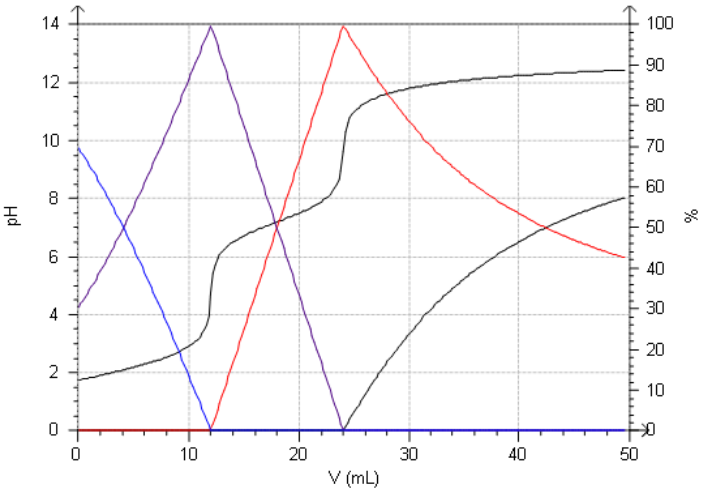
En exploitant le saut de pH (ici, par lecture directe) : $V_{éq} = 10\ mL$. *A.N. :* $c_a = \frac{c}{10} = 10^{-2}\ mol/L$

L'indicateur coloré le mieux adapté doit avoir sa zone de virage centrée sur le pH à l'équivalence : $pH_{éq} \approx 9$ *et la zone de virage doit être comprise dans le saut de pH soit entre 7 et 10,5 unités pH*

8. ** Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude NaOH à la concentration $c =$ 0,1 mol.L^{-1} :

a) titrage d'un volume $V_a = 20$ mL d'acide phosphorique H_3PO_4 à la concentration c_a (polyacide de $pK_{A1} = 2{,}1$; $pK_{A2} = 7{,}2$; $pK_{A3} = 12{,}4$).





b) titrage d'un volume $V_a = 20$ mL d'acide citrique à la concentration c_a (polyacide de $pK_{A1} = 3{,}2$; $pK_{A2} = 4{,}7$; $pK_{A3} = 6{,}4$)

a) Trois réactions de titrage envisageables : H_3PO_4, $H_2PO_4^-$ *et* HPO_4^{2-} *par* HO^-, *de constantes d'équilibre respectives* $K°_1 = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{11,9}$; $K°_2 = 10^{6,8}$; $K°_3 = 10^{1,6}$

La troisième acidité est très faible, le dosage n'est donc pas quantitatif (critère de quantitativité pour le dosage d'un acide faible par une base forte : $pK_A > 10$*).*

Les deux autres acidités ont des pK_A *très différents :* $pK_{A2} - pK_{A1} = 5{,}1$ *: elles sont donc dosées successivement (critère de successivité :* $\Delta pK_A > 3$ *ou 4).*

Relations aux équivalences :

***Equivalence 1** : de* $V = 0$ *à* $V = V_{éq1}$, *titrage de* H_3PO_4 $\quad \boxed{cV_{éq1} = c_a V_A}$

***Equivalence 2 :** de* $V = 0$ *à* $V = V_{éq2}$, *titrage de* H_3PO_4 *et* $H_2PO_4^-$: $\boxed{cV_{éq2} = 2c_a V_A}$;

Aussi : de $V = V_{éq1}$ *à* $V = V_{éq2}$, *titrage de* $H_2PO_4^-$: $\boxed{c(V_{éq2} - V_{éq1}) = c_a V_A}$

b) Il y a trois acidités caractérisées par les pK_{Ai} *: 3,2 ; 4,7 ; 6,4, dosées simultanément : Cf. courbes de %, à la fin de l'unique saut de pH, il y a 100% de* A^{3-}.

Le résultat aurait pu être prévu à l'aide des pK_A *des couples : les trois* pK_A *sont inférieurs à 10 : réactions toutes quantitatives, mais les acidités sont très proches :* $pK_{A2} - pK_{A1} = 1{,}5$, *et* $pK_{A3} - pK_{A2} = 1{,}7$, *alors que le critère de successivité est* $\Delta pK_A > 3$ *ou 4*

***Equivalence** : de* $V = 0$ *à* $V = V_{éq}$, *dosage des trois acidités :* $\boxed{cV_{éq} = 3c_a V_a}$

9. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.

c) ❤️ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence.

d) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence.

$\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ *soit* $\underline{s}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \underline{e}$

Dans le domaine temporel : $s(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{ds}{dt} = e(t)$

***Schéma explicite** : on approxime la dérivée* $\frac{ds}{dt}$ *par* $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$*, les autres grandeurs étant considérées au pas de temps* n*, d'où*

$$s_n + \frac{1}{\omega_0}\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_n$$

En posant $a = \omega_0 T_e$

$$s_n + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_n \quad \Leftrightarrow \quad a s_n + s_{n+1} - s_n = a e_n$$

$$s_{n+1} = a e_n + (1-a) s_n$$

***Schéma implicite** : on approxime la dérivée* $\frac{ds}{dt}$ *par* $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$*, les autres grandeurs étant considérées au pas de temps* $n+1$*, d'où*

$$s_{n+1} + \frac{1}{\omega_0}\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_{n+1}$$

En posant $a = \omega_0 T_e$

$$s_{n+1} + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1) s_{n+1} - s_n = a e_{n+1}$$

$$s_{n+1} = \frac{a}{a+1} e_{n+1} + \frac{1}{a+1} s_n$$

10. ❤️ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

Système : tranche de section S *et d'épaisseur* dx

Bilan de charges (grandeur conservative) : $\boldsymbol{d^2Q = \delta^2 q_{échangée}}$

$\delta Q(t)$ *à l'instant* t *:* $\delta Q(t) = \rho(x,t) d\tau = \rho(x,t)\, S\, dx$

$\delta Q(t+dt)$ *à l'instant* $t+dt$ *:* $\delta Q(t+dt) = \rho(x, t+dt)\, S\, dx$

Expression de la variation de charge $d^2Q = \delta Q(t+dt) - \delta Q(t) = \big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\big) S\, dx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt\ S\, dx$

Expression de la charge échangée :

$$\delta^2 q_{échangée} = \delta q_{entrant} - \delta q_{sortant} = (i(x,t) - i(x+dx,t))\, dt = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt$$

Vecteur densité de courant $\vec{j}$ *uniforme sur une section de conducteur :* $\vec{j} = \vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\, \vec{e}_x$

Intensité traversant une section du conducteur : $i(x,t) = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_x(x,t) S$ ***D'où*** $\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dx$

Finalement $\delta^2 q_{échangée} = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dxdt$

En identifiant les deux expressions obtenues : $S\, dx \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dx\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$

11. ❤️ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{lim}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ *soit* $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ *soit* $\vec{v}(t \to \infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \overrightarrow{v_{lim}}}$

Charge traversant $\overrightarrow{dS}$ *pendant* dt *:* $d^2q = nq\overrightarrow{v_{lim}}.dt.\overrightarrow{dS}.$

intensité traversant $\overrightarrow{dS}$ *:* $dI = \frac{d^2q}{dt} = nq\overrightarrow{v_{lim}}.\overrightarrow{dS} = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ *soit*

$$\vec{j} = nq\overrightarrow{v_{lim}} = nq\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \boxed{ne^2\frac{\tau}{m}\vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) : $\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}$.

12. Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation $\omega = 2\pi f$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

On part de l'équation différentielle du mouvement que l'on écrit en notation complexe

$$m\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = -\lambda\underline{\vec{v}} - e\underline{\vec{E}}$$

$$mj\omega\underline{\vec{v}} = -\lambda\underline{\vec{v}} - e\underline{\vec{E}}$$

Expression de la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{mj\omega + \lambda} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{jm\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau}$$

Expression du vecteur $\underline{\vec{j}}$ *:*

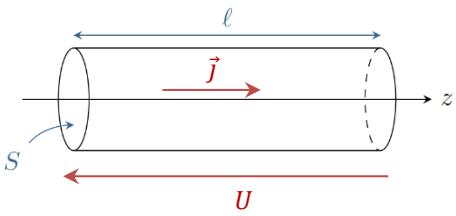
$$\underline{\vec{j}} = n_e q\underline{\vec{v}} = -n_e e\underline{\vec{v}} = \underbrace{\frac{n_e\frac{e^2\tau}{m}}{1 + j\omega\tau}}_{\underline{\gamma}(\omega)}\vec{E} \underbrace{=}_{\substack{\text{loi d'Ohm} \\ \text{locale}}} \underline{\gamma}(\omega)\underline{\vec{E}}$$

Conductivité complexe $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\frac{n_e e^2\tau}{m}}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(régime\ continu)}{1 + j\omega\tau}$$

On peut approximer la conductivité du métal par sa valeur statique jusqu'à des fréquences de l'ordre de $\frac{1}{\tau} \sim 10^{12}\ Hz$ *:*

13. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



c) ❤️ Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

d) ❤️ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.

e) **Retrouver la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

Loi d'ohm locale : $\vec{j}(z) = \gamma\vec{E}$ *donc* $\vec{j}(z) = j(z)\,\overrightarrow{u_z}$; $I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j.dS = j(z)S = \gamma E(z)S$;

Or $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$ avec

$$U = \int_{V2}^{V1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = -\int_{M2}^{M1} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = +\int_{M1}^{M2} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = EL$$

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma\, S}$

puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge :

$$\boldsymbol{p \underset{déf}{=} \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}}$$

Dans les milieux ohmiques, afin de maintenir le courant dans le conducteur, le champ électrique $\vec{E}$ doit fournir de l'énergie aux charges pour compenser les pertes dues aux forces de friction.

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ *(hypothèse ARQS)*

$$p_{Joule} = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} = \gamma\|\vec{E}\|^2 > 0$$

14. ** Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.

A l'intérieur *du conducteur*

$$\boldsymbol{\vec{E} = \vec{0}} \qquad \boldsymbol{V = cte} \qquad \rho = 0$$

Au voisinage immédiat *du conducteur*

$\boldsymbol{\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{ext}}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{n_{ext}}}$ *vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur*

15. ❤️ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$ (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).

La plaque chargée positivement est prise comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$, avec $U = V_A - V_B = V(z=0) - V(z=e)$.

champ créé par un plan infini situé en $z = 0$ *et chargé avec une densité surfacique* σ; *avec* $Q = \sigma\,.S$

$z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ *et* $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

D'après ce qui précède :

Champ crée par l'armature 1 :

$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < 0 \end{cases}$$

Champ crée par l'armature 2 :

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > e \\ \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < e \end{cases}$$

Principe de superposition : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & si\ z > e\ ou\ z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ 0 < z < e \end{cases}}$$

Détermination de U :

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{M} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\overrightarrow{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \cdot d\overrightarrow{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_A^B dz$$

$$U = V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

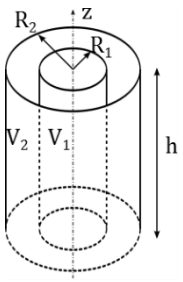
La capacité C est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

(attention au signe ! la charge Q est celle vers laquelle pointe la flèche de la tension)

On a donc : $\boxed{C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\sigma\, S\, \varepsilon_0}{\sigma\, e} = \dfrac{\varepsilon_0\, S}{e}\ avec\ S = \pi a^2}$

16. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Système de coordonnées cylindriques

En supposant le condensateur de hauteur infinie (on néglige les effets de bord), il y a invariance par rotation de θ et translation de z de la distribution de charges $\mathcal{D}$ donc de $\vec{E}$. De plus, pour un point M quelconque situé entre les armatures, les plans $\pi_1(M;\vec{e}_r;\vec{e}_\theta)$ et $\pi_2(M;\vec{e}_r;\vec{e}_z)$ sont plans de symétrie de $\mathcal{D}$ donc de $\vec{E}$, donc $\vec{E} \in \pi_1 \cap \pi_2 = (M;\vec{e}_r)$, soit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Surface de Gauss : Cylindre d'axe (Oz), de rayon r (passant par M), de hauteur h la hauteur totale du cylindre.

Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = E(r)\,.2\pi rh$$

Pour r compris entre R_1 et R_2 (entre les armatures), $Q_{int} = Q_1$

Soit : $E(r) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \times 2\pi rh}$ *et* $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\vec{e}_r$ *entre les armatures*

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E}\cdot dO\overrightarrow{M} = \int_1^2 \vec{E}\cdot dO\overrightarrow{M} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\vec{e}_r \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh} dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\, ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ *soit*

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Validation : $[C] = [\varepsilon_0]\ L$ *et* $C > 0$

Capacité linéique *ou capacité par unité de longueur* $\Gamma = \frac{C}{h}$ **:**

$$\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

17. **Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.

$W_C = \frac{1}{2}Cu^2$

avec $\vec{E} = \overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{cte}$ *entre les armatures, soit* $\left\|\overrightarrow{E_0}\right\| = \left\|-\overrightarrow{grad}(V)\right\| = \left|\frac{dV}{dz}\right| = \left|\frac{\Delta V}{\Delta z}\right| = \frac{u}{e}$ *d'où* $u = E_0 e$ *et*

$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}C{E_0}^2e^2$$

Or $W_C = \mathcal{E}_{él} = \iiint_{l'espace}^{tout} we\, d\tau = \iiint_{l'espace}^{tout} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(M)^2\, d\tau = \iiint_{les\ armatures}^{espace\ entre} \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2\, Se$

Par identification : $W_C = \frac{1}{2}C{E_0}^2e^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2\, Se$ *soit* $C = \varepsilon_0\frac{S}{e}$