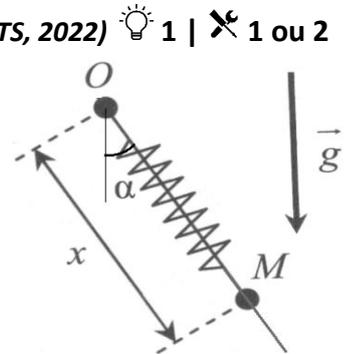


EXERCICES DE REVISION

Exercice 1. Anneau au bout d'un ressort sur tige inclinée (Oral CMT MP + ATS, 2022)  1 |  1 ou 2

On étudie un anneau M de masse m qui coulisse sur une tige Ox formant un angle avec l'axe vertical Oz . Cet anneau est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .



1. A l'aide d'une méthode énergétique, établir l'expression de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ ainsi que la période des oscillations.
2. En déduire l'expression de la position $x(t)$ au cours du temps, l'anneau étant abandonné sans vitesse initiale d'une position x_1 à l'instant initial.

Exercice 2. Oscillateur harmonique amorti en régime libre  1 |  2

Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant verticalement avec des frottements : $\vec{f} = -h\vec{v}$, avec v vitesse de M et h constante positive.

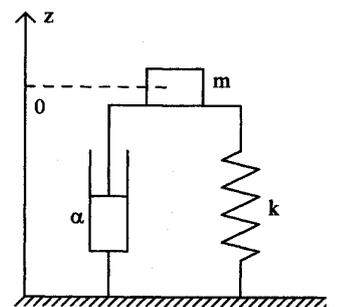
- 1- Etablir l'expression de la longueur à l'équilibre.
- 2- Etablir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous forme canonique en précisant les noms, dimensions et unités des constantes introduites.
- 3- Pour chacun des cas de figure suivants : $h = 0$, $h^2 = 4km$, $h^2 = \frac{km}{16}$, $h^2 = 9km$, indiquer la nature du régime.
- 4- Résoudre si on lâche la masse depuis cette position d'équilibre avec une vitesse initiale v_0 .

Exercice 3. Vibrations d'un moteur  1 |  2

Lorsqu'un moteur fonctionne, l'existence d'un balourd (déséquilibre de répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation) provoque des vibrations du châssis ; il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m .

La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k , placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$, où α est une constante positive.



- 1- Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer par une étude vectorielle la longueur ℓ_e du ressort. La position du moteur dans ce cas est alors prise comme origine de l'axe Oz .

Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme : $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On pose : $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on suppose que $\lambda < \omega_0$.

- 2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

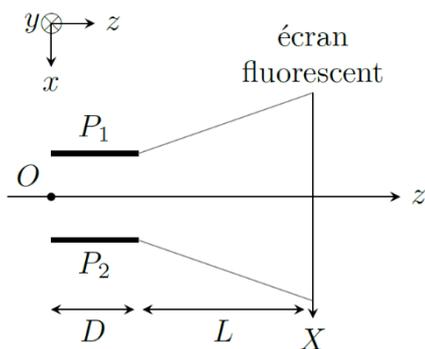
En régime sinusoïdal établi, on recherche des solutions de la forme :

$$z(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{dz}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \psi).$$

- Déterminer l'expression de la grandeur complexe $\underline{V} = V_0 e^{j\psi}$ associée à la vitesse. Exprimer V_0 en fonction des paramètres λ , ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. Donner l'allure de $V_0(\omega)$.
- Le moteur, de masse $m = 10 \text{ kg}$, tourne à une pulsation $\omega = 628 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $k_2 = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

Exercice 4. Oscilloscope analogique (E. Thibierge) 2 | 2

Maintenant remplacés par les oscilloscopes numériques, les oscilloscopes analogiques exploitaient la déviation d'un faisceau d'électron sous l'effet d'une tension que l'on souhaitait visualiser sur l'écran de l'oscilloscope. Cet exercice propose de comprendre le principe de fonctionnement de ces anciens oscilloscopes. Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel terrestre, auquel est associé un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



Une zone de champ électrique uniforme est établie entre deux plaques P_1 et P_2 , le champ est supposé nul en dehors de cette zone et les effets de bord sont négligés. La distance entre les plaques est notée d , la longueur des plaques D et on note U la tension (supposée constante et positive) entre les plaques, égale à la tension d'entrée de l'oscilloscope. Le champ électrique entre les plaques s'écrit ici :

$$\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{u}_x$$

Des électrons accélérés au préalable pénètrent en O la zone où existe le champ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ selon l'axe Oz . On suppose leur poids négligeable devant la force électrique.

- Déterminer les coordonnées du point de sortie K de la zone de champ et les composantes de la vitesse en ce point.
- On note L la distance entre la sortie de la zone de champ et l'écran fluorescent. Déterminer l'abscisse x_I du point d'impact I de l'électron sur l'écran en fonction de U , v_0 , D , d et L .
- À la lumière des questions précédentes, expliquer le principe de fonctionnement d'un oscilloscope analogique. Proposer une solution permettant d'obtenir un chronogramme sur l'écran et pas seulement un point.

Exercice 5. Spectrographie de masse 2 | 2

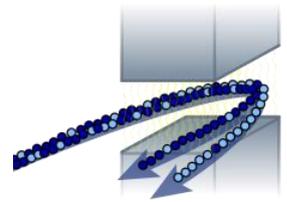
Une particule de masse m et de charge q (de signe quelconque) se déplace à la vitesse \vec{v}_0 dans un référentiel galiléen. A partir de l'instant $t = 0$, elle pénètre dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$ ($B > 0$) uniforme et constant, \vec{v}_0 et \vec{B} étant orthogonaux.

- En supposant que la trajectoire est plane et circulaire, montrer qu'il s'agit d'un mouvement circulaire et uniforme et établir l'expression du rayon R de la trajectoire, dis rayon cyclotron, ainsi que celle de la vitesse angulaire ω , dite pulsation cyclotron. Montrer que la période T est indépendante de la vitesse initiale v_0 .
- Dessiner la trajectoire orientée et le champ \vec{B} dans le cas $q < 0$ si à $t = 0$ la particule est en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

Le spectrographe de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon, que ce soit pour les compter (méthode de chimie analytique) ou pour les séparer (enrichissement de l'uranium en isotope 235).



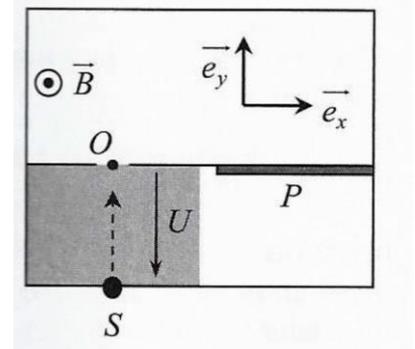
Schéma de principe de la séparation isotopique dans le Calutron. Un fort champ magnétique dévie le faisceau d'ions d'uranium, la concentration en U-235 étant finalement plus forte sur la bordure interne du faisceau.



Un faisceau de particules chargées est constitué de deux isotopes du mercure :

$^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau est émis par la source S avec une vitesse quasi-nulle, puis accéléré par une tension $U > 0$. Il pénètre alors en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme, orthogonal au faisceau incident.

Données : masse d'un nucléon $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg (la masse de l'électron sera négligée devant m), $U = 10$ kV, $B = 0,10$ T, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

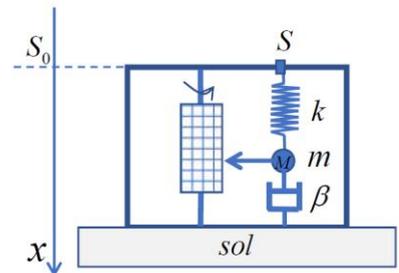


- Exprimer les vitesses v_1 et v_2 acquises respectivement par les isotopes (1) et (2) suite à l'accélération par la tension U .
- Déterminer la trajectoire des ions dans la zone de champ magnétique. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des isotopes (1) et (2).
- On recueille les particules sur une plaque photographique P après qu'elles ont fait demi-tour. Exprimer puis calculer la distance d entre les deux traces observées.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 6. Principe d'un sismographe 2 | 2

On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée au boîtier de l'instrument, lui-même solidaire du sol. Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M. La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{v}$ (assimilée à l'action d'un piston solidaire du boîtier) : dans cette expression, β est une constante et \vec{v} est la vitesse de la masse **par rapport à S**.



A l'instant initial l'altitude du point S coïncide avec celle d'un point S_0 fixe dans un référentiel \mathcal{R}_0 galiléen. On pourra utiliser le repère (S_0, x, y, z) associé à \mathcal{R}_0 .

L'axe (x) est orienté à la verticale vers le bas. Dans un premier temps on étudie le mouvement du point M en l'absence de perturbation (autrement dit S est immobile dans \mathcal{R}_0).

On note X la distance SM et g l'intensité de la pesanteur.

- Quelle est l'expression $X_{\text{éq}}$ de X à l'équilibre ?
- La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Etablir l'équation différentielle de son mouvement, à laquelle obéit la fonction $X(t)$.
- On pose $Y = X - X_{\text{éq}}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire sous la forme $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$ où l'on précisera les expressions des constantes λ et ω_0 en fonction de β , k et m .

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante.

L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel \mathcal{R}_0 est $x_S(t) = a \cos(\omega t)$. On note x_M l'abscisse de la masse m dans le référentiel \mathcal{R}_0 .

4. Quel est le lien entre \ddot{x}_M , \ddot{x}_S et \ddot{X} ? Quel est le lien entre \ddot{X} et \ddot{Y} ? Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , et en déduire l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a \omega^2 \cos(\omega t)$$

En régime forcé (ou *permanent*), on pose $Y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est une constante. D'autre part on introduit la *pulsation relative* $u = \omega/\omega_0$ et le *facteur de qualité* $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

5. Montrer que l'amplitude A des oscillations forcées de la masse est donnée par :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$$

6. Montrer que A est maximale pour une certaine valeur u_{max} de u que l'on exprimera en fonction de Q .

On mesure $u_{max} = 1,2 = \frac{6}{5}$; $k = 0,50 \text{ N.m}^{-1}$ et $m = 200 \text{ g}$.

7. En déduire la valeur du facteur de qualité Q et une valeur approximative du coefficient de frottement β .
8. Quelles sont les valeurs de l'amplitude des oscillations de la masse dans les deux cas limites : d'une part, $u \ll 1$ et $u \gg 1$ d'autre part ? Expliquer qualitativement le résultat obtenu dans chaque cas.

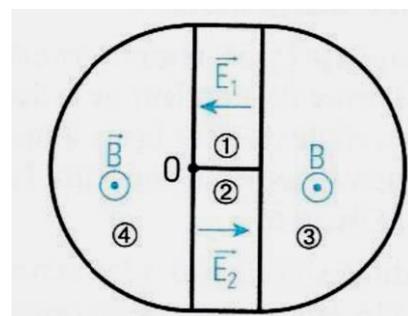
On peut considérer une onde sismique réelle comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsations comprises entre deux valeurs données ω_{min} et ω_{max} . On rappelle que le but d'un sismographe est d'enregistrer le plus fidèlement possible les mouvements verticaux **du sol**.

9. Comment faut-il choisir ω_0 par rapport aux valeurs ω_{min} et/ou ω_{max} pour fabriquer un sismographe ?
10. Etablir l'expression de l'amplitude de la vitesse des oscillations de la masse.

Exercice 7. Cyclotron 2 | 2

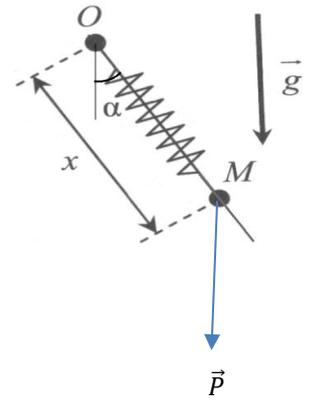
Le cyclotron est schématisé ci-contre. On lâche au point O une particule de charge $q > 0$ sans vitesse initiale, et on cherche à connaître son mouvement ultérieur.

En vue de dessus, les zones demi-circulaires sont plongées dans un champ magnétique uniforme de module B , et entre ces zones, une bande de largeur d est plongée dans un champ électrostatique de module E , mais dont le sens change : $\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = E$.



- 1) Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (1) avant qu'elle ne pénètre dans la région (3) où règne le champ magnétique ? Calculer la vitesse v_1 avec laquelle la charge q pénètre dans cette zone (3).
- 2) Dans la zone (3), quelle est la nature du mouvement ? Déterminer la trajectoire parcourue ainsi que ses caractéristiques.
- 3) Quelle est la vitesse de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2) ? la vitesse v_2 lorsqu'elle en sort ?
- 4) Après n passages dans l'une des régions (1) ou (2), quelle est la vitesse v_n de la particule et quelles sont les caractéristiques de la trajectoire parcourue dans celle des régions (3) ou (4) dans laquelle elle se trouve ?
- 5) On peut mesurer le temps passé par la particule dans l'une des régions (3) ou (4). Montrer que cette durée reste constante au cours du mouvement et permet de calculer le rapport q/m .

■ EXERCICES DE REVISION



Exercice 1. Anneau au bout d'un ressort sur tige inclinée

1. **Système** point M de masse m , soumis à son poids et à la force de rappel élastique exercée par le ressort, dérivant respectivement des énergies potentielles E_{pp} et E_{pe}

Il s'agit donc d'un système conservatif.

En choisissant un axe (Oz) descendant, et en prenant O comme origine des potentiels :

$$E_{pp} = -mgz = -mgx \cos(\alpha)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$$

Soit

$$E_{ptot} = E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx \cos(\alpha)$$

Position d'équilibre $x_{\acute{e}q}$ telle que $\left(\frac{dE_{ptot}}{dx}\right)_{x=x_{\acute{e}q}} = 0 = k(x_{\acute{e}q} - \ell_0) - mg \cos(\alpha)$

$$x_{\acute{e}q} = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k}$$

Théorème de la puissance mécanique appliqué à M :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} \underset{\substack{\text{système} \\ \text{conservatif}}}{=} 0 = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - \ell_0) - mg\dot{x} \cos(\alpha) = \dot{x}[m\ddot{x} + k(x - \ell_0) - mg \cos(\alpha)]$$

La solution $\dot{x} = 0$ étant sans intérêt physique pour l'étude de l'équation du mouvement, on a donc

$$m\ddot{x} + k(x - \ell_0) - mg \cos(\alpha) = 0$$

En soustrayant l'équation à l'équilibre : $0 + k(x_{\acute{e}q} - \ell_0) - mg \cos(\alpha) = 0$

On obtient :

$$m\ddot{x} + k(x_{\acute{e}q} - \ell_0) = 0$$

Sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{\acute{e}q}) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Remarque : Méthode N°2 si la méthode énergétique n'est pas imposée par l'énoncé :

avec le PFD : Equilibre : Principe fondamental de la statique :

$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ projeté sur \vec{u}_x le long de la tige, orienté vers le bas :

$$mg \cos \alpha - k(l_{\acute{e}q} - \ell_0) = 0$$

$$l_{\acute{e}q} = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k} = x_{\acute{e}q}$$

PFD projeté sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{x} = mg \cos \alpha - k(x - \ell_0)$$

En soustrayant l'équation à l'équilibre : $0 = mg \cos \alpha - k(x_{\acute{e}q} - \ell_0)$

On obtient :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{\acute{e}q})$$

2) Equation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique non amorti avec second membre :

solution générale à l'équation homogène de la forme $x_H(t) = A \cos(\omega_0 \cdot t) + B \sin(\omega_0 \cdot t)$, solution particulière à l'équation complète $x_p(t) = x_{\acute{e}q}$, d'où solution générale à l'équation complète :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = A \cos(\omega_0 \cdot t) + B \sin(\omega_0 \cdot t) + x_{\acute{e}q}$$

Détermination des constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$x(t=0) \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{C.I. de l'énoncé}}}{=} x_1 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{formule}}}{=} A + x_{\acute{e}q} \\ \text{à } t=0$$

Soit $A = x_1 - x_{\acute{e}q}$

Expression de la vitesse à un instant t quelconque :

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$\dot{x}(t=0) \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{C.I. de l'énoncé}}}{=} 0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{formule}}}{=} \omega_0 B \\ \text{pas de vitesse initiale à } t=0$$

Soit $B = 0$, d'où finalement :

$$x(t) = (x_1 - x_{\acute{e}q}) \cos(\omega_0 \cdot t) + x_{\acute{e}q}$$

Exercice 2. Oscillateur harmonique amorti en régime libre

1. Equilibre : Principe fondamental de la statique (absence de frottements car absence de vitesse à l'équilibre) :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{projeté sur } \vec{u}_z : \quad mg - k(l_{\acute{e}q} - l_0) = 0 \quad l_{\acute{e}q} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

2. PFD projeté sur \vec{u}_z : $mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$ soit $m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 + mg = kl_{\acute{e}q}$

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Discriminant
$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$ $\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_e(t)$	$mr^2 + hr + k = 0$ $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$	$\Delta = h^2 - 4km$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ [ω_0] = T^{-1}

facteur de qualité de l'oscillateur : $Q = \frac{1}{h} \sqrt{km}$ sans unité ; [Q] = 1.

3. Solutions générales à l'équation homogène, dont la forme dépend de la valeur du facteur de qualité

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 > 4km$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 = 4km$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 < 4km$
	$h^2 > 4km$: cas de $h^2 = 9km$	$h^2 = 4km$	$h^2 < 4km$: cas de $h = 0$, $h^2 = \frac{km}{16}$
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique	Deux racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = -\lambda \pm \Omega$	Une racine double r_0 : $r_0 = -\omega_0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = -\lambda \pm j\Omega$ avec Ω valeur absolue de la partie imaginaire : pseudo pulsation

			$-\lambda$: partie réelle
Forme générale des solutions homogènes	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $x_H(t) = D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

4. Il faut exploiter les deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :

$$x(t=0) = \ell_{eq} = x_H(t=0) + \ell_{eq} \text{ soit } x_H(t=0) = 0 \text{ puis calcul de } \dot{x}(t) = \dot{x}_H(t) \text{ avec } \dot{x}(t=0) = \dot{x}_H(t=0) = v_0$$

Exercice 3. Vibrations d'un moteur

1. Système : point M de masse m , soumis à son poids et à la force de rappel élastique exercée par le ressort (absence de frottements car absence de vitesse à l'équilibre)

Equilibre : Principe fondamental de la statique :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{projeté sur } \vec{u}_z \text{ (verticale ascendante)} \quad -mg - k(\ell_{eq} - l_0) = 0 \quad \ell_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

2. Principe fondamental de la dynamique en ajoutant deux forces supplémentaires, puis en projetant sur \vec{u}_z :

force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$ et force liée aux vibrations du moteur : $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t); \quad \ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

3. On cherche $z(t)$ sous la forme $z(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$, soit en passant à la notation complexe :

$$\underline{z}(t) = Z_0 \exp[j(\omega t + \varphi)] = \underline{Z}_0 \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{Z}_0 = Z_0 \exp(j\varphi)$$

Dans l'équation différentielle :

$$\ddot{\underline{z}} + 2\lambda \dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = \frac{F_0}{m} \exp(j\omega t) = -\omega^2 \underline{z} + 2\lambda \times j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = (\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega) \underline{z}$$

Soit

$$\underline{Z}_0 = Z_0 \exp(j\varphi) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega}$$

$$\underline{V} = \frac{\dot{\underline{z}}}{\exp(j\omega t)} = \frac{j\omega \times \frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda + j\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = V_0 e^{j\psi}$$

$$V_0 = |\underline{V}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left| 2\lambda + j\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right|} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

V_0 maximale lorsque le dénominateur est minimal (numérateur constant), soit en $\omega = \omega_0$;

Avec k_1 : $\omega_{01} = 632 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx \omega$, à éviter car résonance ; $\omega_{02} = 316 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \neq \omega$, à choisir.

Exercice 4. Oscilloscope analogique

1- Système point M de masse m , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Force électrique de Lorentz : $\vec{F}_e = q\vec{E} = -e\vec{E} = e \frac{U}{d} \vec{u}_x$
- Poids négligeable devant la force de Lorentz

Etude cinématique : en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z; \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \text{ et } \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Projection du PFD dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = e \frac{U}{d} \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = \frac{e U}{m d} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

En intégrant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = \frac{e U}{m d} t + K_x \\ \dot{y} = K_y \\ \dot{z} = K_z \end{cases}$$

En exploitant la condition initiale $\vec{v}(t=0) \stackrel{\text{C.I. énoncé}}{=} \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z \stackrel{\text{formule à } t=0}{=} \begin{cases} \dot{x}(t=0) = K_x \\ \dot{y}(t=0) = K_y \\ \dot{z}(t=0) = K_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_x = 0 \\ K_y = 0 \\ K_z = v_0 \end{cases}$

Soit

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = \frac{e U}{m d} t \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = v_0 \end{cases}$$

En intégrant à nouveau par rapport au temps :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d} t^2 + x_0 \\ y = y_0 \\ z = v_0 t + z_0 \end{cases}$$

A l'aide des conditions initiales, avec O position initiale : $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, soit

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d} t^2 \\ y = 0 \\ z = v_0 t \end{cases}$$

Remarque : la seule force étant selon \vec{u}_x et la vitesse initiale selon \vec{u}_z , il est attendu d'avoir un mouvement plan dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z)

Point de sortie K de la zone de champ :

atteint à l'instant t_K tel que $z(t_K) = v_0 t_K \stackrel{\text{longueur de la plaque}}{=} D = z_K$ soit $t_K = \frac{D}{v_0}$ et $x(t_K) = x_K = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d} t_K^2 = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d} \left(\frac{D}{v_0}\right)^2$

Coordonnées du point K :

$$x_K = \frac{e U D^2}{2 m d v_0^2}; y_K = 0; z_K = D$$

Composantes de la vitesse au point K : il s'agit du vecteur

$$\vec{v}(t_K) = \begin{cases} \dot{x}_K = \frac{e U}{m d} t_K = \frac{e U D}{m d v_0} \\ \dot{y}_K = 0 \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$$

2- Entre les points K et I , le champ est nul et donc la force électrique également. Etant donné les vitesses et distances mises en jeu, on peut négliger l'effet du poids, et donc considérer que la particule a un mouvement rectiligne uniforme, associé

à un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{ct\vec{e}} = \vec{v}(t_K) = \begin{cases} \dot{x}_K = \frac{e U D}{m d v_0} \\ \dot{y}_K = 0 \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$

En définissant un nouvel instant initial $t = 0$ correspondant à l'instant auquel l'électron atteint le point K , et en intégrant \vec{v} par rapport au temps pour obtenir les coordonnées du point M pendant sa trajectoire entre K et I :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e U D}{m d v_0} t + C_x \\ y(t) = C_y \\ z(t) = v_0 t + C_z \end{cases}$$

En exploitant les nouvelles conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration, on a

$$\begin{cases} x(t=0) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} C_x \underset{\substack{\text{C.I.:point K}}{=} x_K = \frac{eUD^2}{2mdv_0^2} \\ y(t=0) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} C_y \underset{\substack{\text{C.I.:point K}}{=} 0 \\ z(t=0) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} C_z \underset{\substack{\text{C.I.:point K}}{=} y_K = D \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e U D}{m d v_0} t + \frac{eUD^2}{2mdv_0^2} = \frac{e U D}{m d v_0} \left(t + \frac{D}{2v_0} \right) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 t + D \end{cases}$$

L'électron atteint l'écran fluorescent au point I à l'instant t_I tel que $z_I = z(t_I) = D + L = v_0 t_I + D$ soit $t_I = \frac{L}{v_0}$

$$\text{On a donc } x_I = x(t_I) = \frac{e U D}{m d v_0} \left(t_I + \frac{D}{2v_0} \right) = \frac{e U D}{m d v_0} \left(\frac{L}{v_0} + \frac{D}{2v_0} \right) = \frac{eUD}{mdv_0^2} \left(L + \frac{D}{2} \right)$$

Coordonnées du point d'impact I :

$$x_I = \frac{eUD}{mdv_0^2} \left(L + \frac{D}{2} \right); \quad y_I = 0; \quad z_I = D + L$$

- 3- L'abscisse du point d'impact x_I sur l'écran de l'oscilloscope est proportionnelle à la tension et permet donc de la visualiser directement à l'aide de l'écran fluorescent. Pour obtenir une courbe fonction du temps et non pas un point unique, il faut que la direction d'émission des électrons varie au cours du temps. On utilise pour cela deux autres plaques alimentées par une tension dépendant du temps de manière linéaire avec un retour périodique à une tension nulle, permettant une déviation dans la direction y (soit une déviation horizontale sur l'écran de l'oscilloscope).

Exercice 5. Spectrographie de masse

1) **Système** : ion.

Bilan des forces : le poids étant négligé devant la force électrostatique, entre la source S et O (zone d'existence de la tension U), la seule force est : $\vec{F}_E = q\vec{E}$, associée à l'énergie potentielle $E_{p_E} = qV$.

Théorème de l'énergie cinétique à un ion dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre S et O :

$$\frac{1}{2}m(v_0^2 - v_S^2) = W(\vec{F}_E) = -\Delta E_{p_E} = qU \text{ avec } v_S = 0 \text{ et } q = 2e.$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{2}mv_0^2 = 2eU, \text{ soit } v_0 = \sqrt{\frac{4eU}{m}}.$$

$$\text{Isotope 1 : } v_{01} = \sqrt{\frac{4eU}{m_1}} = \sqrt{\frac{4eU}{200m}}; \quad \text{Isotope 2 : } v_{02} = \sqrt{\frac{4eU}{m_2}} = \sqrt{\frac{4eU}{202m}};$$

- 2) Cf. cours : mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et permanent, en projetant le PFD dans une base cartésienne et en découplant les équations différentielles couplées ainsi obtenues, on trouve une trajectoire plane circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega_c = \left| \frac{qB}{m} \right|$ et de vitesse $v = R\omega_c$, soit de rayon $R = \left| \frac{mv}{qB} \right|$.

$$\text{Ici, } R_1 = \left| \frac{m_1 v_1}{qB} \right| = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{200mU}{e}} \text{ et } R_2 = \left| \frac{m_2 v_2}{qB} \right| = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{202mU}{e}}.$$

Pour rappel : démonstrations, en supposant la trajectoire circulaire puis sans faire d'hypothèse

Démonstration en admettant que le mouvement est circulaire (cadre du programme MPI)

Etude, dans le référentiel galiléen proposé par le sujet, du mouvement d'une particule ponctuelle, de charge q et de masse m , ne subissant que la force magnétique $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ car selon le sujet le poids est négligeable.

- La force magnétique $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse, donc elle ne travaille pas.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la particule entre deux instants quelconques, la variation d'énergie cinétique de la particule chargée est toujours nulle (aucune force ne travaille), le **mouvement est donc uniforme** : à tout instant la valeur de la norme de la vitesse v est constante et égale à v_0 .

Ne pas confondre norme de la vitesse et vecteur vitesse !!! la direction du vecteur varie, l'accélération est donc non nulle, et la force de Lorentz exploitée dans le PFD doit être écrite avec \vec{v} à t quelconque et non la vitesse initiale !

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule :

$$m\vec{a} = \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Etude cinématique : mouvement circulaire : choix des coordonnées polaires, soit pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

Si la vitesse est constante (mouvement circulaire uniforme) : $v = v_0 = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r$$

Projection du PFD sur \vec{u}_r : $-m \frac{v_0^2}{R} = qv_0B$ soit $R = \frac{mv_0}{qB}$ rayon de la trajectoire circulaire.

De plus, $\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m} = \omega_c$ pulsation cyclotron à laquelle est parcourue la trajectoire.

Remarque : on pouvait aussi retrouver le mouvement uniforme en projetant le PFD sur \vec{u}_θ avec $\vec{F} \cdot \vec{u}_\theta = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\theta = 0$ car \vec{v} colinéaire à \vec{u}_θ donc $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{u}_\theta$ d'où $\vec{a}_T = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}$ soit $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = \omega = cte$ soit $v = R\dot{\theta} = cte$: mouvement circulaire uniforme.

Démonstration complète sans admettre que le mouvement est circulaire (normalement hors programme).

- En appliquant la seconde loi de Newton en coordonnées cartésiennes, et en projetant sur les vecteurs de la base d'étude, on obtient :

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B; \quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B; \quad m\ddot{z} = 0$$

- La 3^{ème} équation différentielle s'intègre directement en 2 temps et compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{z}(t=0) = 0 \text{ et } z(t=0) = 0, \text{ on obtient } z(t) = 0.$$

Le **mouvement a donc lieu dans le plan** (xOy) à valeur de vitesse constante v_0 .

- **Découplage et résolution** :

Attention à l'exploitation des conditions initiales et plus généralement aux constantes d'intégration !!!

En intégrant une fois la 1^{ère} équation différentielle entre ($t = 0, y = 0$ et $\dot{x} = v_0$) et (t, y et \dot{x}) on obtient :

$$m(\dot{x} - v_0) = qBy \quad \text{donc} \quad \dot{x} = v_0 + \frac{qB}{m}y$$

On réinjecte \dot{x} dans la 2^{ème} équation différentielle qui devient $\ddot{y} = -\frac{qB}{m}(v_0 + \frac{qB}{m}y)$ ou avec $\omega = \frac{qB}{m}$:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega v_0$$

Solution générale en y : $y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}$

1^{ère} CI : $y(t=0) = 0$, soit $0 = \alpha - \frac{v_0}{\omega}$ donc $\alpha = \frac{v_0}{\omega}$

2^{ème} CI : $\dot{y}(t=0) = 0$, soit avec $\dot{y}(t) = -\alpha\omega\sin(\omega t) + \beta\omega\cos(\omega t)$: $0 = \beta \cdot \omega$ donc $\beta = 0$

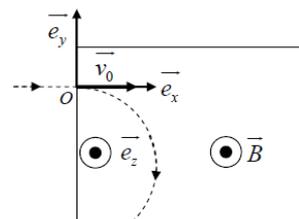
soit : $\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}}$

Or $\dot{x} = v_0 + \frac{qB}{m}y$, donc $\dot{x} = v_0 + \omega(\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}) = v_0 \cos(\omega t)$ donc

$x = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \text{cste}$, or $x(t=0) = 0$, donc $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$

• **Récapitulation :**

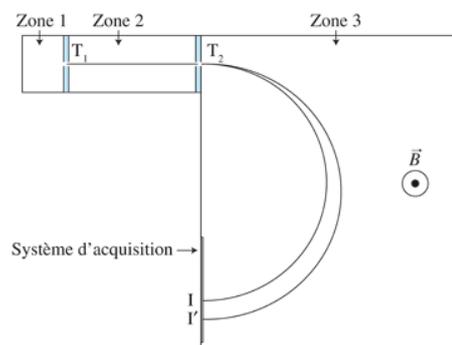
$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ et $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}$ donc $\boxed{x^2 + (y + \frac{v_0}{\omega})^2 = (\frac{v_0}{\omega})^2}$



La trajectoire est donc un cercle de centre $\Omega(0, -\frac{v_0}{\omega}, 0)$, de rayon $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} = R$ parcouru à vitesse constante v_0 .

3) Après un demi-tour (donc une demi-trajectoire circulaire), les deux isotopes sont à la distance $2R$ du point O, et sont donc séparés par la distance

$\boxed{d = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{mU}{e}} (\sqrt{202} - \sqrt{201})}$. A.N. : $d = 1,4 \text{ cm}$.



EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 6. Principe d'un sismographe (G2E 2020)

1) Etude de la position $X_{\text{éq}}$ de X à l'équilibre

• **Système :** point M de masse m , étudié dans le référentiel \mathcal{R}_0 supposé galiléen.

• **Etude cinématique :**

Position du point M : $\overrightarrow{SM} = X \overrightarrow{u_x}$, avec ici S fixe dans \mathcal{R}_0 ; la vitesse de M par rapport à S se confond donc avec la vitesse de M dans le référentiel : $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{SM}}{dt} = \dot{X} \overrightarrow{u_x}$; de même pour l'accélération : $\vec{a}(M) = \ddot{X} \overrightarrow{u_x}$

• **Bilan des actions mécaniques extérieures :**

• Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_x}$ avec $\overrightarrow{u_x}$ vecteur unitaire directeur de l'axe (x)

• Force élastique de rappel du ressort : $\vec{T} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x} = -k(X - l_0)\overrightarrow{u_x}$ avec $X = SM = l$

• **Principe fondamental de la dynamique à M dans \mathcal{R}_0 :**

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{T}$$

Soit

$$m\ddot{X} \overrightarrow{u_x} = mg\overrightarrow{u_x} - k(X - l_0)\overrightarrow{u_x}$$

• **Projection sur $\overrightarrow{u_x}$:**

$$m\ddot{X} = mg - k(X - l_0)$$

$$m\ddot{X} + kX = mg + kl_0 \quad (1)$$

A l'équilibre, absence de mouvement, soit $\ddot{X} = 0$, d'où dans (1) :

$$0 + kX_{\text{éq}} = mg + kl_0$$

Finalement,

$$\boxed{X_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

On obtient bien une longueur à l'équilibre supérieure à la longueur à vide, le ressort étant étiré par la masse suspendue verticalement.

2) Lorsque la masse est en mouvement, une force supplémentaire s'exerce : force de frottement fluide $-\beta\vec{v}$

Principe fondamental de la dynamique à M dans \mathcal{R}_0 :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} - \beta\vec{v}$$

Soit

$$m\ddot{X} \vec{u}_x = mg\vec{u}_x - k(X - l_0)\vec{u}_x - \beta\dot{X}\vec{u}_x$$

Projection sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{X} = mg - k(X - l_0) - \beta\dot{X}$$

$$m\ddot{X} + kX + \beta\dot{X} = mg + kl_0 \quad (2)$$

3) En soustrayant les équations (2) dans le cas général et à l'équilibre, avec $\dot{X}_{\acute{e}q} = 0$ et $X_{\acute{e}q} = 0$:

$$\begin{array}{r} m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX = mg + kl_0 \\ m\ddot{X}_{\acute{e}q} + \beta\dot{X}_{\acute{e}q} + kX_{\acute{e}q} = mg + kl_0 \end{array}$$

$$m\ddot{X} + \beta\dot{X} + k(X - X_{\acute{e}q}) = 0$$

En posant $Y = X - X_{\acute{e}q}$, avec $\dot{X} = \dot{Y}$ et $\ddot{X} = \ddot{Y}$:

$$m\ddot{Y} + \beta\dot{Y} + kY = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{Y} + \frac{\beta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y = 0$$

On obtient bien une équation de la forme demandée :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$$

avec $\lambda = \frac{\beta}{2m}$

et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ soit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

4) Dans le référentiel \mathcal{R}_0 , l'abscisse du point de suspension S est $x_S(t) = \overline{S_0S} = a \cos(\omega t)$, celle du point M correspondant à la masse m est $x_M(t) = \overline{S_0M}$. On note toujours $X = \overline{SM} = SM$.

On a donc $x_M(t) = \overline{S_0M} = \overline{S_0S} + \overline{SM} = X(t) + x_S(t)$, d'où

$$\ddot{x}_M = \ddot{X} + \ddot{x}_S$$

Lorsque le point S bouge (typiquement passage d'une onde sismique) l'accélération de la masse m dans \mathcal{R}_0 est différente de \ddot{X} car le point S est mobile par rapport à S_0 fixe dans \mathcal{R}_0

Avec $Y = X - X_{\acute{e}q}$, on a toujours $\dot{X} = \dot{Y}$ et $\ddot{X} = \ddot{Y}$, le lien entre \ddot{X} et \ddot{Y} n'est pas modifié.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , le bilan des actions mécaniques n'étant pas modifié, on a :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} - \beta\vec{v}$$

Avec ici $\vec{a} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_0} = \frac{d^2\overline{S_0M}}{dt^2} = \frac{d^2x_M(t)}{dt^2} \vec{u}_x = \ddot{x}_M \vec{u}_x = \ddot{X} + \ddot{x}_S$

(accélération de M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , soit par rapport à un point fixe de référence dans \mathcal{R}_0 , ici le point S_0).

la vitesse intervenant dans la force de frottement fluide est en revanche, d'après l'énoncé, la vitesse de la masse par rapport à S, soit $\vec{v} = \frac{d\overline{SM}}{dt} = \dot{X}\vec{u}_x$

$$m(\ddot{X} + \ddot{x}_S) \vec{u}_x = mg\vec{u}_x - k(X - l_0)\vec{u}_x - \beta\dot{X}\vec{u}_x$$

Projection sur \vec{u}_x :

$$m(\ddot{X} + \ddot{x}_S) = mg - k(X - l_0) - \beta\dot{X}$$

$$m\ddot{X} + kX + \beta\dot{X} = -m\ddot{x}_S + mg + kl_0 \quad (2)$$

En soustrayant les équations (2) dans le cas général et à l'équilibre, avec à l'équilibre $\ddot{x}_S = \dot{X}_{\acute{e}q} = 0$ et $X_{\acute{e}q} = 0$:

$$\begin{array}{r} m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX = -m\ddot{x}_S + mg + kl_0 \\ m\ddot{X}_{\acute{e}q} + \beta\dot{X}_{\acute{e}q} + kX_{\acute{e}q} = mg + kl_0 \end{array}$$

$$m\ddot{X} + \beta\dot{X} + k(X - X_{\acute{e}q}) = 0$$

En posant d'une part $Y = X - X_{\acute{e}q}$, avec $\dot{X} = \dot{Y}$ et $\ddot{X} = \ddot{Y}$,

et d'autre part avec $x_S(t) = \overline{S_0S} = a \cos(\omega t)$, soit $\ddot{x}_S = -a\omega^2 \cos(\omega t)$

$$m\ddot{Y} + \beta\dot{Y} + kY = -m\ddot{x}_S \quad \text{soit} \quad \ddot{Y} + \frac{\beta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y = -\ddot{x}_S = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

On obtient bien une équation de la forme demandée, avec les mêmes constantes que précédemment :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{\beta}{2m}$$

$$\text{et } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ soit}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5) En régime forcé, on a $Y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$;

En passant à la notation complexe, on a donc :

$$\underline{Y}(t) = A \exp(i(\omega t + \varphi)) = A \exp(i\varphi) \exp(i\omega t) = \underline{A} \exp(i\omega t)$$

Dérivation par rapport au temps :

$$\dot{\underline{Y}}(t) = i\omega \underline{Y}(t) = i\omega \underline{A} \exp(i\omega t), \quad \text{et} \quad \ddot{\underline{Y}}(t) = i\omega \dot{\underline{Y}}(t) = (i\omega)^2 \underline{A} \exp(i\omega t) = -\omega^2 \underline{A} \exp(i\omega t),$$

Pour le second membre : $f(t) = a \omega^2 \cos(\omega t)$ devient en notation complexe $\underline{f}(t) = a \omega^2 \exp(i\omega t)$

Soit en remplaçant dans $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a \omega^2 \cos(\omega t)$:

$$\ddot{\underline{Y}} + 2\lambda\dot{\underline{Y}} + \omega_0^2 \underline{Y} = a \omega^2 \exp(i\omega t)$$

$$\text{Soit } -\omega^2 \underline{A} \exp(i\omega t) + 2\lambda i \omega \underline{A} \exp(i\omega t) + \omega_0^2 \underline{A} \exp(i\omega t) = a \omega^2 \exp(i\omega t)$$

$$\text{En factorisant : } \underline{A}(-\omega^2 + 2\lambda i \omega + \omega_0^2) \exp(i\omega t) = a \omega^2 \exp(i\omega t)$$

$$\text{D'où } \underline{A}(-\omega^2 + 2\lambda i \omega + \omega_0^2) = a \omega^2$$

$$\text{Finalement, } \underline{A} = \frac{a \omega^2}{(-\omega^2 + 2\lambda i \omega + \omega_0^2)}$$

Avec $\underline{A} = A \exp(i\varphi)$, on a pour l'amplitude A des oscillations forcées de la masse :

$$A = |\underline{A}| = \left| \frac{a \omega^2}{(-\omega^2 + 2\lambda i \omega + \omega_0^2)} \right| = \frac{a \omega^2}{|-\omega^2 + 2\lambda i \omega + \omega_0^2|} = \frac{a}{\left| \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) + 2\lambda i \frac{\omega}{\omega^2} \right|} = \frac{a}{\left| \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) + 2\lambda i \frac{1}{\omega} \right|}$$

En introduisant la *pulsation relative* $u = \omega/\omega_0$, soit $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{u\omega_0}$, puis le *facteur de qualité* $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

$$A = \frac{a}{\left| \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + i \frac{2\lambda}{u\omega_0} \right|} = \frac{a}{\left| \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + i \frac{1}{Qu} \right|}$$

Amplitude A des oscillations forcées de la masse (C.Q.F.D.) :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$$

6) On note $D(u) = \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}$, avec $A = \frac{a}{\sqrt{D(u)}}$.

Le numérateur étant constant, A admet un maximum pour une valeur u_{max} de u telle que $D(u_{max})$ soit minimale, avec $\frac{dD}{du}(u_{max}) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dD}{du} &= -\frac{2}{u^3} \times 2 \times \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) - \frac{2}{Q^2 u^3} = -\frac{2}{u^3} \left(2 \times \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + \frac{1}{Q^2} \right) \\ \frac{dD}{du}(u_{max}) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{2}{u_{max}^3} \left(2 \times \left(\frac{1}{u_{max}^2} - 1 \right) + \frac{1}{Q^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{u_{max}^3} = 0 \\ 2 \times \left(\frac{1}{u_{max}^2} - 1 \right) + \frac{1}{Q^2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On recherche une valeur u_{max} finie, donnée par la deuxième équation, soit

$$2 \times \left(\frac{1}{u_{max}^2} - 1 \right) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{u_{max}^2} = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{max}^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}$$

Finalement, si $2Q^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude admet un maximum pour une valeur finie u_{max} telle que :

$$u_{max} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = Q \sqrt{\frac{2}{2Q^2 - 1}}$$

Il s'agit là de l'étude de la résonance en amplitude, qui a lieu pour une pulsation supérieure à la pulsation propre pour les facteurs de qualité suffisamment élevés (résonance soumise à condition).

7) Avec $1 - \frac{1}{u_{max}^2} = \frac{1}{2Q^2} = \frac{u_{max}^2 - 1}{u_{max}^2}$, on a $2Q^2 = \frac{u_{max}^2}{u_{max}^2 - 1}$, soit

$$Q = \frac{u_{max}}{\sqrt{2(u_{max}^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{u_{max}^2}\right)}}$$

A.N. avec $u_{max} = 1,2 = \frac{6}{5}$:

$$Q \approx \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{2}{1,2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 1,4}} = \frac{1}{\sqrt{0,6}} = \frac{5}{4}$$

$$Q \approx 1,25$$

De plus, avec $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$, $\lambda = \frac{\beta}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on a $\lambda = \frac{\beta}{2m} = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{2Q} \sqrt{\frac{k}{m}}$ soit $\beta = \frac{2m}{2Q} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Finalement, $\beta = \frac{1}{Q} \sqrt{km}$

A.N. : $\beta \approx \frac{4}{5} \sqrt{0,5 \times 0,2} \approx \frac{4}{5} \sqrt{0,1} \approx 4 \times \frac{0,3}{5} = \frac{1,2}{5} = \frac{2 \times 1,2}{10} = 0,24$

coefficient de frottement $\beta \approx 0,24$

8) Etude des limites :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(A(u) = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(A(u) = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}} \right) = a$$

Lorsque $u \ll 1$, soit $\omega \ll \omega_0$, $D(u)$ est très grande et l'amplitude A est très faible. Dans ce cas, les oscillations du boîtier sont suffisamment lentes pour que la masse m suive fidèlement ses mouvements sans oscillations : le ressort ne joue pratiquement aucun rôle, SM ne varie pas, le sismographe n'enregistre aucune oscillation.

Lorsque $u \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$, $D(u) \simeq 1$ et donc $A \simeq a$. Dans ce cas, les oscillations du boîtier sont rapides et la masse m se met à vibrer exactement en opposition de phase avec S (on a en effet alors $Y = -a$). Le sismographe enregistre alors très fidèlement les oscillations du sol.

9) D'après l'étude de la question précédente, pour un fonctionnement correct en sismographe, il faut choisir ω_0 de telle sorte à toujours avoir $u \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$, d'où $\omega_0 \ll \omega_{min} < \omega_{max}$.

10) $\dot{Y}(t) = i\omega Y(t) = i\omega A \exp(i\omega t) = \underline{V} \exp(i\omega t)$ soit

$$\underline{V} = i\omega A = \frac{i\omega a \omega^2}{(-\omega^2 + 2\lambda i\omega + \omega_0^2)} = \frac{a \omega^2}{\left(i\omega + 2\lambda + \frac{\omega_0^2}{i\omega}\right)} = \frac{a \omega^2}{\left(2\lambda + i\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

$$|\underline{V}| = \left| \frac{a \omega^2}{\left(2\lambda + i\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)} \right| = \frac{a \omega^2}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Exercice 7. CYCLOTRON

1) **Système** : particule chargée de charge q , étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids étant négligé devant la force électrostatique, dans la zone (1) où il y a \vec{E} seul, la seule force est : $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

TEC à la particule entre le point O et la limite de la zone (1) :

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = W(\vec{F}_E) = -\Delta E p_E = qU = qEd \text{ avec } v_0 = 0. \text{ (aussi : } W(\vec{F}_E) = \int q\vec{E} \cdot d\vec{OM} = qEd)$$

On a donc $v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$.

2) La particule rentre dans la zone (3) dans laquelle règne un champ B uniforme et permanent avec un vecteur vitesse orthogonal à B ; cf. cours : trajectoire circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega_c = \left| \frac{qB}{m} \right|$ et de vitesse $v_1 = R\omega_c$, soit

de rayon $R = \left| \frac{mv_1}{qB} \right|$.

3) **Système** : particule chargée de charge q , étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids étant négligé devant la force électrostatique, dans la zone (2) où il y a \vec{E} seul, la seule force est : $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

TEC à la particule entre le point d'entrée dans la zone (2) et la limite de la zone (2) :

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = W(\vec{F}_E) = -\Delta E p_E = qU = qEd \text{ avec } v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}. \text{ (aussi : } W(\vec{F}_E) = \int q\vec{E} \cdot d\vec{OM} = qEd)$$

On a donc $v_2^2 = v_1^2 + \frac{2qEd}{m} = \frac{4qEd}{m}$, soit $v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}$.

4) Hypothèse de récurrence : supposons la vitesse après n passages de la forme $v_n = \sqrt{\frac{n2qEd}{m}}$.

D'après les questions précédentes, cette relation est vérifiée pour $n = 1$ et 2 .

De plus, après le $(n+1)$ ème passage :

Système : particule chargée de charge q , étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids étant négligé devant la force électrostatique, dans la zone (1) ou (2) où il y a \vec{E} seul, la seule force est : $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

TEC à la particule entre le point d'entrée dans la zone et la limite de la zone :

$$\frac{1}{2}m(v_{n+1}^2 - v_n^2) = W(\vec{F}_E) = qEd, \text{ avec } v_n = \sqrt{\frac{n2qEd}{m}}, \text{ soit } v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2qEd}{m} = \frac{(n+1)2qEd}{m} \text{ et enfin}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{(n+1)2qEd}{m}}.$$

L'hypothèse de récurrence est donc validée : La vitesse après n passages est $v_n = \sqrt{\frac{n2qEd}{m}}$.

Après n passages dans une zone (1) ou (2), la particule effectue dans les zones (3) ou (4) un mouvement circulaire uniforme

de rayon $R_n = \left| \frac{mv_n}{qB} \right|$, à la vitesse $v_n = \sqrt{\frac{n2qEd}{m}}$.

5) Dans les zones (3) ou (4), la particule effectue un demi-cercle de rayon $R_n = \left| \frac{mv_n}{qB} \right|$, à la vitesse $v_n = \sqrt{\frac{n2qEd}{m}}$.

Durée du trajet : $t_n = \frac{\pi R_n}{v_n} = \frac{\pi m}{|qB|}$

Cette durée est indépendante du trajet n considéré, et donne accès au rapport $\left| \frac{q}{m} \right| = \frac{\pi}{t_n B}$.