TD CHAPITRE EM.1 : ELECTROSTATIQUE DU VIDE – PARTIE 2
POTENTIEL ELECTROSTATIQUE ET CONDENSATEURS

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A NE PAS COMMETTRE

1. Pour le calcul du potentiel électrostatique à partir du champ électrique, lorsque le choix du potentiel de référence n'est pas indiqué, attention à ne pas choisir une origine entrainant un potentiel qui diverge !
2. Lors des calculs du champ électrique à partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, attention à ne pas oublier le signe – après avoir calculé les dérivées associées au gradient !
3. Lors de l'exploitation des équations de Maxwell-Gauss ou de Laplace, attention aux calculs de divergence et de Laplacien.
4. Être rigoureux quant aux signes dans les calculs d'obtention de la capacité d'un condensateur.

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Particule chargée accélérée par un champ électrique IMPORTANT | 2 | 1

Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre.

On note V_1et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1$- V_2 la tension associée.

1- Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque.

2- La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

Exercice 2. Potentiel électrostatique - distributions de charge classiques IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

On rappelle les expressions des champs électrostatiques créés par les distributions ci-dessous, établis dans le précédent chapitre.

Pour ces différentes distributions, établir l'expression du potentiel électrostatique dont dérivent ces champs, avec les valeurs de référence données ci-dessous pour les potentiels. Les expressions des champs électriques établis précédemment sont rappelés.

Distribution	**Sphère chargée uniformément en surface (σ)**	**Sphère chargée uniformément en volume (ρ)**	**Fil infini uniformément chargé (λ)**	**Cylindre infini chargé en volume (ρ)**	**Plan $x = 0$ infini chargé (σ)**
Grandeurs caractéristiques	O = centre de la boule chargée R = rayon de la boule chargée	O = centre de la boule chargée R = rayon de la boule chargée	(Oz) = fil chargé H : projeté de M sur (Oz)	(Oz) = axe du cylindre R = rayon du cylindre H : projeté de M sur (Oz)	Plan Oyz = plan chargé H : projeté de M sur Oyz
Points de calcul	n'importe où sauf SUR la sphère : $r = OM \neq R$	n'importe où : r quelconque	n'importe où sauf SUR le fil : $r = HM \neq 0$	n'importe où : r quelconque	n'importe où sauf SUR Oyz : $x = \overline{HM} \neq 0$

Valeur de référence de V	$V(r \to +\infty) = 0$	$V(r \to +\infty) = 0$	$V(r_0) = 0$	$V(R) = 0$ Autre choix usuel : $V(0) = 0$	$V(z = 0) = V_0$
Champ $\vec{E}$	$r < R :\ \vec{E} = \vec{0}\,;$ $r > R : \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$	$r \leq R :\ \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\, \varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\, \varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$	$r \leq R :\ \vec{E} = \frac{\rho\, r}{2\, \varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$	$x > 0 :\ \vec{E} = \frac{\sigma}{2\, \varepsilon_0}\vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\, \varepsilon_0}\vec{e}_x$

Exercice 3. Apparition d'un arc électrique *(Oral Banque PT)* 1 | 0

Un arc électrique est un phénomène durant lequel un courant électrique apparaît et devient visible dans l'air.

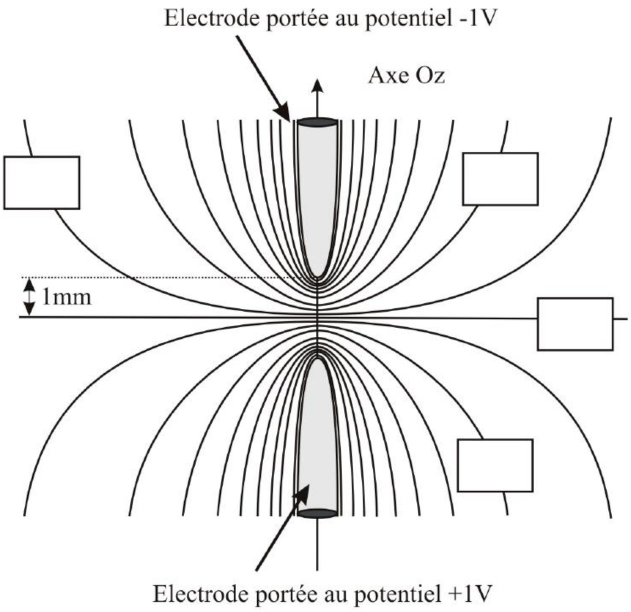
Ce phénomène explique aussi bien les étincelles dues à « l'électricité statique » que les éclairs des orages. L'air étant un milieu isolant, il faut que le champ électrique dépasse une valeur critique $E_c = 3{,}6\,.\,10^6$ V.m^{-1}, appelé champ disruptif, pour que l'arc électrique apparaisse. Plus précisément, un arc électrique peut se produire entre deux électrodes s'il existe un chemin reliant ces conducteurs métalliques tel qu'en chaque point le champ électrique dépasse la valeur disruptive.

On considère deux électrodes distantes de $d = 2$ mm.

1 - Estimer la tension minimale à imposer pour qu'un arc électrique apparaisse lorsque ces électrodes sont celles d'un condensateur plan.

On s'intéresse maintenant à 2 électrodes paraboliques.

Une carte de potentiel dans la zone des extrémités des électrodes est obtenue grâce à un logiciel de simulation. Dans la simulation, l'une est portée au potentiel d'1V et l'autre au potentiel de −1 V. La variation de potentiel entre deux équipotentielles est de 100 mV.



2 - Indiquer dans chacun des cadres la valeur du potentiel le long de l'équipotentielle étudiée.

3 - Superposer à la figure un réseau de lignes de champ électrique.

4 - On augmente progressivement la tension entre les électrodes. A quel endroit l'arc apparaîtra-t-il ?

Exercice 4. Equation de Maxwell-Gauss pour déterminer un champ électrique 1 | 2

Retrouver l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme par intégration directe de l'équation de Maxwell-Gauss.

On admettra par ailleurs la continuité du champ à la surface de la boule.

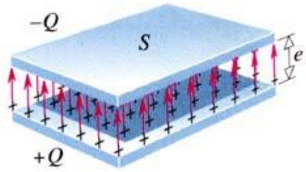
Donnée : Divergence en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,sin\theta}\left(\frac{\partial(a_\theta\,sin\,\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}$$

Exercice 5. Capacité d'un condensateur plan IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 1

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques planes de section S séparées par de l'air avec une distance $e \ll S$ entre elles, ce qui revient à considérer que les plans sont quasi infinis (du point de vue du condensateur). On assimilera l'air entre les armatures au vide, et on considèrera que les plaques métalliques sont des conducteurs parfaits (ces différentes hypothèses constituent le modèle du condensateur plan idéal).

On impose une différence de potentiel $U = V_A - V_B$ entre les 2 armatures de ce système ; les deux plaques portent alors des charges opposées $\pm Q$. On se propose d'utiliser différentes méthodes pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature de ce condensateur plan.



Pour chacune des méthodes ci-dessous, en déduire ensuite l'expression de la capacité du condensateur plan.

1) Méthode N°1 : Théorème de Gauss et théorème de superposition

a) En exploitant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique créé par la plaque conductrice de charge $+Q$.

b) En déduire l'expression du champ électrique régnant entre les armature de ce condensateur plan.

2) Méthode N°2 : équation de Maxwell Gauss

a) Montrer que le champ électrique régnant entre les armature de ce condensateur plan est de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$.

b) Exploiter l'équation de Maxwell Gauss pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature de ce condensateur plan.

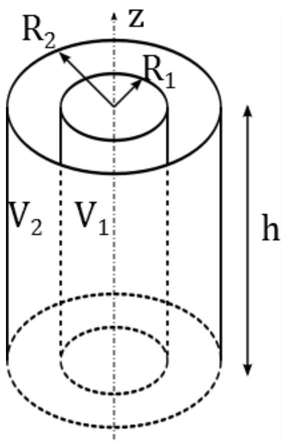
3) Méthode N°3 : équation de Poisson

Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature de ce condensateur plan.

Exercice 6. Capacité d'un condensateur cylindrique

IMPORTANT | 2 | 2

Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



1) Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

2) Vérifier que si l'épaisseur e ($e = R_2 - R_1$) entre les deux cylindres est très faible devant R_1, alors on retrouve la capacité d'un condensateur plan.

Exercice 7. Capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique

IMPORTANT | 2 | 1

Le but de l'exercice est de déterminer la capacité d'un condensateur plan (armatures de surface S, distantes de e) par une méthode énergétique. Le condensateur est supposé chargé, les armatures portant $+Q$ et $-Q$.

1- Rappeler ou calculer le champ électrostatique créé en M situé entre les armatures du condensateur en supposant que le champ est le même que si les armatures étaient infinies.

2- En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique en M.

3- Calculer l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur.

4- En déduire la capacité du condensateur plan après avoir rappelé la relation donnant l'énergie emmagasinée dans le condensateur en fonction de Q et C.

Exercice 8. Energie stockée dans une boule chargée uniformément en volume 2 | 2

On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges :

$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \qquad\qquad r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$$

1- Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

On s'intéresse à présent à la méthode dite constructive suivante : on suppose qu'on a déjà « construit » une boule de rayon $r \in [0, R]$ uniformément chargée avec une densité volumique de charges $\rho > 0$ et on amène une couche supplémentaire d'épaisseur infinitésimale $\mathrm{d}r$ chargée avec la même densité ρ.

2- Déterminer l'énergie nécessaire pour amener cette couche d'épaisseur $\mathrm{d}r$ depuis l'infini.

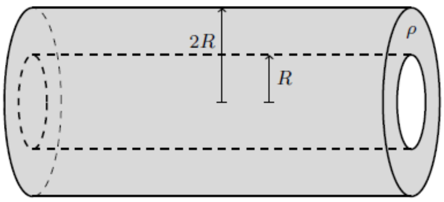
3- En déduire l'énergie totale nécessaire à la construction de cette boule. Conclure.

4- Par analogie, en déduire l'énergie stockée dans un astre (planète ou étoile). Commenter le résultat obtenu.

Exercices

Potentiel électrostatique

Exercice 9. Câble creux 1 | 2



On considère un câble creux (cylindre évidé) uniformément chargé : la densité volumique de charge vaut ρ (constante) entre R et $2R$, et est nulle ailleurs (cf. schéma : la partie chargée est la partie grise). On considérera que le câble a une longueur infinie. Le champ électrostatique créé est

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho(r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r} & \text{si R} < r < 2R \\ \dfrac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r} & \text{si } r \geq 2R \end{cases}$$

1- Déterminer le potentiel électrique en tout point de l'espace. On choisira le potentiel nul sur l'axe du cylindre.

2- Tracer le potentiel en fonction du paramètre adéquat.

Exercice 10. Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène *(Oral ATS 2021)* 2 | 2

Dans le modèle de Thomson, l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron supposé ponctuel, de charge négative $-e$ et d'une charge positive $+e$ (représentant le proton) répartie uniformément en volume dans une sphère de rayon r_0.

1. Déterminer en tout point M de l'espace le champ électrostatique crée par le proton seul.
2. Calculer le potentiel V de ce champ électrique.
3. Représenter la norme du champ ainsi que le potentiel.
4. Calculer l'énergie potentielle de l'électron soumis à un tel champ.
5. Déterminer la position d'équilibre de l'électron et en discuter la stabilité.

6. Le potentiel d'ionisation de l'électron est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome pris dans son état fondamental. Il s'exprime en électronvolts et vaut $V_i = 13{,}6$ eV. En déduire la valeur de r_0.

Données : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ \mathrm{m.F^{-1}}$ et $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

Exercice 11. Champ et potentiel créé par un noyau non uniformément chargé 2 | 3

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a.

Pour $r < a$, la charge volumique ρ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$\rho(r,\theta,\varphi) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, avec ρ_0, constante positive.

1. Exprimer la charge totale Q du noyau.
2. Etudier les invariances et les symétries de la distribution. En déduire l'orientation et les dépendances de champ électrique crée par cette distribution.
3. Déterminer l'expression du champ électrique à l'extérieur du noyau.
4. Même question à l'intérieur du noyau.
5. En prenant l'origine des potentiels à l'infini, calculer le potentiel électrostatique à l'extérieur du noyau.
6. Même question à l'intérieur du noyau.

Exercice 12. Potentiel de Yukawa *(Oraux ATS)* IMPORTANT | 2 | 3

L'atome d'hydrogène se compose d'un proton, supposé ponctuel, et d'un électron qu'on ne peut pas localiser dans l'espace. Cette situation peut être modélisée par une charge de l'électron qui serait répartie statistiquement autour du proton, avec une densité de charge $\rho(r)$ et donc une symétrie sphérique.

Nous allons tenter ici de retrouver ce modèle à partir de la donnée du potentiel électrique.

En notant $q = e = 1{,}6.10^{-19}$ C la charge élémentaire (charge d'un proton), on a proposé, pour le potentiel de l'atome :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}e^{-\frac{r}{a}}\ ;$$

où a est une constante positive et r est la distance entre l'électron et le proton.

1) Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace, en précisant son orientation.
2) Calculer son flux à travers une sphère de rayon r quelconque et de centre O. En déduire la charge $Q(r)$ contenue dans le volume de cette sphère.
3) Que vaut $Q(r)$ si $r \to 0$? interpréter ce résultat
4) Que vaut $Q(r)$ si $r \to +\infty$? Interpréter le résultat obtenu.

Dans une approche quantique de l'atome, l'électron ne peut plus être décrit comme une particule ponctuelle parfaitement localisée en un point *M* mais par une fonction d'onde, qui traduit la probabilité de le détecter autour de *M* : on note $\mathrm{P}(M)\,\mathrm{d}\tau$ la probabilité de détecter l'électron dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}\tau$ centré sur le point *M*. La densité volumique de probabilité de présence $\mathrm{P}(M)$ est reliée à la densité volumique de charge $\rho(M)$ par

$\rho(M) = q\ \mathrm{P}(M)$.

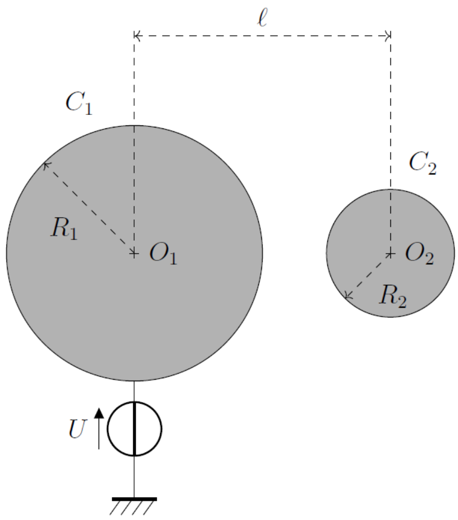
5) En exploitant l'expression fournie de la divergence et les propriétés du champ électrique, exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ et en déduire $\mathrm{P}(r)$.
6) Exprimer la probabilité de présence $\mathrm{d}p$ de l'électron dans la coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

7) Montrer que $P(r)$ est maximale en $r = a$. Que représente physiquement a ?

8) Calculer le potentiel V_0 créé en O par la seule distribution de charge $\rho(r)$ que l'on vient de déterminer. En déduire l'énergie potentielle de la charge située en O dans le champ de la distribution $\rho(r)$.

Exercice 13. Force exercée entre deux conducteurs sphériques *(J. Kieffer)* 2 | 1 ou 2

Un conducteur sphérique C_1 de rayon R_1 maintenu par un générateur au potentiel U interagit avec un autre conducteur sphérique C_2 isolé, de rayon R_2 et de charge totale Q. On supposera que la distance ℓ qui sépare les centres respectifs O1 et O2 de ces deux conducteurs est très grande devant leurs rayons : $R_1 \ll \ell$ et $R_2 \ll \ell$ de sorte que l'on pourra assimiler les deux conducteurs à deux charges ponctuelles.



Déterminer la force $\vec{F}$ exercée par C_2 sur C_1 en fonction des données de l'exercice.

Equations locales

Exercice 14. Floculation d'une suspension colloïdale – Ecrantage de Debye *(Oral Banque PT)*

2 ou 3 | 3

On s'intéresse aux mécanismes de traitement des eaux usées, et plus particulièrement à la floculation des particules colloïdales en solution aqueuse.

Document 1 : Phénomène de floculation

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à 1 µm) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible.

La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées flocs. Les flocs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

Adapté de Wikipédia

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O, de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont respectivement pour les cations et les anions :

$$n^+(r) = n_0 e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}} \qquad n^-(r) = n_0 e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}}$$

Où n_0 correspond à la densité moyenne constante, k_B à la constante de Boltzmann et T à la température, et q correspond à la charge en valeur absolue des ions : pour les cations, charge $+q = +ze$ avec $z = 2$ ou 3 en pratique, et pour les anions charge $-q$. On suppose $|qV| \ll k_B T$.

Donnée : Laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique : $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV)$.

1 - Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié, et la simplifier en tenant compte de $|qV| \ll k_B T$.

3 – Montrer que dans le cadre de cette approximation, le potentiel électrostatique V est de la forme $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\delta}}$ où A est une constante multiplicative qui sera déterminée ultérieurement. Préciser l'expression de la constante δ et donner sa signification physique.

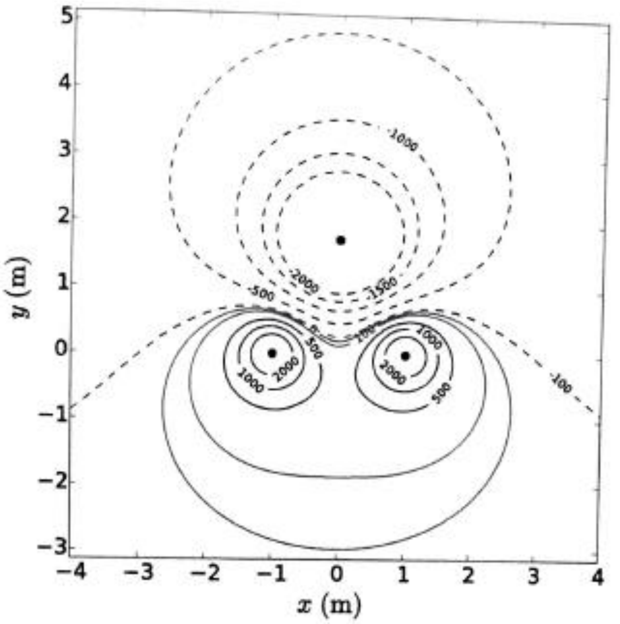
4 – En déduire l'expression du champ électrique et déterminer la constante multiplicative apparue dans l'expression du potentiel électrostatique V à l'aide du théorème de Gauss.

5 - Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.

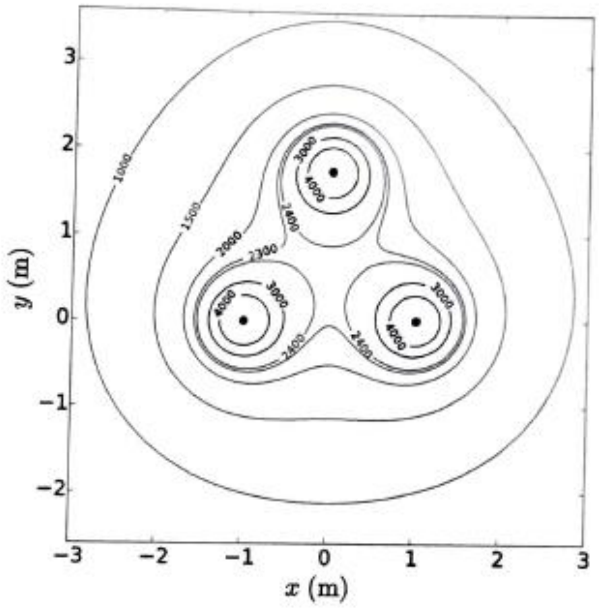
■ Cartes de champ

Exercice 15. Lorsque les cartes sont mélangées *(J'assure, Dunod, PT)* 2 | 1

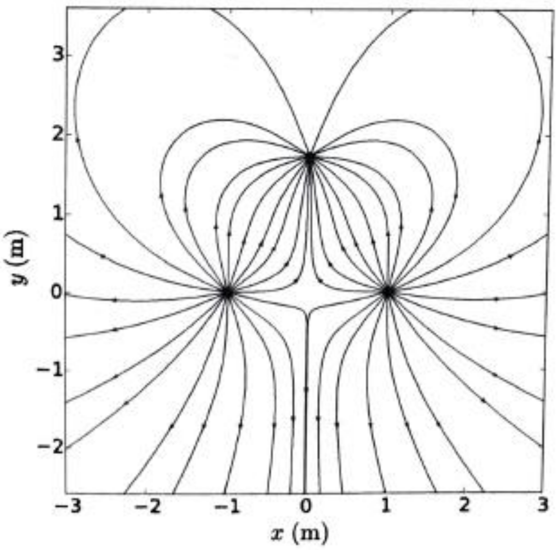
On s'intéresse à 4 distributions de charge correspondant pour chacune à trois charges ponctuelles (A, B, C) disposées sur un triangle isocèle :



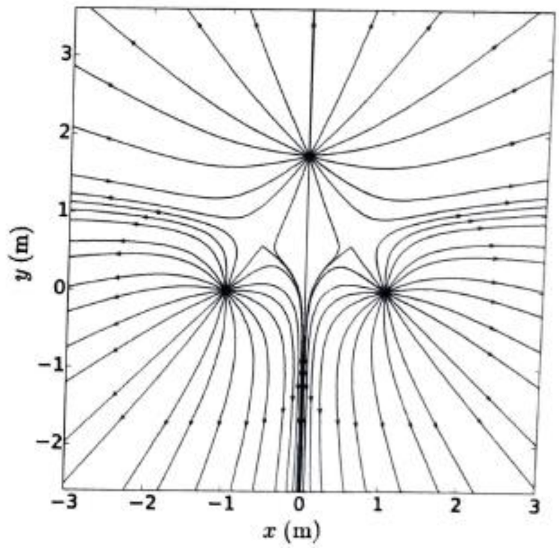
figure(a)



figure(b)



figure(c)



figure(d)

Distribution (1) : $(q; q; q)$;   Distribution (2) : $(q; q; 3q)$;

Distribution (3) : $(q; q; -q)$;   Distribution (4) : $(q; q; -3q)$;

Sur les différentes cartes ci-dessus sont tracées pour ces différentes distributions de charges les lignes de champ électrostatique et les équipotentielles (les équipotentielles en pointillés correspondant à des potentiels négatifs) dans le plan des charges.

Les valeurs des potentiels indiquées sur les graphes sont en Volt. On donne $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ F.m^{-1}.

2) En justifiant simplement, associer les figures (a), (b), (c) et (d) aux 4 distributions de charges. Indiquer dans chaque cas la position des charges.

3) Tracer l'allure de quelques lignes de champ pour la figure (b) et de quelques équipotentielles pour la figure (d).

4) En utilisant les graphes (a) ou (b), déterminer une valeur approchée de q.

5) Pour les figures (c) et (d), indiquer la localisation approximative des points de champ électrostatique nul, s'ils existent.

Condensateurs

Exercice 16. Orage   IMPORTANT | 2 | 1

On assimile un système nuage–Terre, lors d'un orage à un condensateur à air de surface $S = 7\ \mathrm{km}^2$ et d'épaisseur de diélectrique $e = 450\ \mathrm{m}$. On rappelle la permittivité absolue du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$.

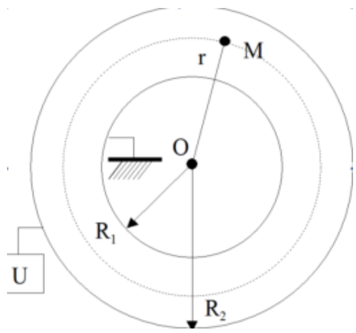
a. Calculer la capacité de ce condensateur en assimilant l'air au vide.

b. Calculer la tension maximale U_{dis} entre le nuage et la Terre sachant qu'un condensateur à air peut supporter un champ maximum E_{dis} de $3{,}4\ \mathrm{MV.m^{-1}}$ appelé champ disruptif.

c. Calculer l'énergie emmagasinée par le système.

d. Calculer la puissance libérée au cours de la décharge si celle-ci dure 9 ms.

Exercice 17. Capacité d'un condensateur sphérique   IMPORTANT | 2 | 2



Un condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques conductrices, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, séparées par de l'air assimilé à du vide. Grâce à une tension $U = V_2 - V_1$ imposée à leurs bornes, elles sont chargées électriquement en surface avec une charge $+Q$ pour R_2 et $-Q$ pour R_1 ; on considèrera que les densités de charge surfaciques sont uniformes.

1- Calculer la capacité d'un tel condensateur sphérique.

2- Vérifier que si l'épaisseur e ($e = R_2 - R_1$) entre les deux sphères est très faible devant R_1, alors on retrouve la capacité d'un condensateur plan.

Exercice 18. Capteur capacitif de niveau de liquide *(E. Thibierge)*   IMPORTANT | 2 | 2

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs, dont plusieurs sont présentés dans la vidéo ici. Cet exercice propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.).

Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible (cf. figure ci-dessous). Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

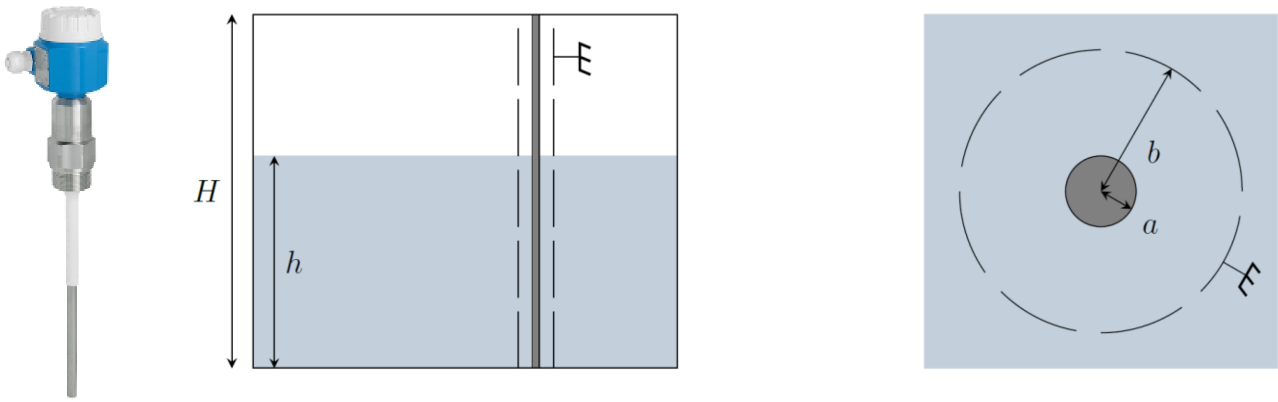


Figure : sonde à tube de masse

Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du liquide $\varepsilon_0\varepsilon_r$, où ε_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.

Données : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{z,r}\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.

3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.

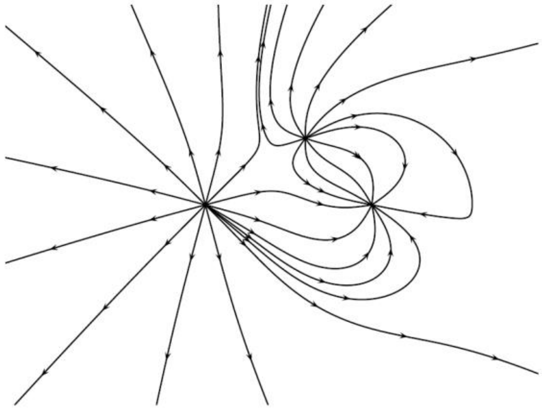
4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H.

5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

6 - La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (solution aqueuse par exemple) ?

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

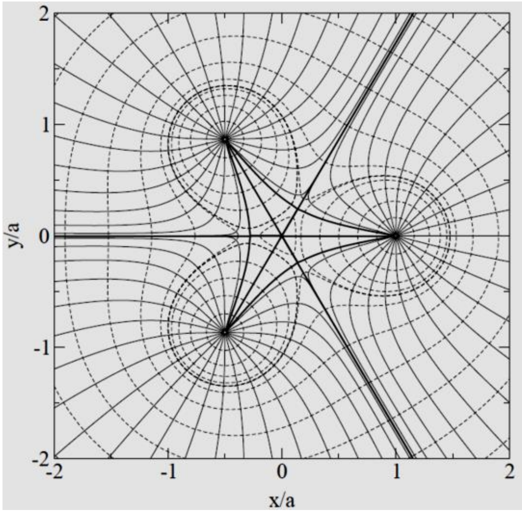
Exercice 19. Analyses de cartes de champ *(d'après CCP 2017)* 2 | 1



1) On donne la carte de champ d'une distribution inconnue.

a) Donner le nombre de charges et dire si elles sont positives ou négatives.

b) Comparer la valeur de la charge la plus à gauche à celle la plus à droite.



2) On donne la carte de champ correspondant à trois charges identiques $q > 0$ placées aux sommets d'un triangle équilatéral.

a. Orienter les lignes de champ.

b. Commenter l'allure de la carte de champ à proximité des points A, B et C.

c. Que pouvez-vous dire de la carte de champ loin des charges ?

d. Quelles sont les symétries de la distribution de charges ?

e. En quels points le champ électrique est-il nul ?

Exercice 20. Caractéristiques physiques de la Terre 2 | 2 ou 3

La planète Terre est assimilée à une sphère de rayon R. La longueur de l'équateur est L = 40.10^3 km. On suppose la seule force contribuant à la pesanteur est l'attraction newtonienne exercée par la Terre qui produit au niveau du sol un champ de gravitation $\mathcal{G}_0$ = 9,81 m·s^{-2}. On donne $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}.

1. Établir la formule donnant la masse volumique moyenne ρ_0 du globe terrestre en fonction de $\mathcal{G}_0$ et de L. Calculer numériquement ρ_0 ainsi que la masse M de la Terre.

L'expérience montre que la masse volumique de la croute terrestre est bien inférieure à la valeur précédemment calculée. Aussi suppose-t-on que la Terre est constituée d'un noyau central sphérique homogène de rayon r_2 et de masse volumique ρ_2 entouré d'une couche de masse volumique ρ_1.

2. Écrire la relation qui existe entre r_2, R, ρ_0, ρ_1 et ρ_2.

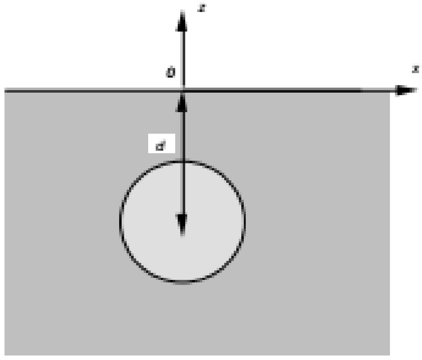
3. Calculer la valeur $\mathcal{G}$ du champ de gravitation en un point de la couche superficielle distant du centre de la Terre de $r \approx R$, ainsi que la variation $\delta\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}(r)$pour une petite variation $\delta r \ll r$ près du sol en fonction de δr, $\mathcal{G}_0$, R, ρ_0 et ρ_1.

4. Sachant qu'une horloge à pendule simple descendue au fond d'un puits de profondeur h = 195 m avance de ΔT = 1 s par jour, calculer la masse volumique ρ_1 de l'écorce terrestre.

5. L'étude de la propagation des secousses sismiques transversales montre que le noyau central commence à une profondeur H = 1300 km. Calculer la masse volumique de ce noyau.

Exercice 21. Anomalie de Bouger 💡 2 ou3 | 🛠 2 ou 3

Toute hétérogénéité dans le sous-sol terrestre apporte un écart à l'accélération de la pesanteur terrestre moyenne g_0. On appelle anomalie de Bouguer la valeur : $\Delta\vec{g}_B = \vec{g}_{mesuré} - \vec{g}_0$. La recherche de dômes de sel reste une façon de détecter les champs pétrolifères. Modélisons un dôme de sel par une boule de rayon R, de centre C et de densité ρ_1 = 2200 kg.m^{-3} noyée dans un sol homogène constitué de sédiments de densité ρ_2 = 2400 kg.m^{-3} et située à une profondeur d.



1. Déterminer l'anomalie de Bouguer verticale $\Delta g_{B,z}$ crée par ce dôme en un point $M(x\,;\ 0\,;\ 0)$ de la surface terrestre.

2. Une étude menée au-dessus d'un dôme de sel au Texas a permis les relevés gravimétriques suivants (les courbes représentées sont les courbes d'isoanomalie $-\Delta g_z$ en milligal (1 milligal = 10^{-5} m.s^{-2})).

   En utilisant le modèle précédent (forme, densités), estimer d et R.