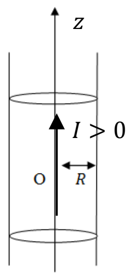
TD CHAPITRE EM.2 : CONDUCTION ELECTRIQUE

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Comme pour le vecteur $\vec{j}_m$, vous devez pouvoir définir le vecteur densité de courant $\vec{j}$ à partir de ce que représente son flux, et l'écrire ensuite en sachant à quoi correspondent n et $\vec{v}$.
2. Les problèmes étudiés le seront dans le cadre des régimes quasi-stationnaires.
3. Vous devez connaître les deux formes de la loi d'Ohm (locale et intégrale) et savoir faire le lien entre les deux.

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Distributions de courant volumiques IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 1



1) Un conducteur cylindrique infini de rayon R parcouru par une densité volumique de courant axial et uniforme tel que $\vec{j} = j_0\overrightarrow{e_z}$ est modélisé par un fil parcouru par un courant permanent d'intensité I. Exprimer l'intensité I en fonction de la densité volumique de courant $\vec{j}$.
2) Ce conducteur cylindrique est à présent parcouru par un courant permanent d'intensité I associé à un vecteur densité de courant non uniforme $\vec{j} = \alpha r^2 \vec{e}_z$. Déterminer l'expression de α en fonction de R et I.
3) Considérons un courant stationnaire et uniforme d'intensité I parcourant de façon radiale un conducteur à symétrie cylindrique de hauteur h et de rayon r. Exprimer la densité de courant volumique $\vec{j}$ en fonction des caractéristiques du problème.

Exercice 2. Vitesse d'ensemble des électrons dans le cuivre 1 | 1

Calculer la vitesse d'ensemble des électrons dans un fil de cuivre de section 1 mm^2 parcouru par un courant de 1 A. La densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de 10^{29} m^{-3}.

Exercice 3. Modèle de Drude IMPORTANT | 2 | 2

Le modèle de Drüde est un modèle microscopique simpliste du phénomène menant à la loi d'Ohm locale. Dans le cadre de ce modèle, on suppose que dans un conducteur électrique ohmique :

- des charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir sous l'action du champ $\vec{E}$;
- Lors de ce mouvement elles heurtent des charges fixes (ions du réseau métallique) : l'action de ces chocs est équivalente à une force de type frottement fluide notée $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où τ est une constante positive correspondant à un temps caractéristique et $\vec{v}$ la vitesse du porteur de charge. Le temps caractéristique τ est un paramètre phénoménologique appelé temps de relaxation, généralement de l'ordre de 10^{-14} s. Schématiquement, il correspond à la durée moyenne entre deux collisions de l'électron avec les cations du réseau cristallin.
- La relation fondamentale de la dynamique s'applique ici, en négligeant toute autre force

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen.
2) Résoudre cette équation en faisant apparaître une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$. Pourquoi peut-on raisonnablement considérer la vitesse initiale nulle ?
3) À quelle condition sur la tension imposée au cristal la durée du régime transitoire peut-elle être négligée ?

On admet alors que, le champ électrique étant uniforme, tous les porteurs de charge sont animés de la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, et qu'il y a n porteurs par unité de volume.

4) Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et montrer que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique. Par définition, le coefficient de proportionnalité correspond à la conductivité du milieu conducteur étudié, et ce résultat constitue la loi d'Ohm local.

5) En déduire la valeur de la conductivité σ en fonction de n, q, τ et m.

6) Application numérique :

- On donne pour le métal cuivre : chaque atome libère un électron ; masse molaire $M = 63{,}5$ g/mol ; masse volumique $\mu = 9\,000$ kg/m^3 ; conductivité $\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$;
- Pour le porteur électron : $m = 9.10^{-31}$ kg ; $q = -1{,}6.10^{-19}$ C ; constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}023.10^{23}$ mol^{-1}.

Calculer τ ; commenter la valeur numérique obtenue.

On applique désormais au métal **un champ électrique alternatif** de pulsation $\omega = 2\pi f$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi.

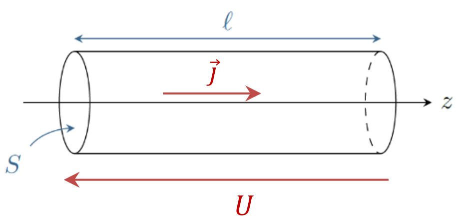
7) Réécrire l'équation du mouvement en représentation complexe, montrer que l'on peut définir un vecteur densité de courant complexe $\underline{\vec{j}}$ vérifiant $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ à condition de définir une conductivité complexe que l'on exprimera en fonction de n, e, m, τ et ω.

8) Montrer alors que la loi d'Ohm peut encore s'écrire sous la forme $\underline{\vec{j}} = \gamma_{statique}\underline{\vec{E}}$ dans une plage de fréquence à déterminer. Commenter la valeur numérique obtenue dans le cas du cuivre.

Exercice 4. Résistance d'un conducteur ohmique cylindrique

IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 2

Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

Exercice 5. De la forme locale à la forme globale de l'effet Joule

1 | 1 ou 2

1) Intégrer la puissance volumique d'effet Joule sur le volume d'un conducteur cylindrique afin de retrouver l'expression de la puissance RI^2 reçue et dissipée intégralement par une résistance.

2) Expliquer précisément le mécanisme de conversion énergétique

Exercice 6. Effet Hall (d'après *CCINP TPC 2021*)

IMPORTANT | 2 | 2

L'effet Hall repose sur le fait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subit la force dite de Lorentz.

Document 1 - Effet Hall classique
En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H, dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (**figure 1**). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

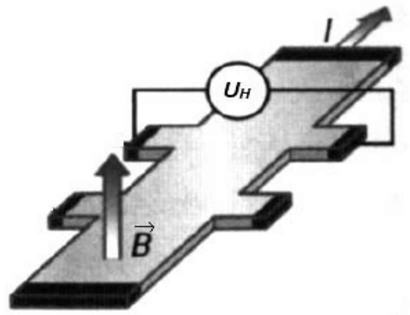


Figure 1 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

Cette résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ $\vec{B}$ et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

On soumet la plaque à un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u_z}$ uniforme et stationnaire (**figure 2**). On négligera le champ magnétique créé par le passage du courant dans le milieu.

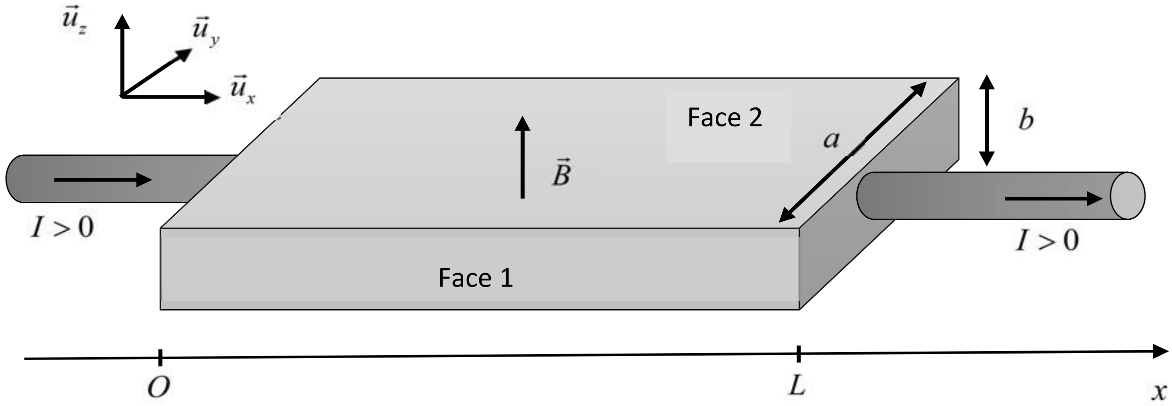
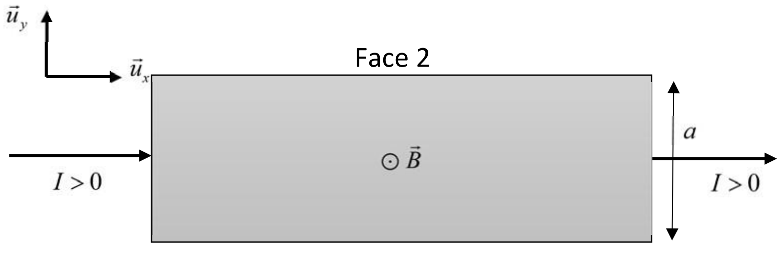


Figure 2 - Plaque conductrice en présence de champ magnétique

Sous l'effet de ce champ magnétique, il y a une accumulation d'électrons mobiles sur une face et, par conséquent, un défaut d'électrons sur l'autre face.

1. **Reproduire le schéma de la figure 3 ci-dessous**, en y faisant figurer les symboles $\oplus$ et $\ominus$ indiquant l'accumulation de charges positives et négatives sur les faces.

Figure 3- Plaque conductrice vue du dessus



2. Justifier alors l'apparition d'un champ électrique $\vec{E}_H$ orthogonal aux lignes de courant I. Dessiner sur **le schéma de la figure 3** l'allure des lignes de champ électrique correspondantes.

On suppose que la largeur de la plaque a est suffisamment faible pour que les lignes de courant restent parallèles à la direction Ox $\left(j_y = 0\right)$. Déterminer dans le cadre de cette hypothèse l'expression du champ transversal $\vec{E}_H$, en fonction de n_v, e, j, B et $\vec{u}_y$.

3. Établir alors l'expression de la différence de potentiel, appelée tension de Hall et notée U_H, entre les deux faces du parallélépipède parallèles au plan (xOz). En définissant une tension U_H positive, indiquer sa polarité sur la figure 3.

4. Montrer que la résistance Hall décrite dans le document 1 s'écrit :

$$R_H = \frac{B}{n_v e b}$$

Justifier les utilités d'une sonde à effet Hall décrites dans le document 2.

5. Application numérique : Déterminer quel serait l'ordre de grandeur de U_H pour mesurer le champ magnétique terrestre $B_T = 50\,\mu T$ avec une plaque en aluminium ($n_v \approx 2.10^{29}\,m^{-3}$) d'épaisseur $b = 0{,}1$ mm parcourue par un courant $I = 1{,}0\,A$. Commenter la valeur obtenue.
Les matériaux semi-conducteurs sont des matériaux dont la densité de porteur de charges est $n_{v\,sc} = 8.10^{24}\,m^{-3}$. Expliquer l'intérêt des semi-conducteurs pour des sondes à effet Hall permettant la mesure de champ magnétique.

EXERCICES

Exercice 7. Mouvement de porteurs 1 ou 2 | 1

Un fil de cuivre de section $s = 2{,}5\,mm^2$ est parcouru par un courant d'intensité $I = 10\,A$.

a. Combien d'électrons vont traverser une section de ce fil pendant une seconde ?

b. Évaluer la densité volumique n d'électrons libres en admettant que chaque atome de cuivre libère en moyenne un électron ?

c. En déduire la longueur L de fil dans laquelle se trouvent les électrons qui traversent la section en une seconde.

Données :
La charge de l'électron est supposée connue.
Masse molaire du cuivre : $M = 63{,}5\,g.mol^{-1}$; masse volumique du cuivre : $\mu = 8{,}96.10^3\,kg.m^{-3}$;
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}\,mol^{-1}$.

Rép. : $N = 6{,}25.10^{19}\,e^-$; $n = 8{,}49.10^{28}\,m^{-3}$; $L = 0{,}294\,mm$.

Exercice 8. Expression du vecteur densité de courant en régime stationnaire 1 | 2

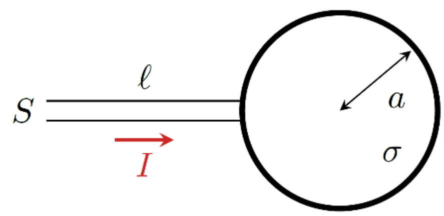
Montrer que dans les cas des régimes stationnaires et d'un conducteur à symétrie sphérique parcouru par un courant radial pour lequel $\vec{j} = j(r)\,\vec{u_r}$, l'équation locale de conservation de la charge conduit à la relation :

$$j = \frac{Cte}{r^2}.$$

On donne en coordonnées sphériques : $div\,\vec{j} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 j_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial j_\theta \sin\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial j_\varphi}{\partial\varphi}\right)$.

Exercice 9. Charge d'une sphère *(E. THibierge)* 1 | 2

Une sphère de rayon a est mise sous tension afin d'être chargée. Elle est supposée parfaitement conductrice : les charges ne peuvent subsister qu'à sa surface, avec une densité surfacique $\sigma(t)$ supposée uniforme à tout instant. Elles sont apportées par un fil de conductivité γ, de longueur ℓ et section S, parcouru par un courant d'intensité I, dont une extrémité est reliée à la sphère et l'autre à un générateur non représenté



sur le schéma. Le processus est supposé suffisamment lent pour que les résultats de l'électrostatique demeurent valables bien que σ dépende du temps.

1 - Dans un premier temps, on suppose que la charge se fait à courant I constant. Déterminer l'évolution de la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ en fonction du temps.

Dans un second temps, on suppose que c'est le potentiel V_0 imposé par le générateur qui demeure constant et non plus le courant I.

2 - Déterminer le champ créé par la sphère en tout point de l'espace. En déduire le potentiel V_s auquel se trouve la surface de la sphère en prenant comme référence $V = 0$ à l'infini.

3 - En reprenant la démarche de la première question, établir l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(t)$ et la résoudre.

Exercice 10. Temps de relaxation 2 | 2

On se place dans un conducteur de conductivité γ.

a. Rappeler la loi d'Ohm locale, l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation de conservation de la charge.

b. En déduire que l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité volumique de charge ρ présente dans le conducteur a pour expression :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

c. Résoudre cette équation différentielle et donner $\rho(M,t)$; on notera $\rho_0(M)$ la valeur de ρ en un point M à l'origine des dates $t = 0$.

d. Pour un point M quelconque de l'espace, tracer l'allure de la courbe $\rho(t)$ décrire le phénomène qui a lieu et en donner une caractéristique τ.

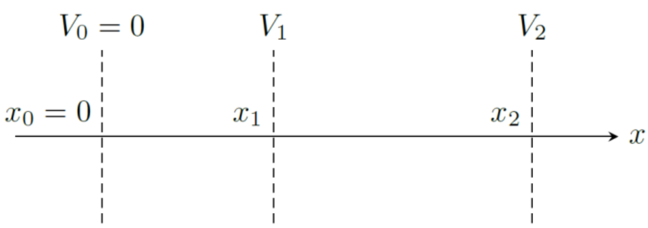
e. Analyse numérique : pour un bon conducteur classique : $\gamma = 10^6\ SI$; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}\ SI$.

Préciser les unités de γ et ε_0. Calculer τ. En déduire qu'un bon conducteur ne peut être chargé qu'en surface.

Exercice 11. Gravure ionique *(E. Thibierge)* 2 | 2

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système constitué de trois grilles métalliques, numérotées 0, 1 et 2.



Les trois grilles sont portées à des potentiels différents, contrôlables indépendamment les uns des autres, tels que $V_1 < V_2 < V_0 = 0$. Le potentiel $V(x)$ est partout négatif.

Le dispositif est traversé par un flux continu de cations identiques, tous de masse m et charge e, se propageant dans la direction x. On note $n(x)$ la densité volumique correspondante, c'est-à-dire le nombre de cations par unité de volume du faisceau. Les cations sont lâchés au niveau de la grille 0 avec une vitesse initiale négligeable.

1 - Déterminer la vitesse $v(x)$ d'un cation en fonction du potentiel $V(x)$ et montrer qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération au sein du dispositif.

2 - En utilisant la conservation de la charge, montrer que le vecteur densité de courant s'écrit sous la forme $\vec{j} = j_0\vec{e}_x$ avec j_0 une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

3 - Montrer que le potentiel $V(x)$ en présence du faisceau d'ions est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0$$

On admet que la résolution de cette équation différentielle dans le domaine $0 \leq x \leq x_1$ conduit à

$$V(x) = -\left(\frac{3x}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{j_0}{\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}$$

4 - En déduire que $j_0 = k|V_1|^{3/2}$, avec k une constante à déterminer.

5 - On place un substrat de section S immédiatement après la grille 2 dans l'axe du faisceau pendant une durée Δt. Le faisceau est supposé uniforme à l'échelle du substrat. Déterminer le nombre N de cations atteignant le substrat, et leur vitesse. Conclure sur le bon fonctionnement du dispositif, c'est-à-dire la possibilité de contrôler séparément les deux paramètres.

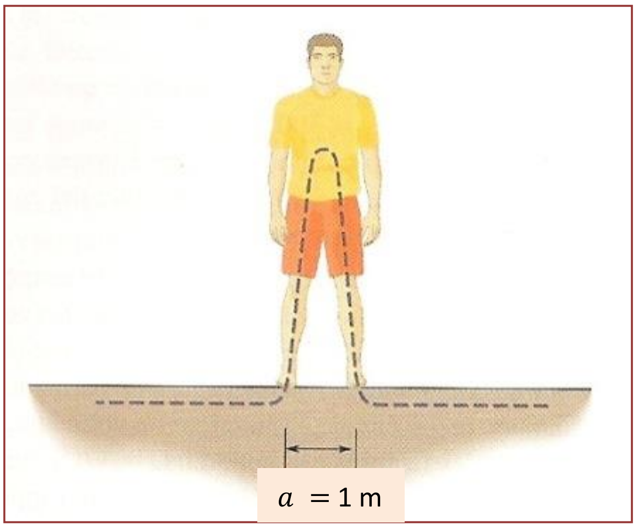
Remarque : *La solution donnée pour le potentiel V n'est valable que pour le domaine $0 \leq x \leq x_1$. En effet, la discontinuité du champ électrique de part et d'autre de la grille 1, liée à la présence de charges réparties en surface de la grille, modifie les conditions aux limites et donc la rend inopérante au-delà. Ainsi, contrairement à ce qu'une interprétation trop simple pourrait laisser croire, le potentiel V_2 de la grille 2 n'a pas d'influence sur j_0, qui est exclusivement fixé par la grille 1. En revanche, le champ électrique entre les grilles 1 et 2 dépend de j_0.*

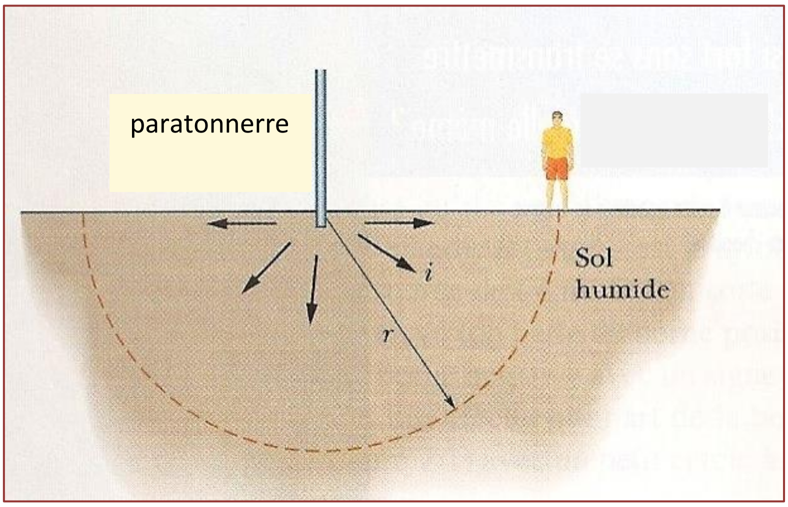
Exercice 12. Prise de Terre

IMPORTANT | 2 | 2

Une prise de terre est constituée d'une demi-boule de centre O et de rayon a, enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace $z < 0$, conducteur de conductivité $\sigma = 10^{-2}\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$. Elle est destinée à recevoir un courant d'intensité I =5.10[4] A en provenance d'un paratonnerre (cf. ci-dessous). Dans le sol, on suppose que la densité de courants est de la forme $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques.

1) On suppose les courants stationnaires pour simplifier le problème. En déduire que $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$.
2) Exprimer le champ électrique dans le sol et en déduire que son potentiel vaut $V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$.
3) A quelle distance minimale D_m de la prise de terre dans le plan $z = 0$ un homme doit-il être pour être certain que son corps soit traversé par un courant inférieur à $I_{max} = 25$ mA ? La résistance du corps humain entre ses deux pieds, distants de $a = 1$ m, est $R \approx 2{,}5$ kΩ.



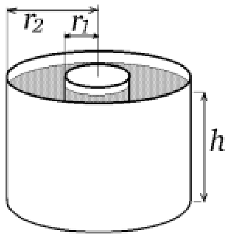


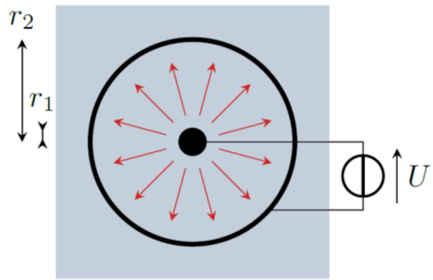
rép. : $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$; $V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$; $U_p(D) \sim \frac{Ia}{2\pi\sigma D^2}$; $D_m = \sqrt{\frac{aI}{2\pi\sigma R I_{max}}} \approx 110\ m$.

Exercice 13. Résistance d'une colonne cylindrique d'électrolyte IMPORTANT | 1 ou 2 | 1 ou 2

L'électrolyse est un processus fondamental en chimie. Parmi ses multiples applications, citons la métallurgie (production de métaux à partir de minerais) ou la production de dihydrogène « vert » à partir d'énergies renouvelables).

Cette technique étant très consommatrice en énergie, l'optimisation du rendement est essentielle. On modélise dans cet exercice un électrolyseur cylindrique et en particulier la chute ohmique qui est l'un des phénomènes affectant le rendement énergétique d'électrolyse.





Les deux électrodes de cet électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons respectifs r_1 et r_2 plongent sur une hauteur h dans une solution électrolytique de conductivité uniforme σ ; le fond est isolant. Une différence de potentiel $U = V_1 - V_2 = V(r_1) - V(r_2)$ positive est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint ; on admettra que la densité de courant dans la solution d'électrolyte est alors de la forme $\vec{j} = j_r(r)\,\vec{e}_r$ (système de coordonnées cylindriques).

1) Exprimer $j_r(r)$ en fonction de I, r et h, avec r rayon compris entre r_1 et r_2
2) En déduire l'expression du champ électrique au sein de la solution.
3) En déduire l'expression de la résistance de la solution électrolytique comprise entre les deux électrodes. Contrôler l'homogénéité.

Rép. : $R = \frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi h\,\sigma}$

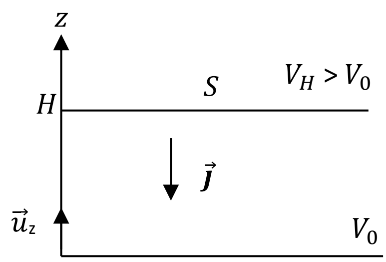
Exercice 14. Résistance de l'atmosphère terrestre | 2 | 1 ou 2

1) Modèle très simplifié

La Terre est supposée parfaitement sphérique. On notera $R_1 = R_T$ le rayon de la Terre et $R_2 > R_1$ le rayon extérieur de l'atmosphère supposée contenue entre deux couches sphériques.

L'état électrique de l'atmosphère par beau temps peut être décrit ainsi : le sol est à un potentiel $V_1 < 0$, tandis que l'atmosphère est à un potentiel $V_2 > 0$. L'atmosphère constitue un milieu faiblement conducteur de conductivité électrique σ compris entre R_1 et R_2. Calculer la résistance de l'atmosphère ainsi modélisé en fonction de σ, R_1 et R_2.

2) Modèle plus élaboré



En fait, la conductivité varie avec l'altitude z.

Pour en tenir compte, on effectue une étude locale, et on considère l'atmosphère comme le milieu contenu entre les armatures d'un condensateur plan : d'une part le sol au potentiel V_0, d'autre part un plan à l'altitude H symbolisant l'ionosphère au potentiel V_H, tel que $V_H > V_0$. On raisonne sur une surface en regard S. Un courant d'intensité I traverse verticalement l'atmosphère. Le courant de retour est assuré par les orages dont il ne sera pas question.

La conductivité électrique varie avec l'altitude selon $\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{z}{a}\right)$.

Données : $H = 50$ km ; $S = 5{,}09.10^{14}$ m^2 ; $I = 1\,500$ A et $a = 4$ km.

a) Définir le vecteur densité de courant en un point M de l'atmosphère en fonction de I et S.

b) Exprimer le champ électrique en fonction de l'altitude z.

c) Au niveau du sol, on mesure le champ électrique $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{u}_z$: on trouve $E_0 = -100$ V/m. Calculer σ_0.

d) Calculer la différence de potentiel entre le sol et le point d'altitude $z = 1{,}80$ m. Pourquoi un individu debout n'est-il pas électrocuté ?

e) Calculer la différence de potentiel $V_0 - V_H$ puis déduire la résistance R de l'atmosphère.

Exercice 15. Magnétorésistance *(d'après ATS)* 3 | 2

On considère un matériau conducteur comportant, par unité de volume, N ions positifs immobiles et N électrons libres, de charge $q = -e$, e étant la charge élémentaire.

On suppose que les N électrons ont à chaque instant la même vitesse $\vec{v}(t)$.

1. Donner la définition de la densité de courant $\vec{j}$ dans le cas général. Donner son expression dans ce matériau en fonction des données du problème.

On suppose que dans ce matériau les électrons en mouvement sont soumis à deux forces :

- la force de Coulomb engendrée par un champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un générateur extérieur,
- une force $-\lambda\vec{v}$ provenant des interactions entre les électrons et les ions fixes.

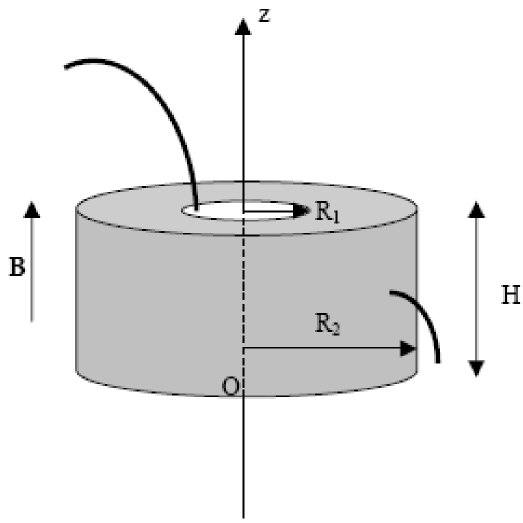
2. Etablir une équation différentielle liant $\vec{v}(t)$, $\vec{E}$, m et e.

3. Dans ces conditions, lorsque le régime permanent est atteint, démontrer que le matériau vérifie la loi d'Ohm locale et en déduire l'expression de sa conductivité σ en fonction de N, e et λ.

On suppose désormais que les électrons sont soumis en plus à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et indépendant du temps.

4. Etablir en régime permanent la relation reliant $\vec{j}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et en déduire que la loi d'Ohm locale n'est plus vérifiée par le matériau.

On considère deux cylindres, coaxiaux de rayons R_1 et R_2, d'axe (Oz), de hauteur commune H, parfaitement conducteurs (cf. figure 3). Le matériau précédent emplit l'espace entre les deux cylindres. La face intérieure du dispositif est portée au potentiel V_1. La face extérieure du dispositif est portée au potentiel V_2. En régime permanent, un courant I circule entre ces deux faces, par l'intermédiaire d'un fil relié à un générateur extérieur. Ce dispositif est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et indépendant du temps, dirigé suivant (Oz).



5. Déterminer la direction, le sens du champ $\vec{E}$ en un point P quelconque du matériau si on considère le cylindre comme infini. Donner l'allure des lignes de champ électrique dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et en supposant $V_1 > V_2$.

6. A partir de la relation trouvée à la question 4, déterminer en coordonnées cylindriques les composantes radiale et orthoradiale du vecteur $\vec{j}$ en un point quelconque du matériau. On exprimera $\vec{j}$ en fonction de la conductivité σ calculée à la question 3. Déduire l'allure des lignes de courant dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et en supposant $V_1 > V_2$.

7. En calculant le flux de $\vec{j}$ à travers la surface latérale d'un cylindre quelconque situé entre les cylindres limitant le matériau, exprimer la valeur de la résistance R du dispositif.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 16. Vitesse d'agitation thermique, vitesse moyenne des électrons libres 2 | 1

La vitesse d'agitation thermique des électrons à la température T est $v_{th} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, expression dans laquelle k est la constante de Boltzmann et m la masse de l'électron.

3) Calculer la vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons à $300\ K$.

4) Comparer cette vitesse à la vitesse moyenne v_{moy} des électrons libres dans un conducteur métallique de section $s = 1\ mm^2$ parcouru par un courant d'intensité $I = 1\ A$. La densité d'électrons libres est d'environ $n = 10^{29}\ m^{-3}$.

Données : $k = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$; $m = 9{,}1.10^{-31}\ kg$.

Rép. $v_{th} = 1{,}1.10^5\ m.s^{-1} \gg v_{moy} = 6{,}25.10^{-5}\ m.s^{-1}$.

Exercice 17. Conduction dans un semi-conducteur 1 ou 2 | 1

Dans un semi-conducteur, la conduction est assurée à la fois par des électrons et par des trous. Les électrons possèdent la charge électrique $-e$ $(e > 0)$ et la mobilité μ_n $(\mu_n > 0)$; leur concentration est n. Sous l'action d'un champ électrique de vecteur $\vec{E}$, leur vitesse de dérive est $\vec{v_n}$. Pour les trous, de charge $+e$ et de mobilité μ_p
$(\mu_p > 0)$, la concentration est notée p et le vecteur vitesse de dérive $\vec{v_p}$.

1. Déterminer à partir de son équation de définition $v = \mu E$ l'unité de la mobilité μ dans le système S.I.

2. Compte tenu du sens du déplacement des charges sous l'action de $\vec{E}$, écrire les relations entre $\vec{v_n}$ et $\vec{E}$ puis $\vec{v_p}$ et $\vec{E}$.

3. Déterminer l'expression du vecteur densité de courant total $\vec{j}$ en fonction de e, n, p, $\vec{v_n}$ et $\vec{v_p}$.

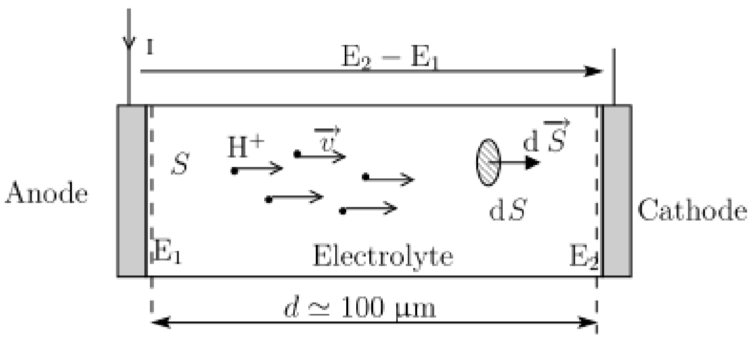
4. Déduire de ce résultat l'expression de la résistivité ρ du matériau en fonction de e, n, p, μ_n et μ_p.

5. Dans un semi-conducteur de résistivité $\rho = 1{,}17\ \Omega.m$, les densités d'électrons et de trous sont respectivement égales à $n = 10^{19}\ m^{-3}$ et $p = 10^{20}\ m^{-3}$. Déterminer μ_n et μ_p sachant que la mobilité des électrons est trois fois plus élevée que celle des trous.

Exercice 18. Etude de la conduction électrique dans un électrolyte (d'après ATS) 2 | 1

Une **pile à combustible** fonctionne grâce à l'oxydation sur une électrode (l'anode) d'un combustible réducteur ici le dihydrogène) couplée à la réduction sur l'autre électrode (la cathode) d'un oxydant, tel que l'oxygène de l'air. Elle est distincte de la pile électrique, qui fonctionne également par réaction d'oxydoréduction, mais qui est constituée d'empilements de métaux *(Wikipédia).*

Les électrons libérés par le dihydrogène sont canalisés par l'électrode et vont circuler de l'anode vers la cathode en traversant le circuit extérieur. Les protons H^+ vont diffuser de l'anode vers la cathode à travers l'électrolyte.



Principe de fonctionnement :
https://www.youtube.com/watch?v=OXitSA9YNcM
Utilisation :
https://www.youtube.com/watch?v=_aNzCiPy9Cg

L'électrolyte, dans le cas des piles à combustible PEMFC[1], est une membrane solide en polymère qui doit être en permanence humidifiée afin de permettre la migration des protons H^+. On s'intéresse uniquement dans cette partie au déplacement des protons H^+ dans l'électrolyte. Chaque proton de masse m_p porte une charge électrique +e. On note n la densité de protons H^+ en régime permanent. On note S la surface d'une électrode et d la distance les séparant. On note E_2 et E_1 les potentiels à l'interface entre l'électrolyte et respectivement la cathode et l'anode. Sous l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}$ de norme $(E_2 - E_1)/d$, tous les protons, initialement au repos, se déplacent avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ identique à la date t. On note $\overrightarrow{dS}$ le vecteur surface élémentaire (orthogonal à l'élément de surface dS).

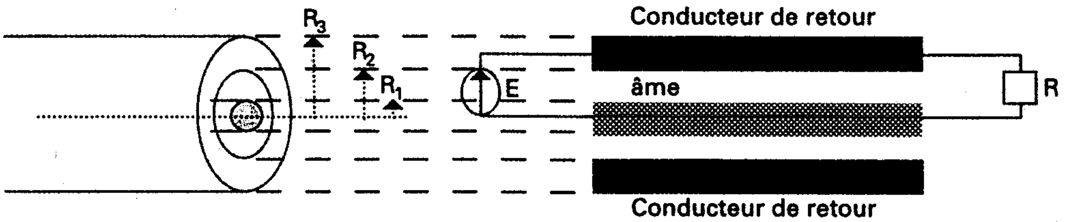
1. Déterminer en fonction de $e, n, \vec{v}$ et $\overrightarrow{dS}$ l'expression de la charge dq qui traverse l'élément de surface dS entre les instants t et $t + dt$. Illustrer d'un schéma.
2. Montrer que I peut être exprimé en fonction du flux d'un vecteur $\vec{j}$ à travers la surface $\overrightarrow{dS}$. On exprimera $\vec{j}$ en fonction de n, e et $\vec{v}$. Préciser son unité.
3. Dans une pile à combustible, la densité maximale de courant d'échange au niveau des électrodes est d'environ 1 A/cm^2. Pour la pile étudiée la surface des électrodes est $S = 100$ cm^2. Calculer l'intensité maximale délivrable par la pile.

On suppose que les protons H^+ lors de leur déplacement au sein de l'électrolyte subissent en plus de la force électrique des interactions modélisables par une force résistante du type $\overrightarrow{F_f} = -\frac{m_p}{\tau}\vec{v}$ dans laquelle τ est une constante de temps caractéristique du milieu.

4. En négligeant le poids des protons, déterminer l'expression de leur vitesse $\vec{v}$ en régime permanent.
5. Montrer que le courant électrique correspondant se met sous la forme $I = (E_2 - E_1)/R$ où R est la résistance électrique de l'électrolyte.
6. La chute de tension ohmique dans l'électrolyte est d'environ 100 mV. Calculer la résistance puis la résistivité de l'électrolyte.

Exercice 19. Résistance d'un câble coaxial 2 | 2

1) Retrouver à partir de la loi d'Ohm locale l'expression de la résistance d'un tronçon de conducteur cylindrique et homogène, de longueur L et de section S.
2) Calculer alors la résistance, dite linéique (c'est à dire pour un mètre de longueur de câble), d'un câble coaxial (type câble de télévision) en cuivre avec :
   - le rayon du conducteur central ou âme : R_1 = 0,58 mm ;
   - les rayons du conducteur extérieur de retour : R_2 = 10 mm et R_3 = 10,5 mm ;



[1] Les **piles à combustible à membrane échangeuse de protons**, connues aussi sous le nom de **piles à combustible à membrane électrolyte polymère** (**PEMFC**, pour l'anglais *proton exchange membrane fuel cells* ou *polymer electrolyte membrane fuel cells*) sont un type de piles à combustible développé pour des applications aussi bien stationnaires qu'embarquées. Leurs caractéristiques propres incluent un fonctionnement à basse pression et basse température, ainsi que l'emploi d'une membrane électrolyte polymère spécifique, formant la membrane échangeuse de protons.

les liaisons entre un générateur et un récepteur par l'intermédiaire du coaxial se faisant selon le schéma de la figure ci-dessus.

Réponses : $R_l = 5.10^{-4}\ \Omega.m^{-1}$

Exercice 20. Noyau radioactif β^- 3 | 2

On considère une source (très petite, en O, centre d'un repère sphérique), de césium 137 radioactif β^- :

$$^{137}_{55}Cs \rightarrow {}^{0}_{-1}e^- + {}^{137}_{56}Ba^+$$

Chaque désintégration émet donc un électron.

Son activité (nombre de désintégrations par seconde) est $A = 0{,}19\ MBq$.

Le becquerel (symbole : Bq) est l'unité dérivée du système international pour l'activité d'une certaine quantité de matière radioactive, il est homogène à l'inverse d'une seconde.

1) Quelle est l'intensité I qui traverse une sphère de centre O ? Application numérique.

2) Exprimer dans le repère sphérique la densité volumique de courant $\vec{j}$. Que vaut numériquement $\|\vec{j}\|$ à $r = 10$ cm de la source ?

Exercice 21. Accident de pêche (Oral Central MP) 3 | 2

Avec sa canne à pêche, un pêcheur touche une ligne à haute tension $U_{max} = 10$ kV. On modélise la canne à pêche comme schématisé figure 1 par un cône creux d'épaisseur 0,5 mm et de longueur 10 m, fait d'un métal de conductivité $\sigma = 1.10^6$ S.m^{-1}.

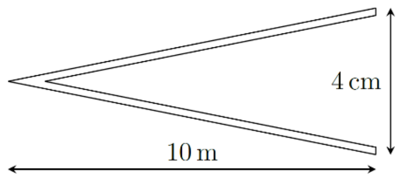


Figure 1 – Schéma géométrique de la canne à pêche

1 - Justifier que l'on peut se placer dans l'ARQS.

2 - Rappeler la résistance d'un échantillon métallique de longueur L, de section S et de conductivité σ. En déduire la résistance de la canne à pêche. Commenter.

3 - Déterminer le courant traversant le pêcheur, assimilé à une résistance de 3 kW.

4 - Ce pêcheur est cardiaque, doté d'un pacemaker, qui ne peut résister qu'à des champs électriques inférieurs à 10 kV.m^{-1} et des champs magnétiques inférieurs à 100 µT. Si le pêcheur survit, le pacemaker sera-t-il endommagé ?

Exercice 22. Décharge d'une sphère chargée *(J. Le Berre)* 2 | 1

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R, uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge q_0 se décharge, on note $q(t)$ la charge que porte cette sphère à l'instant t. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité γ : la densité de charge électrique est nulle dans l'air et la densité de courant $\vec{j}$ est fournie par la loi d'Ohm locale. L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte les coordonnées sphériques de centre O. On suppose le champ magnétique nul et le champ électrique dans l'air égal à $\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$.

1. Donner l'expression de la densité de courant dans l'air.
2. Déterminer $q(t)$ en fonction de $q_0, \gamma, \varepsilon_0$ et t.
3. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles pus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

Exercice 23. Approche probabiliste du modèle de Drude *(J. Le Berre)* 2 | 2

En 1900, Paul Drude proposa un modèle permettant d'expliquer les propriétés de conduction électrique et thermique des métaux. Dans ce modèle, on considère que les électrons de conduction forment un gaz de particules classiques de masse m et de charge $-e$. Les électrons effectuent des collisions, considérées comme instantanées. Ils sont supposés indépendants (pas d'interaction électron-électron entre les collisions) et libres (pas d'interaction avec les ions entre les collisions). Drude attribua les collisions aux chocs entre les électrons et les ions, plutôt qu'aux chocs entre les électrons entre eux comme pour un gaz ordinaire. À l'issue d'une collision, la vitesse de l'électron a une direction aléatoire (pas de direction privilégiée), et une valeur liée à la température à l'endroit où a lieu la collision.

Le paramètre fondamental du modèle de Drude est le **temps de collision $\boldsymbol{\tau}$** ou temps de relaxation (ou encore temps de vol de l'électron). Il représente la durée moyenne entre deux collisions. En d'autres termes, pour un électron donné, la probabilité de subir une collision pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est dt/τ.

1. Montrer que pour un électron donné observé à partir du temps $t = 0$, la probabilité $P(t)$ de ne pas subir de collision avant l'instant t est $\exp(-t/\tau)$.

2. Quelle est la probabilité $dp(t)$ pour un électron ayant subi une collision à l'instant $t = 0$ subisse sa prochaine collision entre t et $t + dt$?

3. Retrouver que τ est bien la durée moyenne entre deux collisions. On donne le résultat suivant

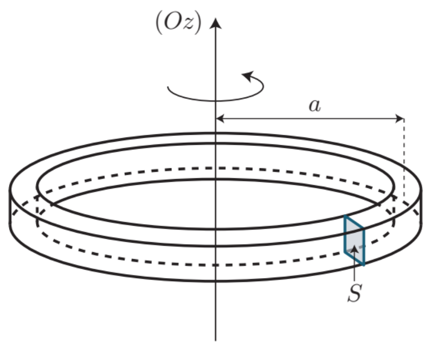
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \ (n > 0 \ et \ a > 0)$$

4. On soumet le métal à un champ de force extérieur, et on note $\vec{F}(t)$ la force subie par chaque électron. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse moyenne $\vec{v}$ d'un électron. On pourra raisonner sur la quantité de mouvement moyenne par électron $\vec{q} = m\vec{v}$, définie par $\vec{q} = \overrightarrow{Q}/N_0$ où $\overrightarrow{Q}$ est la quantité de mouvement totale du système d'électrons et N_0 le nombre total d'électrons.

Exercice 24. Expérience de Tolman et Stewart (1916) *(J. Le Berre)* 2 | 2

L'expérience de Tolman et Stewart fut mise au point afin de vérifier que les électrons (de charge $q = -e$) étaient bien les porteurs de charges mobiles impliqués dans la conductivité des métaux.

Cette expérience consiste schématiquement à mettre un anneau métallique en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire ω. À $t = 0$, l'anneau est brusquement stoppé et pour $t > 0$, un courant $i(t)$ décroissant est observé dans celui-ci.

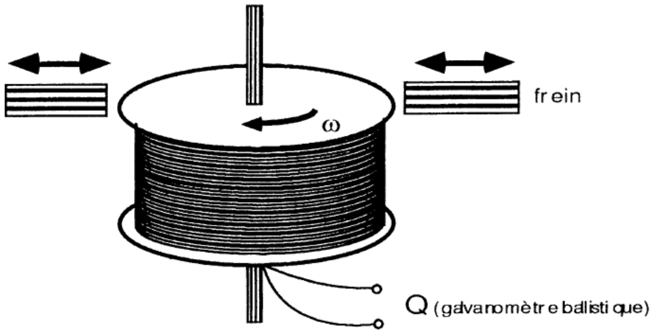


L'anneau est en cuivre, de conductivité $\gamma(Cu)$ = 5,9.10^7 S·m^{-1} et de temps de relaxation $\tau = 2{,}4.10^{-14}$ s, de rayon a et de section s suffisamment petite pour pouvoir négliger tout mouvement radial des porteurs de charge.

1. En utilisant le modèle de Drude, déterminer la vitesse $v(t)$ des porteurs de charge en fonction de a, ω, t et τ.

2. En déduire le courant $i(t)$ circulant dans l'anneau à $t > 0$.

3. Tolman et Stewart mesurèrent à l'aide d'un galvanomètre balistique, la charge électrique totale Q circulant dans le circuit de $t = 0$ à $t \to \infty$. Déterminer cette charge Q en fonction de γ, a, S, ω, de la masse m et de la charge q des porteurs de charges. Montrer que le rapport $\frac{Q}{\gamma a S \omega}$ ne doit dépendre que de caractéristiques intrinsèques des porteurs de charge (le rapport trouvé ici était déjà connu à l'époque pour l'électron depuis les expériences de J.J. Thomson en 1897).



Expérience de Tolman et Stewart (schéma)