

# TD CHAPITRE EM.1 : ELECTROSTATIQUE DU VIDE – PARTIE 1

## ■ CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A NE PAS COMMETTRE

1. Dans l'étude des plans de symétrie et d'antisymétrie afin de simplifier l'expression du champ électrique, il est primordial de n'étudier que des plans passant par le point M où l'on cherche à exprimer le champ.
- ⚠ 2. Dans l'utilisation du théorème de Gauss, attention à la définition d'une surface de Gauss adaptée ! elle doit passer par le point M étudié, et permettre un calcul simple du flux.
3. Attention à correctement distinguer les cas de figure dans l'application du théorème de Gauss (par exemple pour les sphères,  $r > R$  ou  $r < R$ ).
4. Lors du calcul direct du champ électrique par superposition pour les distributions simples, ne pas oublier qu'il s'agit d'une somme de vecteurs !
5. Il faut systématiquement valider les expressions obtenues : homogénéité, cohérence des signes, existence des discontinuités attendues pour les surfaces chargées, etc.

## ■ APPLICATIONS DE COURS

### Exercice 1. Ordre de grandeur d'une densité de charge dans un métal 2 | 1

Considérons un fil de cuivre de section d'un micromètre carré et de longueur un micromètre (masse molaire du cuivre : 63,5 g/mol ; masse volumique :  $8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ). En supposant que chaque atome libère un électron, déterminer le nombre d'électrons libres.

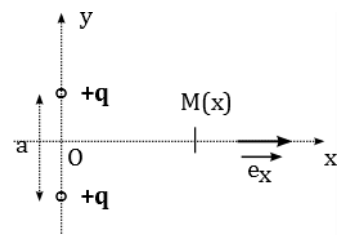
### Exercice 2. Calculs de charge IMPORTANT | 1 | 2

Calculer la charge totale portée par :

- 1) un anneau circulaire de rayon  $R$  uniformément chargé avec une densité linéique de charge  $\lambda$ .
- 2) un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec une densité superficielle de charge  $\sigma$ .
- 3) une boule de rayon  $R$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho$ .
- 4) Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho$ .

### Exercice 3. Calcul du champ électrostatique créé par 2 charges ponctuelles identiques [oral ATS] IMPORTANT | 2 | 2

Calculer le champ électrostatique créé par deux charges  $+q$ , séparées d'une distance  $a$ , en  $M(x, 0)$  situé sur la droite perpendiculaire au segment  $(+q, +q)$  et passant par le milieu de ce segment.



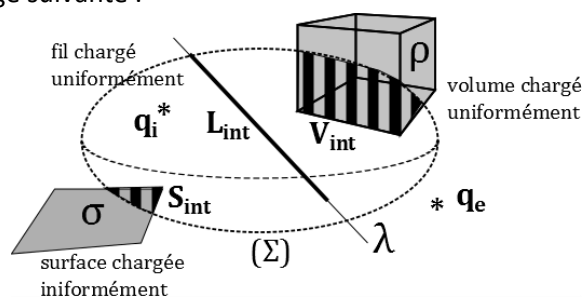
### Exercice 4. Caractéristiques du champ électrostatique créé par différentes distributions 2

- 1) On s'intéresse au champ électrostatique créé en  $M(x, y, z)$  par le plan  $Oxy$  chargé uniformément avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . Etudier les symétries et invariances de la distribution et en déduire les caractéristiques du champ électrostatique créé en un point M quelconque.

- On appelle dipôle électrostatique l'ensemble formé par une charge  $+q$  et une charge  $-q$  étudiées à grande distance (séparées d'une distance  $a \ll r$  avec  $r$  la distance entre le point M étudié et la distribution de charges). Un exemples pratique classique est celui des molécules polaires en chimie (dont la plus célèbre est l'eau). Rechercher les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution de charges, en déduire les caractéristiques du champ électrique pour certains points particuliers.
- On s'intéresse au champ électrique créé par un cylindre infini, chargé en volume uniformément. On repère les points en coordonnées cylindriques,  $Oz$  étant l'axe du cylindre chargé. Rechercher les plans de symétrie et les invariances de cette distribution de charges, ainsi que les caractéristiques du champ électrique en un point M quelconque.

### Exercice 5. Charge intérieure 1 | 1

- Déterminer la charge intérieure contenue dans une sphère de rayon  $r$  quelconque dans le cas d'une distribution de charge correspondant à une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge  $\rho$  uniforme.
- Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est créé par la distribution de charge suivante :
  - deux charges ponctuelles  $q_i, q_e$
  - un fil uniformément chargé ( $\lambda$ )
  - une surface uniformément chargée ( $\sigma$ )
  - un volume uniformément chargé ( $\rho$ )



Déterminer la charge intérieure associée à la surface fermée ( $\Sigma$ ) représentée sur le schéma.

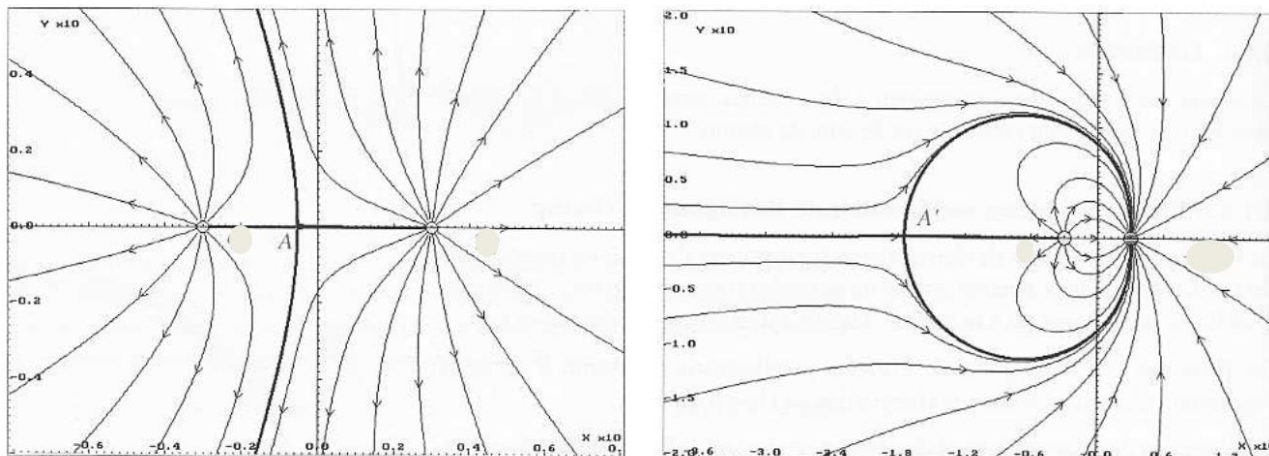
### Exercice 6. Théorème de Gauss - distributions de charge classiques IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 3

- Etablir à l'aide du théorème de Gauss les champs électrostatiques créés par les distributions ci-dessous.
- Pour ces différentes distributions, après avoir établi les expressions des champs électrostatiques, établir l'expression du potentiel électrostatique dont dérivent ces champs, avec les valeurs de référence données ci-dessous pour les potentiels.
- Vérifier que les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday sont satisfaites en tout point de calcul  $M$ .

Distribution	Sphère chargée uniformément en volume	Sphère chargée uniformément en surface	Fil infini	Cylindre infini chargé en volume	Plan infini chargé
Densité de charge	Volumique $\rho$	Surfacique $\sigma$	Linéique $\lambda$	Volumique $\rho$	Surfacique $\sigma$
Grandeurs caractéristiques	$O$ = centre de la boule chargée $R$ = rayon de la boule chargée	$O$ = centre de la boule chargée $R$ = rayon de la boule chargée	$(Oz)$ = fil chargé $H$ : projeté de $M$ sur $(Oz)$	$(Oz)$ = axe du cylindre $R$ = rayon du cylindre $H$ : projeté de $M$ sur $(Oz)$	Plan $Oyz$ = plan chargé $H$ : projeté de $M$ sur $Oyz$
Points de calcul	n'importe où : $r$ quelconque	n'importe où sauf SUR la sphère : $r = OM \neq R$	n'importe où sauf SUR le fil : $r = HM \neq 0$	n'importe où : $r$ quelconque	n'importe où sauf SUR $Oyz$ : $x = \overline{HM} \neq 0$

## Exercice 7. Cartes de champs 2 | 1

Indiquer le nombre de charges ainsi que leurs positions, le signe de ces charges, et comparer la valeur relative des charges présentées sur la carte.



### ■ VRAI OU FAUX

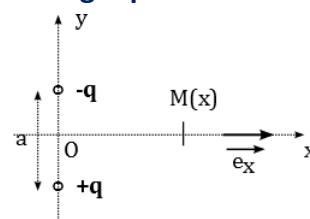
- La charge d'une distribution volumique uniforme est  $Q = \rho V$ .
- Le champ électrostatique est homogène à une charge divisée par ( $\epsilon_0 \times$  distance au carré).
- Les invariances d'une distribution de charge permettent d'obtenir la direction du champ électrostatique.
- Un plan de symétrie qui ne passe pas par le point  $M$  où l'on veut connaître le champ n'est d'aucune utilité.
- Le champ électrostatique est à flux conservatif.
- Les lignes de champ électrostatique se referment sur elles-mêmes.

### ■ EXERCICES

#### ■ Champ $\vec{E}$ créé par une distribution ponctuelle

### Exercice 8. Calcul du champ électrostatique créé par une distribution simple de charges ponctuelles deux charges ponctuelles opposées 2 | 3

Calculer le champ électrostatique créé par deux charges  $+q$  et  $-q$ , séparées d'une distance  $a$ , en  $M(x, 0)$  situé sur la droite perpendiculaire au segment  $(+q, -q)$  et passant par le milieu de ce segment.



#### ■ Théorème de Gauss

### Exercice 9. Champ électrostatique créé par une couche plane épaisse 2 | 3

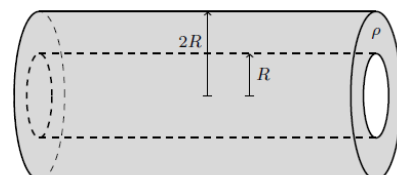
Une couche plane comprise entre les plans  $z = -a$  et  $z = +a$  porte des charges avec une densité volumique  $\rho$  uniforme. On repère la position d'un point  $M$  de l'espace par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

- Quelle est, dans la base cartésienne, la direction du champ  $\vec{E}$  créé en  $M$  ?
- Quelle est la dépendance de  $\vec{E}$  vis-à-vis des coordonnées  $x, y$  et  $z$  ?

- c. En déduire par application du théorème de Gauss le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en  $M$ . On distinguera les cas  $|z| \leq a$  et  $|z| \geq a$ .
- d. Tracer l'allure du graphe  $E_z(z)$ .
- e. On suppose que  $a \rightarrow 0$  et que le produit  $\rho \cdot a$  reste égal à une constante. Définir une densité surfacique de charge limite et retrouver pour  $E_z(z)$  le résultat classique.

**Exercice 10. Câble creux** (O. Alloschery)  2 |  2

On considère un câble creux (cylindre évidé) uniformément chargé : la densité volumique de charge vaut  $\rho$  (constante) entre  $R$  et  $2R$ , et est nulle ailleurs (cf. schéma : la partie chargée est la partie grise). On considérera que le câble a une longueur infinie.



- Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
- Tracer la norme du champ électrique en fonction du paramètre adéquat.

**Exercice 11. Cavité sphérique** (Oral ATS 2021)  3 |  2

Soit une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , avec une densité volumique de charge volumique  $\rho$  uniforme.

- Calculer le champ et le potentiel électriques en tout point.
- On ajoute une cavité sphérique de centre  $C$ . Calculer le champ électrique en tout point de la cavité.
- Par analogie, calculer le champ gravitationnel d'un astre sphérique de masse volumique  $\mu$  (assimilé à une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ ) où il existe une grotte (assimilé à une sphère de centre  $O'$  de rayon  $r$ ).

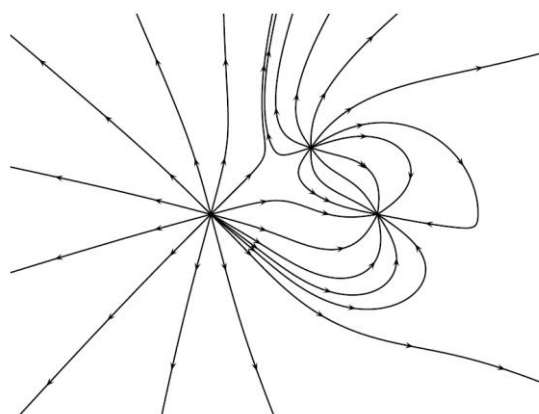
**Cartes de champ**

**Exercice 12. Analyses de cartes de champ** (d'après CCP 2017)

 2 |  1

On donne la carte de champ d'une distribution inconnue.  
Donner le nombre de charges et dire si elles sont positives ou négatives.

- Comparer la valeur de la charge la plus à gauche à celle la plus à droite.



**Gravitation**

**Exercice 13. Champ gravitationnel d'un astre non homogène**

La Terre, sphère de rayon  $R$  et de masse  $M$ , a sa masse volumique qui varie en fonction de la distance  $r$  au centre selon la loi :  $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - k \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

Exprimer le champ de gravitation en tout point  $P$  extérieur ou intérieur au globe terrestre en fonction de  $G, M, R, r$  et  $k$ .

**Exercice 14. Champ de pression dans une étoile**

On assimile une étoile à une sphère de rayon  $R_0$ , de masse  $M$  et de masse volumique  $\rho$  constante, constituée d'hydrogène atomique gazeux que l'on peut considérer comme un gaz parfait.

Le fluide se trouve en équilibre hydrostatique. On rappelle que la constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \text{ USI}$ .

- 1) Calculer le champ de gravitation  $\vec{g}(r)$  pour  $r < R_0$ .
- 2) Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides. Calculer la pression  $P(r)$  dans l'étoile. En déduire l'expression de la pression en O, puis celle de la température en ce point.
- 3) Faire les applications numériques pour le soleil sachant que  $R_0 = 6,95 \cdot 10^5 \text{ km}$  et  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ . Les modèles de structure stellaire donnent au centre du soleil les valeurs de  $2,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$  et  $15 \cdot 10^6 \text{ K}$ . Commenter les résultats obtenus.

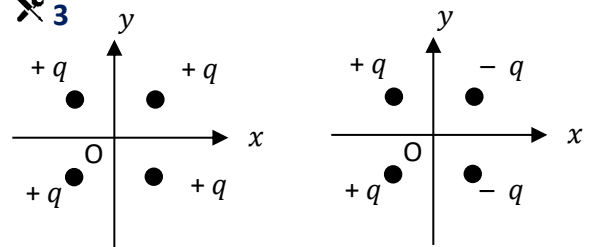
## EXERCICES COMPLEMENTAIRES

### Exercice 15. Calculs de charge (A. Leuridan) 1 | 3

- 3) Calculer la charge totale portée par un disque de rayon  $R$  chargé avec une densité superficielle de charge  $\sigma(r) = kr$  proportionnelle à la distance  $r$  au centre du disque.
- 4) La distribution volumique de charge électrique  $\rho$  dans une boule de rayon  $R$  a pour expression :
 
$$\left| \begin{array}{l} \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{si } r < R \\ \rho = 0 \quad \text{si } r > R, \end{array} \right.$$
 $r$  désignant la distance du point considéré au centre  $O$  de la sphère et  $\rho_0$  la densité en  $O$ .
  - a) Calculer la charge totale de la sphère.
  - b) En déduire la charge volumique moyenne.

### Exercice 16. Distribution discrète (oraux ATS) 2 | 3

Calculer le champ électrostatique  $\vec{E}(O)$  ainsi que le potentiel électrostatique  $V(O)$  créés au point  $O$  pour les 2 cas suivants (charges distantes de  $a$  par rapport à  $O$ ) :



### Exercice 17. Champ créé par un noyau non uniformément chargé 2 | 3

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

Pour  $r < a$ , la charge volumique  $\rho$  qui représente le noyau varie en fonction de  $r$  suivant la loi :  $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ , avec  $\rho_0$ , constante positive.

1. Exprimer la charge totale  $Q$  du noyau.
2. Etudier les invariances et les symétries de la distribution. En déduire l'orientation et les dépendances de champ électrique créée par cette distribution.
3. Déterminer l'expression du champ électrique à l'extérieur du noyau.
4. Même question à l'intérieur du noyau.

### Exercice 18. Distribution de charges

Deux plaques infinies d'épaisseur  $e$  sont collées l'une contre l'autre. Pour  $z \in [0, e]$ , la plaque est chargée en volume avec une densité  $+\rho_0$ . Pour  $z \in [-e, 0]$ , la densité est  $-\rho_0$ .

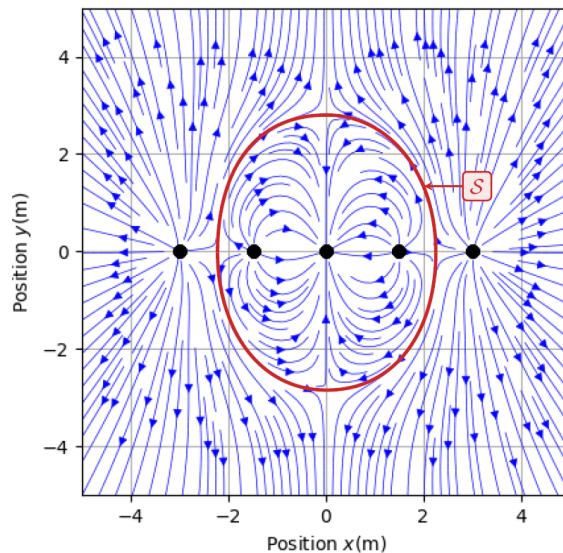
Déterminer le champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.

### Exercice 19. Analyse d'une carte de champ (E. Thibierge)



On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées 1 à 5 de gauche à droite. La surface S sera discutée dans les questions.

- 5) Donner le signe de chacune des charges.
- 6) Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges  $q_4$  et  $q_5$  en fonction des autres.
- 7) On admet que le champ est nul en tout point de la surface S ; comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?
- 8) En déduire  $q_3$  en fonction des autres charges.



## ■ APPLICATIONS DE COURS

### Exercice 1. ordre de grandeur d'une densité de charge dans un métal

Volume  $V = 1 \mu\text{m}^3 = 10^{-18} \text{ m}^3$

Chaque atome libère un électron donc le nombre d'électrons libre est égal au nombre d'atomes de cuivre :  $N_{e^-} = N_{cu}$

$$N_{e^-} = N_{cu} = N_A n_{cu} = \frac{N_A m_{cu}}{M_{cu}} = \frac{N_A \rho_{cu} V}{M_{cu}}$$

A.N. :  $N_{e^-} = 6,02 \cdot 10^{23} \times 8,9 \cdot 10^3 \times \frac{10^{-18}}{6,35 \cdot 10^{-2}} = 6,02 \times \frac{8,9}{6,35} \times 10^7 \approx 10^8$

### Exercice 2. Calculs de charge

$$1) Q = \lambda \times 2\pi R \quad 2) Q = \pi R^2 \sigma \quad 3) Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad 4) Q = \pi R^2 h \rho$$

### Exercice 3. Calcul du champ électrostatique créé par 2 charges ponctuelles identiques

Etude des caractéristiques du champ  $\vec{E}$  :

Plans  $\pi_{s1}$  de la feuille et  $\pi_{s2}$  perpendiculaire à la feuille passant par l'axe (OM) sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc du champ électrostatique et passent par le point M étudié.  $\vec{E}$  appartenant aux plans de symétrie, il appartient à l'intersection  $\pi_{s1} \cap \pi_{s2} = (OM)$ , soit pour un point de l'axe (OM) :  $\vec{E}(x) = E(x)\vec{e}_x$ .

Soient  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les champs électrostatiques créés respectivement par la charge du bas et celle du haut : d'après le théorème de superposition,  $\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x$

Soit  $\theta$  l'angle entre les vecteurs  $\vec{e}_{r1} = \frac{\vec{M_1M}}{M_1M}$  et  $\vec{e}_x$  :

$$\cos \theta = \frac{OM}{M_1M} = \frac{x}{\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_x = 2 \times \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)} = + \frac{q x}{2\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = + \frac{q x}{2\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x}$$

### Exercice 4. Caractéristiques du champ électrostatique créé par différentes distributions

1) Choix des coordonnées cartésiennes :  $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z$

**Plans de symétrie contenant M** : plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  plan de symétrie de la distribution de charge passant par le point M or  $\vec{E}$  en un point d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie donc  $E_y = 0$  ; plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  plan de symétrie donc  $E_z = 0$ .

Ou directement :  $\vec{E}(M)$  appartient à l'intersection des 2 plans de symétrie de la distribution de charges passant par le point M soit  $\vec{E}(M)$  appartient à  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z) \cap (M, \vec{e}_x, \vec{e}_y) = (M, \vec{e}_x)$  d'où

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x$$

Etude des invariances :

Le plan  $(Oyz)$  étant infini, il y a invariance de la distribution de charge et donc, selon le principe de Curie, du champ  $\vec{E}(M)$  par translation dans les directions  $y$  et  $z$ . On a donc

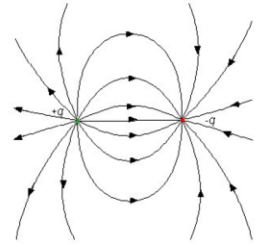
$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x = E_x(x) \vec{e}_x$$

## 2) Dipôle électrostatique

Plans de symétrie des charges : plan  $\pi_{s1}$  de la feuille, plan  $\pi_{s2}$  orthogonal à la feuille passant par les deux charges.

Plan  $\pi_a$  d'antisymétrie des charges : plan médiateur de  $+q / -q$ .

Conséquences : pour tout point  $M$  appartenant à  $\pi_{s1}$ , le champ électrique appartient à la feuille ; pour tout point  $M$  de la droite reliant les charges,  $\vec{E}$  appartient à la fois à  $\pi_{s1}$  et à  $\pi_{s2}$  soit à leur intersection : droite reliant les charges = ligne de champ ; en tout point  $M$  de  $\pi_a$ ,  $\vec{E}$  orthogonal à  $\pi_a$ .



3) Soit  $M$  le point de calcul, qui peut être n'importe où ; choix des coordonnées cylindriques.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

On va simplifier cette expression à l'aide d'une recherche de plans de symétrie des invariances pour la distribution de charge.

- **Etude des symétries** : direction du champ électrostatique en  $M$

Les plans  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  et  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  sont plans de symétrie pour la distribution de charge.

**Attention de bien choisir des PLANS DE SYMETRIE OU ANTISYMETRIE CONTENANT LE POINT DE CALCUL M!**



Le champ électrostatique créé en  $M$  appartient à l'intersection  $(M, \vec{e}_r)$  de ces plans, d'où

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r$$

- **Etude des invariances** : variable utile du champ électrostatique en  $M$

La distribution de charge est invariante selon toute translation suivant  $Oz$  et toute rotation d'angle  $\theta$ . On en déduit que la composante  $E_r$  du champ ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$ , soit

$$E_r(r, \theta, z) = E_r(r)$$

**Conclusion de cette double étude :**  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$

## Exercice 5. Charge intérieure

1) Avec une répartition volumique de charge :  $Q_{int} = \iiint_{\text{volume délimité par } \Sigma_G} \rho \, d\tau$

Disjonction des cas nécessaire :

si  $r \leq R$  :

$$Q_{int} = \iiint_{\text{volume délimité par } S} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

(la densité volumique de charge vaut  $\rho$  pour tout point  $M$  appartenant à l'intérieur de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon  $r$ )

si  $r \geq R$  :

$$Q_{int} = \iiint_{\text{noyau}} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 + 0$$

(la densité volumique de charge vaut  $\rho$  pour tout point  $M$  appartenant à l'intérieur de la sphère de rayon  $R$  et est nulle pour tous les autres points de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon  $r$ ).

**Remarque** : on peut bien entendu retrouver ce résultat par un calcul direct :



si  $r \geq R$  : En définissant un **volume élémentaire**  $d\tau = \sin \theta dr d\theta d\varphi$

$$Q_{int} = \iiint_{noyau} \rho(M) d\tau = \iiint_{noyau} \rho(M) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r \rho(M) r^2 dr$$

$$= 2\pi \times [-\cos \theta]_0^\pi \int_0^r \rho(M) r^2 dr = 2\pi \times (-\cos \pi + \cos(0)) \int_0^r \rho(M) r^2 dr = 4\pi \int_0^r \rho(M) r^2 dr$$

La densité volumique de charges est uniforme à l'intérieur de la sphère de rayon R et nulle à l'extérieur de la sphère, on a donc  $\rho(M) = \rho(r)$ , avec si  $r \geq R : \rho(r) = 0$  si  $r \leq R : \rho(r) = \rho = cte$ . On a donc

$$Q_{int} = 4\pi \int_0^r \rho(M) r^2 dr = 4\pi \left[ \int_0^R \rho r^2 dr + \int_R^r 0 \times r^2 dr \right] = 4\pi \rho \int_0^R r^2 dr = 4\pi \rho \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = 4\pi \rho \times \frac{R^3}{3}$$

On retrouve bien le résultat énoncé précédemment.

On pouvait enfin immédiatement noter que  $\rho(M) = \rho(r)$ , et choisir un **volume mésoscopique** adapté : l'écorce sphérique correspondant au volume compris entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$ . On peut alors écrire :

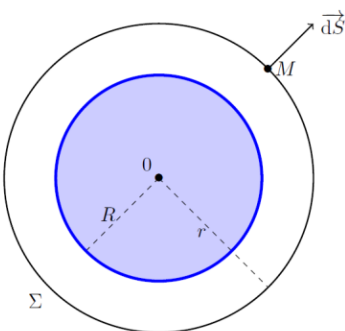
si  $r \geq R$  : En définissant un volume mésoscopique  $d\tau = 4\pi r^2 dr$

$$Q_{int} = \iiint_{noyau} \rho(M) d\tau = \int_0^r \rho(M) 4\pi r^2 dr = 4\pi \left[ \int_0^R \rho r^2 dr + \int_R^r 0 \times r^2 dr \right] = 4\pi \rho \int_0^R r^2 dr = 4\pi \rho \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = 4\pi \rho \times \frac{R^3}{3}$$

$$2) Q_{int} = q_i + \lambda L_{int} + \sigma S_{int} + \rho V_{int}$$

## Exercice 6. Utilisation du théorème de Gauss pour l'étude de distributions de charge classiques

### 1) Cas N°2 : Sphère uniformément chargée en volume



**Invariances et symétries de la distribution de charges :**

#### 1- Coordonnées sphériques

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

#### 2- Symétries

Tout plan passant par le centre de la sphère et le point M est plan de symétrie des sources, notamment les plans  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ , soit d'après le principe de Curie ces plans sont également des plans de symétrie de  $\vec{E}$

$\vec{E}$  en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie, soit ici par exemple  $\pi_1 \cap \pi_2 = (M; \vec{u}_r)$ . Finalement,  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{u}_r$ .

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

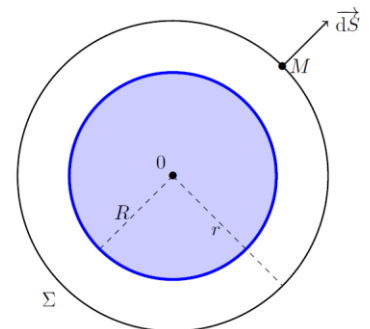
#### 3 -Invariances : détermination des variables utiles de $\vec{E}$

Distribution invariante par rotation autour de O (rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$ ) soit selon le principe de Curie :  $\Rightarrow$  la **norme** de  $\|\vec{E}\|$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $\varphi$  :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r = E(r) \vec{u}_r$$

#### 4- Choix de la surface de Gauss (schéma !!)

Le champ étant radial, on choisit une surface  $\Sigma_G$  perpendiculaire au champ : sphère de centre O et de rayon  $r$ . Il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié.



#### 5- Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss

La norme de  $\vec{E}$  est uniforme sur cette surface car  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$  et  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont suivant  $\vec{u}_r$ .

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \iint_{P \in \Sigma_G} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint_{P \in \Sigma_G} E(r) dS \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur sphère de rayon } r}}{=} E(r) \iint_{P \in \Sigma_G} dS$$

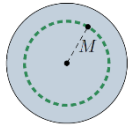
$$= E \cdot S_{Gauss} = \boxed{E(r) \cdot 4\pi r^2 = \Phi}$$

### 6- Calcul de la charge intérieure $Q_{int}$ à la surface de Gauss

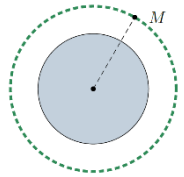
La charge intérieure à la surface de Gauss  $Q_{int}$  varie suivant que la surface de Gauss est à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau.

Avec une répartition volumique de charge :  $Q_{int} = \iiint_{\text{volume délimité par } \Sigma_G} \rho \, d\tau$

si  $r \leq R$  :  $Q_{int} = \iiint_{\text{volume délimité par } S} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$  (la densité volumique de charge vaut  $\rho$  pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon  $r$ )



si  $r \geq R$  :  $Q_{int} = \iiint_{\text{noyau}} \rho \, d\tau = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$  (la densité volumique de charge vaut  $\rho$  pour tout point M appartenant à l'intérieur de la sphère de rayon  $R$  et est nulle pour tous les autres points de la sphère délimitée par la surface de Gauss de rayon  $r$ ).



### 7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Soit  $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$

$$\text{si } r \leq R : E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \text{si } r \geq R : E(r) = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Finalement,

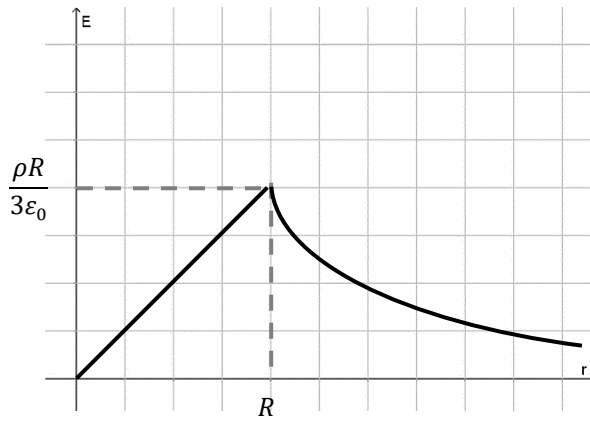
$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

### 8 – Cohérence : homogénéité $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$ , sens ...

$r < R$	$r > R$
$\Rightarrow [E_{int}] = \frac{[\rho]L}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$	$\Rightarrow [E_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L^2} = \frac{[charge]L}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$
Cohérent	
Sens dans les deux cas :	
si $\rho > 0$ $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$ le champ diverge	
si $\rho < 0$ $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$ le champ converge	
Cohérent	

## 9 – Graphe $E(r)$

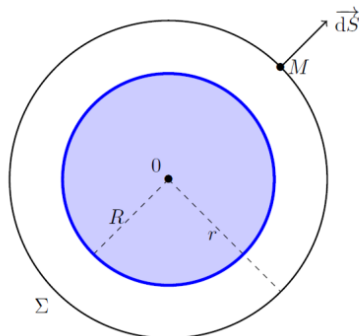


Remarque : Expression du champ en fonction de la charge totale  $Q$  de la sphère :

$$Q = \iiint \rho \cdot d\tau = \rho \cdot V_{\text{chargé}} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$r < R$	$r > R$
$\vec{E}_{\text{int}}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$ $\vec{E}_{\text{int}}(M) = \frac{Q r}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$	$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ <p>Le champ électrostatique créé à l'extérieur de la sphère chargée est le même que si toute la charge était concentrée au centre <math>O</math> de la sphère chargée.</p>

### 1) Cas N°1 : Sphère uniformément chargée en surface



**Invariances et symétries de la distribution de charges :**

#### 1- Coordonnées sphériques

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

#### 2- Symétries : détermination de la direction de $\vec{E}$

Tout plan passant par le centre de la sphère et le point  $M$  est plan de symétrie des sources, notamment les plans  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ , soit d'après le principe de Curie, ces plans sont également des plans de symétrie du champ  $\vec{E}$ .

$\Rightarrow \vec{E}$  en un point  $M$  d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie, soit ici par exemple  $\pi_1 \cap \pi_2 = (M, \vec{u}_r)$ . Finalement,  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{u}_r$ .

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

#### 3 -Invariances : détermination des variables utiles de $\vec{E}$

Distribution invariante par rotation autour de  $O$  (rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$ ) soit selon le principe de Curie :  $\Rightarrow$  la **norme** de  $\|\vec{E}\|$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $\varphi$ .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

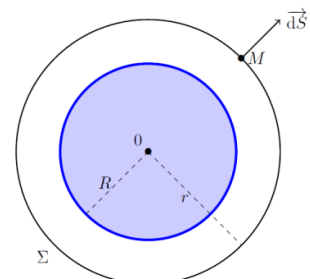
#### Application du théorème de Gauss

#### 4- Choix de la surface de Gauss (schéma !!) :

Le champ étant radial, on choisit une surface  $\Sigma_G$  perpendiculaire au champ, passant par le point  $M$  : sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

#### 5- Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss

La norme de  $\vec{E}$  est uniforme sur cette surface car  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$  et  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont suivant  $\vec{u}_r$ .



$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \iint_{P \in \Sigma_G} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \stackrel{\substack{\equiv \\ \vec{E} \text{ et } d\vec{S} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint_{P \in \Sigma_G} E(r) dS \stackrel{\substack{\equiv \\ \vec{E} \text{ indépendant} \\ \text{de } r}}{=} E(r) \iint_{P \in \Sigma_G} dS = E \cdot S_{Gauss}$$

$$= \boxed{E(r) \cdot 4\pi r^2 = \Phi}$$

### 6- Calcul de la charge intérieure $Q_{int}$ à la surface de Gauss

La charge intérieure à la surface de Gauss  $Q_{int}$  varie suivant que la surface de Gauss est à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau. Disjonction des cas :

Pour  $r < R$  :  $Q_{int} = 0$  (La sphère de Gauss ne renferme que du vide)

Pour  $r > R$  :  $Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$

### 7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Soit

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$$

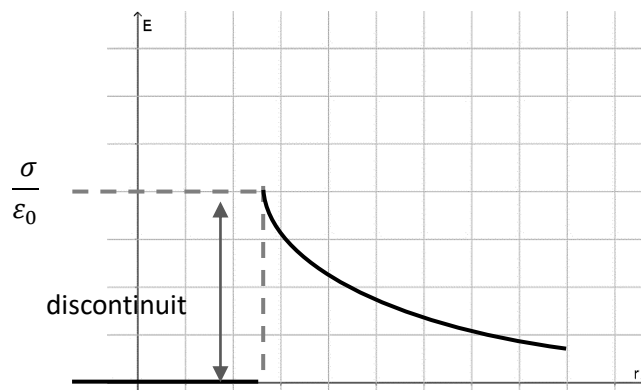
Disjonction des cas : Pour  $r < R$  :  $E(r) = 0$

$$\text{Pour } r > R : E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

9 – Cohérence : homogénéité  $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$ , sens ...

$r < R$	$r > R$
	$[\sigma] = \frac{[charge]}{L^2}$ $\Rightarrow [E_{ext}] = \frac{[\sigma]L^2}{[\epsilon_0]L^2} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$
Cohérent	
Sens dans les deux cas :	
si $\sigma > 0$ $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$ le champ diverge si $\sigma < 0$ $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$ le champ converge	
Cohérent	

### 10 – Graphe $E(r)$



Cette relation de discontinuité du champ électrostatique se retrouvera à la traversée de toute surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

Remarque : Expression du champ en fonction de la charge totale  $Q$  de la sphère :  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$r < R$	$r > R$
$\vec{E}_{int}(M) = \vec{0}$	$\vec{E}_{ext}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ <p>Le champ électrostatique créé à l'extérieur de la sphère chargée est le même que si toute la charge était concentrée au centre <math>O</math> de la sphère chargée.</p>

## 2) Cas N°3 : fil infini de densité linéique $\lambda$

Invariances et symétries de la distribution de charges :

1- Coordonnées cylindriques, d'axe  $(Oz)$  l'axe du fil

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Attention !  $r$  est la distance à l'axe et non la distance au point  $O$  (définitions différentes en coordonnées cylindriques et sphériques)

### 2- Symétries

Le plan  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  passant par le point  $M$  et perpendiculaire à l'axe du fil est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_1$  et n'a pas de composante selon  $\vec{u}_z$  :  $E_z = 0$ .

Le plan  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  passant par le point  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  du fil est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_2$  et n'a pas de composante selon  $\vec{u}_\theta$  :  $E_\theta = 0$ .

⇒  $\vec{E}$  en un point  $M$  d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie. Ici,  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{u}_r$  :

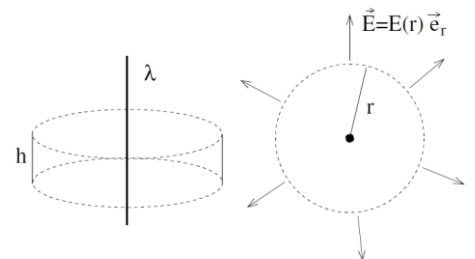
$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

### 3 -Invariances

Distribution invariante par rotation selon  $\theta$  et par translation selon  $z$ .

⇒  $\|\vec{E}\|$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$



### 4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface  $\Sigma_G$  passant par le point  $M$  telle que les différentes surfaces aient des vecteurs surface colinéaires ou orthogonaux au champ, soit à  $\vec{u}_r$  : cylindre de même axe  $(Oz)$  que le fil, de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  quelconque. Sa surface latérale passe par le point  $M$  ; il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point  $M$  étudié pouvant constituer une surface de Gauss.

La surface de Gauss a une surface totale  $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$  avec  $S_{haut} = S_{bas} = S$  surfaces des faces inférieures et supérieures et  $S_{lat}$  surface latérale du cylindre.

### 5- Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}$$

$\Phi_{haut} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut}$  : les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{dS}_{haut}$  sont orthogonaux,  $\Phi_{haut} = 0$  ( $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$  et  $\vec{dS}_{haut}$  suivant  $\vec{u}_z$  :  $\vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} = E(r) \vec{u}_r \cdot dS_{haut} \vec{u}_z$  avec  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$  soit  $\Phi_{haut} = 0$ ).

Idem pour  $\Phi_{bas}$  :  $\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}}$  : les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\overrightarrow{dS_{bas}}$  sont orthogonaux,  $\Phi_{bas} = 0$  ( $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  et  $\overrightarrow{dS_{bas}}$  suivant  $-\vec{u}_z$  :  $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$  soit  $\Phi_{bas} = 0$ ).

$$\begin{aligned} \Phi_{lat} &= \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot dS_{lat} \vec{u}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(r) \cdot dS_{lat} \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{lat} \text{ à } r = cte}}{=} E(r) \iint dS_{lat} = E(r) \cdot S_{lat} \\ &= E(r) \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \Phi_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r h}$$

### 6- Calcul de la charge intérieure

Pour tout point M en dehors du fil (Oz), soit pour tout point M tq  $r \neq 0$ ,  $Q_{int} = \lambda \cdot h$

*Ici pas de disjonction de cas à envisager*

### 7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

On a donc pour  $r \neq 0$  :  $E(r) = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$  soit  $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r}$

9 – Cohérence  $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$ , le sens ... :  $[\lambda] = \frac{[charge]}{L} \Rightarrow [E] = \frac{[\lambda]}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$  : Cohérent

Sens dans les deux cas : si  $\lambda > 0$   $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$  le champ diverge ; si  $\lambda < 0$   $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$  le champ converge : Cohérent

### 10 – Graphe $E(r)$



On retrouve bien que le champ électrostatique n'est pas défini sur une ligne chargée.

## 3) Cas N°4 : Cylindre infini chargé en volume

### Détermination de $\vec{E}(M)$

1 – Point M : Voir schéma

2- Coordonnées cylindriques, d'axe (Oz) l'axe du cylindre

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Invariances et symétries de la distribution de charges :

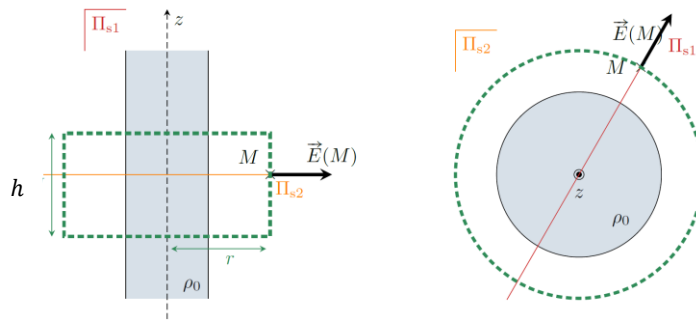
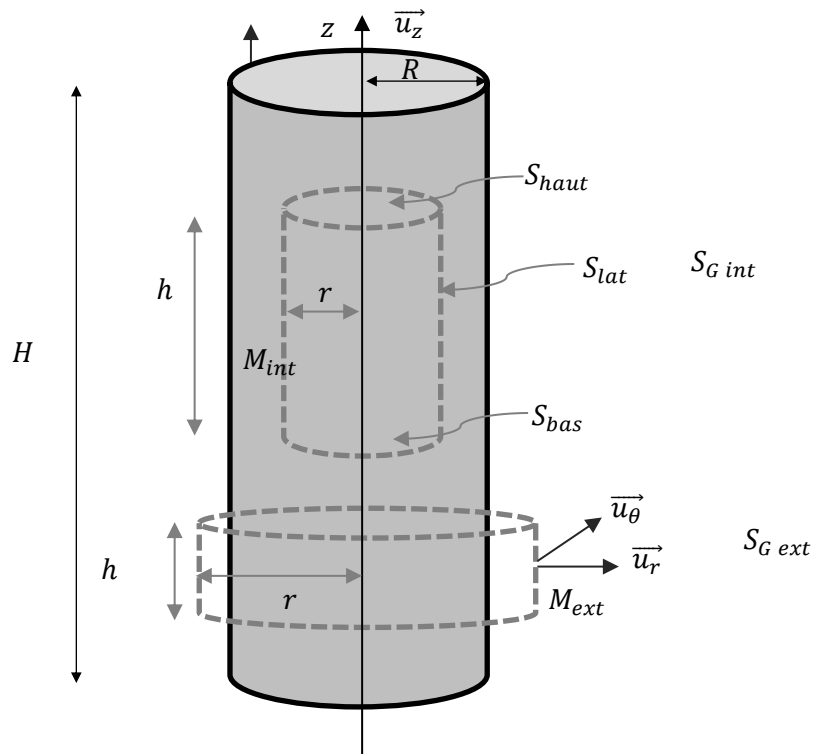
### 3- Symétries

Le plan  $\pi_{s2} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  passant par le point M et perpendiculaire à l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_1$  et n'a pas de composante selon  $\vec{u}_z$  :  $E_z = 0$ .

Le plan  $\pi_{s1} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  passant par le point M et contenant l'axe (Oz) du cylindre est plan de symétrie de la distribution de charges ; le champ  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_2$  et n'a pas de composante selon  $\vec{u}_\theta$  :  $E_\theta = 0$ .

⇒  $\vec{E}$  en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie. Ici,  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{u}_r$  :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$



### 3 -Invariances

Distribution invariante par rotation selon  $\theta$  et par translation selon  $z$ .

⇒  $\|\vec{E}\|$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ .

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

### 4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface  $\Sigma_G$  passant par le point M telle que les différentes surfaces aient des vecteurs surface colinéaires ou orthogonaux au champ, soit à  $\vec{u}_r$  : cylindre de même axe (Oz) que le cylindre, de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  quelconque. Sa surface latérale passe par le point M ; il s'agit bien d'une surface fermée passant par le point M étudié pouvant constituer une surface de Gauss.

La surface de Gauss a une surface totale  $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$  avec  $S_{haut} = S_{bas} = S$  surfaces des faces inférieures et supérieures et  $S_{lat}$  surface latérale du cylindre de Gauss.

### 5- Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}$$

$\Phi_{haut} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut}$  : les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{dS}_{haut}$  sont orthogonaux,  $\Phi_{haut} = 0$  ( $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  et  $\vec{dS}_{haut}$  suivant  $\vec{u}_z$  :  $\vec{E} \cdot \vec{dS}_{haut} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{haut}\vec{u}_z$  avec  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$  soit  $\Phi_{haut} = 0$ ).

Idem pour  $\Phi_{bas}$  :  $\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas}$  : les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{dS}_{bas}$  sont orthogonaux,  $\Phi_{bas} = 0$  ( $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  et  $\vec{dS}_{bas}$  suivant  $-\vec{u}_z$  :  $\vec{E} \cdot \vec{dS}_{bas} = E(r)\vec{u}_r \cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$  soit  $\Phi_{bas} = 0$ ).

$$\begin{aligned} \Phi_{lat} &= \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot dS_{lat} \vec{u}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(r) \cdot dS_{lat} \stackrel{\substack{E(r) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{lat} \text{ à } r = \text{cte}}}{=} E(r) \iint dS_{lat} = E(r) \cdot S_{lat} \\ &= E(r) \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \Phi_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r h}$$

### 6- Calcul de la charge intérieure

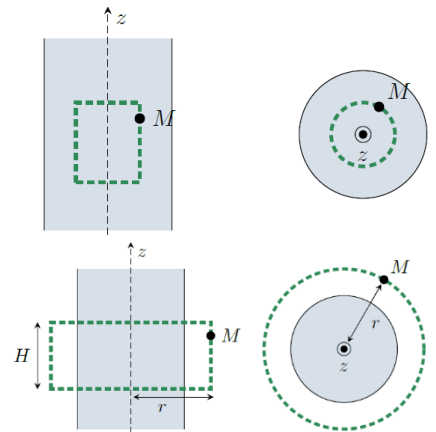
La charge intérieure à la surface de Gauss  $Q_{int}$  varie suivant que la surface de Gauss est à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre constituant la distribution ( $r \geq R$  ou  $r \leq R$ ).

Avec une répartition volumique de charge :  $Q_{int} = \iiint_{\text{délimité par } \Sigma_G} \rho \, d\tau$

si  $r \leq R$  :  $Q_{int} = \iiint_{\text{délimité par } S} \rho \, d\tau = \rho \times \pi r^2 h$

si  $r \geq R$  :  $Q_{int} = \iiint_{\text{délimité par } S} \rho \, d\tau = \rho \times \pi R^2 h$

(la densité volumique de charge vaut  $\rho$  pour tout point M appartenant à l'intérieur du cylindre de rayon  $R$  et est nulle pour tous les autres points du cylindre délimité par la surface de Gauss de rayon  $r$ ).



### 7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

On a donc pour  $r \neq 0$  :  $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \times 2\pi r h}$

si  $r \leq R$  :  $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\rho \times \pi r^2 h}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$

si  $r \geq R$  :  $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\rho \times \pi R^2 h}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$

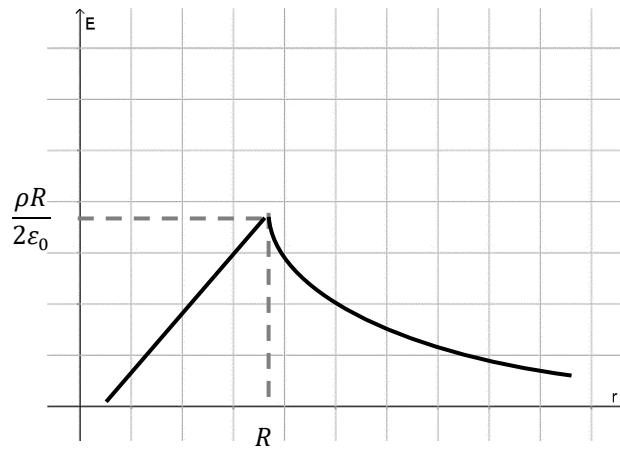
$$\boxed{\begin{aligned} r \leq R : \vec{E} &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r \\ r \geq R : \vec{E} &= \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r \end{aligned}}$$

### 9 – Cohérence $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$ , le sens ...

$r < R$	$r > R$
$[E_{int}] = \frac{[\rho]L}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$	$[E_{ext}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$
Cohérent	
Sens dans les deux cas :	
si $\rho > 0$ $\vec{E}(M) = +E \vec{u}_r$ le champ diverge	
si $\rho < 0$ $\vec{E}(M) = -E \vec{u}_r$ le champ converge	
Cohérent	

### 10 – Graphe $E(r)$





On constate à nouveau, comme pour toutes les distributions volumiques, que le champ est continu en  $r = R$ , c'est-à-dire entre l'intérieur et l'extérieur de la distribution.

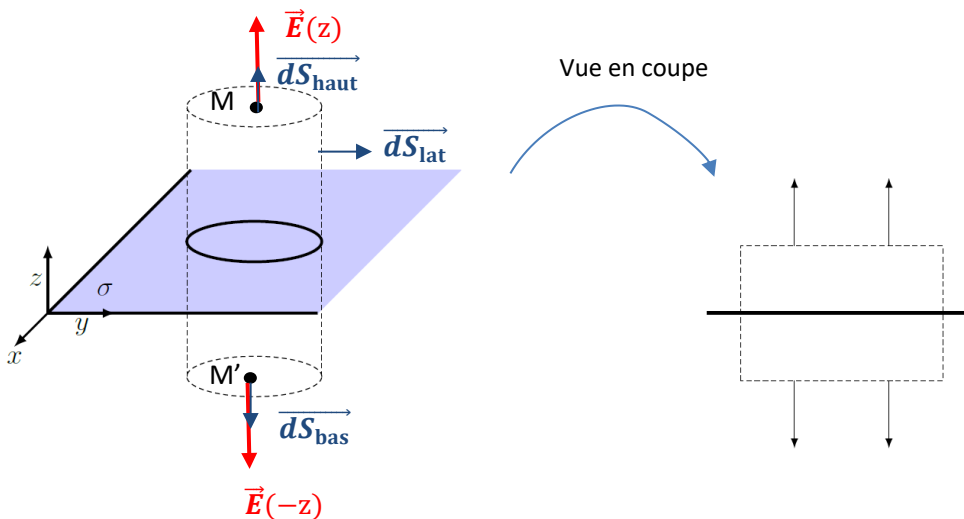
**Validité du modèle du cylindre infini** : il faut que l'influence des bords de la distribution soit négligeable sur le champ calculé, on dit alors que les effets de bord sont négligeables.

**Critère de validité** : observation à proximité du milieu du cylindre et à distance raisonnable de celui-ci :  $r \ll H$  et  $z \ll H$

Une distribution de charge peut être modélisée par une distribution infinie lorsque le champ est calculé à proximité de la distribution mais loin des bords de celle-ci.

#### 4) Cas N°5 : Plan infini

Champ électrostatique créée par un plan uniformément chargé en  $z = 0$  :



**Invariances et symétries de la distribution de charges :**

##### 1- Coordonnées cartésiennes

$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \vec{u}_x + E_y(x, y, z) \vec{u}_y + E_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

##### 2- Symétries

Plan passant par  $\pi_1 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  : plan de symétrie des sources :  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_1$  et ne dépend donc pas de  $\vec{u}_y$

Plan passant par  $\pi_2 = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  : plan de symétrie des sources :  $\vec{E}$  appartient donc à  $\pi_2$  et ne dépend donc pas de  $\vec{u}_x$

$\Rightarrow \vec{E}$  est porté par  $\vec{u}_z$ , soit  $\vec{E} = E_z(x, y, z) \vec{u}_z$

##### 3 -Invariances

Le plan  $(xOy)$  est un plan infini, la distribution est donc invariante par translation selon  $x$  et  $y$ .

$\Rightarrow \|\vec{E}\|$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ , soit

$$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

$\pi_s = (xOy)$  est plan de symétrie de la distribution de charges.

### Choix d'un point M tel que $z > 0$

Soit  $M'$ , le symétrique du point M par rapport au plan  $\pi_s = (xOy)$  ( $M' = \text{sym}_{\pi_s}(M)$ ); on a donc  $\vec{E}(M')$  qui est égal au symétrique de  $\vec{E}(M)$  par rapport à  $\pi_s = (xOy)$  :  $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\pi_s} \vec{E}(M)$

Pour  $z > 0$  :  $\vec{E}(z) = E(z) \vec{u}_z$

Pour  $z' = -z < 0$  :  $\vec{E}(z') = E(-z) \vec{u}_z = -E(z) \vec{u}_z$

### 4- Choix de la surface de Gauss :

Surface de Gauss  $\Sigma_G$  : cylindre (ou Parallélépipède ou ...) fermé, d'axe vertical selon  $(Oz)$ , dont les surfaces du « haut » et du « bas » sont horizontales (parallèles au plan  $\pi_s = (xOy)$ ) et passent par M et  $M' = \text{sym}_{\pi_s}(M)$  avec  $\pi_s = (xOy)$ . Le cylindre (ou le parallélépipède, ou...) a donc une hauteur  $h$  nécessairement telle que  $h = 2|z|$ .

La surface de Gauss a une surface totale  $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$  avec  $S_{haut} = S_{bas} = S$  surfaces des faces inférieures et supérieures et  $S_{lat}$  surface latérale du parallélépipède ou du cylindre.

### 5- Calcul du flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss $\Sigma_G = S_{haut} + S_{bas} + S_{lat}$

#### Choix d'un point M tel que $z > 0$

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{haut} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{bas} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{lat}$$

$\Phi_{haut}$  :  $\vec{E}$  et  $\overrightarrow{dS}_{haut}$  suivant  $\vec{u}_z$ .  $\vec{E}$  est constant sur  $S_{haut}$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{haut} &= \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{haut} = \iint E(z) \vec{u}_z \cdot dS_{haut} \vec{u}_z \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(z) \cdot dS_{haut} \stackrel{\substack{E(z) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{haut} \text{ à } z=cte}}{=} E(z) \iint dS_{haut} \\ &= E(z) \cdot S_{haut} = E(z) \cdot S \end{aligned}$$

$\Phi_{bas}$  :  $\vec{E} = E(-z) \vec{u}_z$  et  $\overrightarrow{dS}_{bas} = dS_{bas} (-\vec{u}_z)$ . De plus,  $\vec{E}(-z)$  est constant sur  $S_{bas}$  :

$$\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{bas} = \iint E(-z) (\vec{u}_z) \cdot dS_{bas} (-\vec{u}_z) \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \vec{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint -E(-z) \cdot dS_{bas} \stackrel{\substack{E(-z) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{bas} \text{ à } -z=cte}}{=} -E(-z) \iint dS_{bas}$$

De plus,  $\pi_s = (xOy)$  étant plan de symétrie de la distribution de charges,  $E(-z) = -E(z)$ , d'où

$$\Phi_{bas} = -E(-z) \iint dS_{bas} = E(z) \iint dS_{bas} = E(z) \cdot S_{bas} = E(z) \cdot S = \Phi_{haut}$$

$\Phi_{lat}$  :  $\vec{E}$  et  $\overrightarrow{dS}_{lat}$  orthogonaux.

$$\Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{lat} = 0$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = 2 E(z) \cdot S}$$

### 6- Calcul de la charge intérieure

Pour tout point M en dehors du plan  $(xOy)$ , soit pour tout point M tq  $z \neq 0$ ,  $Q_{int} = \sigma \cdot S$

### 7- Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} = 2 E(z) \cdot S$$

On a donc pour  $z > 0$  :  $E(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$  soit  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z$ ; par symétrie,  $z < 0$  :  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z$

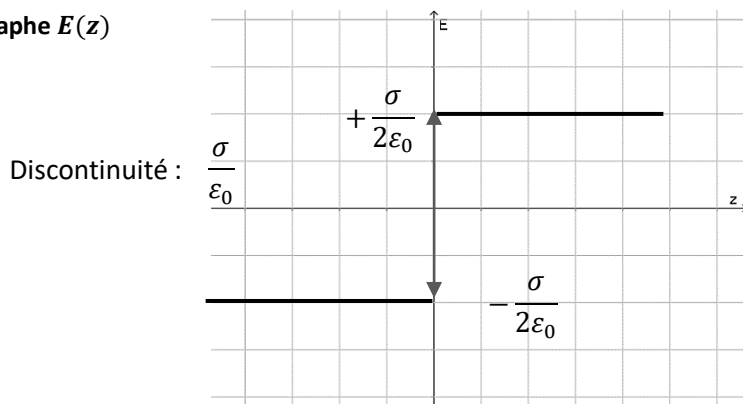
$$\boxed{\begin{aligned} z > 0 : \vec{E} &= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z \\ z < 0 : \vec{E} &= -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z \end{aligned}}$$

9 – Cohérence  $[E] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L^2}$ , le sens ...

$$[\sigma] = \frac{[charge]}{L^2} \Rightarrow [E] = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L^2}$$

Cohérent

### 10 – Graphe $E(z)$



On retrouve bien la relation de la relation de discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

### Validité du modèle du plan infini

Un plan infini n'existe pas, il s'agit d'un cas limite pour un modèle de plaque de faible épaisseur  $e$  devant ses côtés  $a$  et  $b$ . Vu du point d'observation  $M$ , on ne doit voir ni l'effet des bords ni l'effet de l'épaisseur de la plaque.

Condition de validité :  $x, y, z \ll a, b$  et  $z \gg e$

Distribution	Sphère chargée uniformément en surface ( $\sigma$ )	Sphère chargée uniformément en volume ( $\rho$ )	Fil infini uniformément chargé ( $\lambda$ )	Cylindre infini chargé en volume ( $\rho$ )	Plan $x = 0$ infini chargé ( $\sigma$ )
Champ électrostatique $\vec{E}$	$r < R : \vec{E} = \vec{0}$ ; $r > R : \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0 r} \vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$ $x < 0 :$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$

### Exercice 7. Cartes de champ

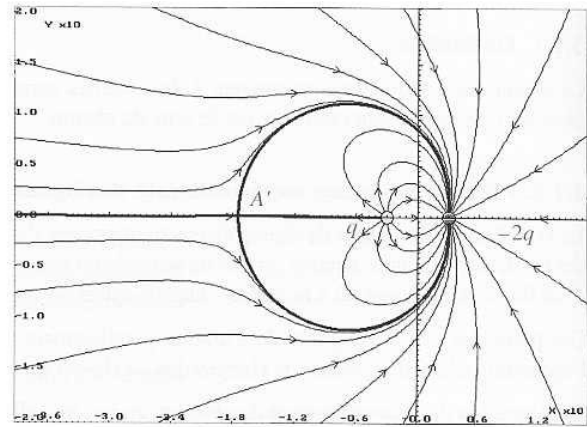
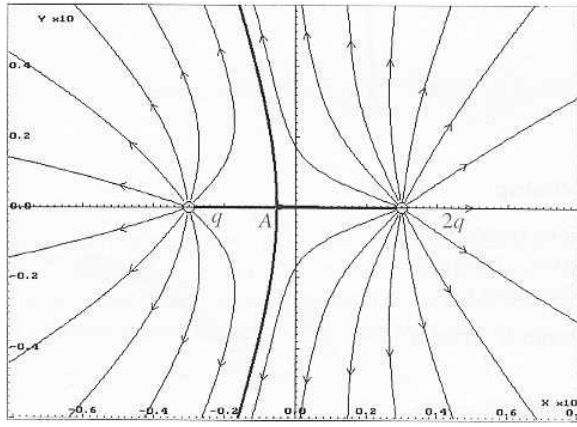
Deux charges pour chaque carte.

**Carte de gauche** : deux charges positives situées aux points d'où partent les lignes de champ (points de divergence des lignes de champ), sur l'axe  $y = 0$ . On constate que sur la médiatrice de ces charges (droite  $x = 0$ ) le champ total est dirigé vers la gauche, or d'après le théorème de superposition,  $\vec{E} = \vec{E}_{q1} + \vec{E}_{q2}$  avec  $\vec{E}_{qi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$ .

Sur la médiatrice,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2^2}$ , c'est donc que la charge de gauche est plus petite que celle de droite.

**Carte de droite** : deux charges de signes opposés situées sur l'axe  $y = 0$  : pour la charge positive, au point d'où partent les lignes de champ (point de divergence des lignes de champ, à gauche), et pour la charge négative au point vers où convergent les lignes de champ (à droite). On constate que sur la médiatrice de ces charges (droite  $x = 0$ ) le champ total est dirigé vers le bas. Si les charges avaient été de même valeur, le plan contenant cette médiatrice aurait constitué un plan d'antisymétrie et le champ aurait été orthogonal à ce plan (champ horizontal dans la direction  $x$ ),

D'après le théorème de superposition,  $\vec{E} = \vec{E}_{q1} + \vec{E}_{q2}$  : c'est donc que la charge de gauche est plus petite en valeur absolue que celle de droite (on peut également remarquer la densité des lignes de champ à proximité de la charge négative : en valeur absolue, le flux à travers des sphères de même rayon centrées sur chacune des charges est plus important à droite qu'à gauche. En exploitant le théorème de Gauss, on retrouve la même conclusion.



## VRAI OU FAUX

- a. vrai      b. vrai    c. Faux, les invariance du champ donc les variables utiles seulement      d. vrai    e. faux  
 dans les zones où il y a des charges    f. faux

## EXERCICES

### Exercice 8. Calcul du champ électrostatique créé par 2 charges ponctuelles opposées

Plan  $\pi_a$  perpendiculaire à l'axe passant par l'axe (OM) : plan d'antisymétrie de la distribution de charges donc du champ électrostatique et passe par le point M étudié.  $\vec{E}$  orthogonal aux plans d'antisymétrie, soit pour un point de l'axe (OM) :  $\vec{E}(x) = E(x)\vec{e}_y$ .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_y + \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y, \text{ avec } \sin \theta = \frac{OM_1}{M_1M} = \frac{a/2}{\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{E}(M) = 2 \times \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)} \vec{e}_y = + \frac{q a}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y$$

### Exercice 9. Champ électrostatique créé par une couche plane épaisse chargée uniformément

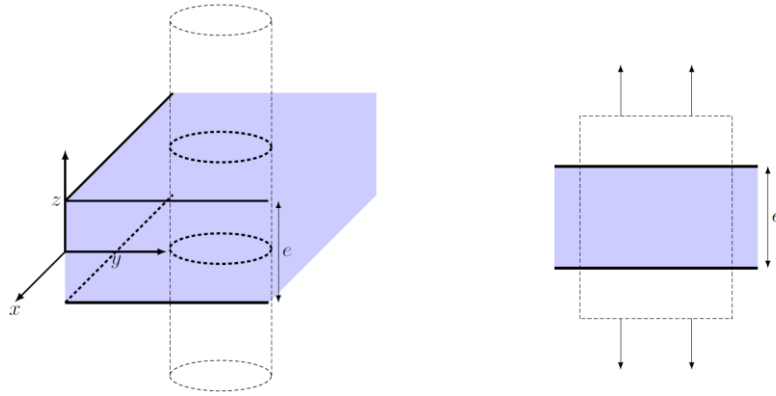
Démarche très proche de celle utilisée pour le plan infini, ne différant qu'à partir du calcul de la charge intérieure

#### Coordonnées cartésiennes

#### Etude des symétries et invariances

Plans  $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge donc de  $\vec{E}$ , qui appartient à leur intersection :  $\vec{E}$  suivant  $\vec{e}_z$  :  $\vec{E}(M) = E(x; y; z)\vec{e}_z$ ; invariance de la distribution donc de  $\vec{E}$  par translation selon  $x$  et  $y$  :  $\vec{E}$  fonction de  $z$  seulement, soit  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

**Surface de Gauss** ( $\Sigma_G$ ) : cylindre d'axe  $\vec{e}_z$ , de surface S quelconque dans le plan  $(Oxy)$ , passant par M et par son symétrique M' par rapport au plan  $(Oxy)$ , et de hauteur  $h = 2z$ .



Calcul du flux :

$$\oiint_{(\Sigma_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}}$$

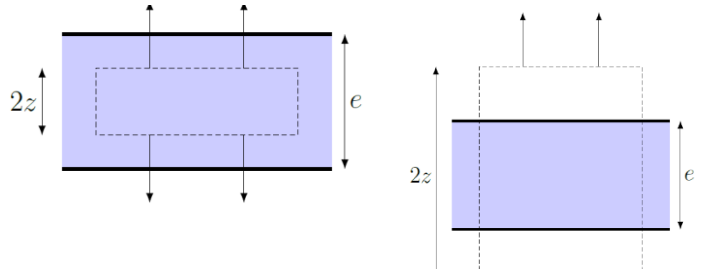
$$\oiint_{(\Sigma_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z(z)S - E_z(-z)S + 0 = 2E_z(z)S \quad \text{car } E_z(-z) = -E_z(z)$$

Charge intérieure :

$$\text{pour } z \leq -a : Q_{int} = \rho 2aS ;$$

$$\text{pour } -a \leq z \leq +a : Q_{int} = \rho 2zS ;$$

$$\text{pour } z \geq +a : Q_{int} = \rho 2aS$$



**Théorème de Gauss :**  $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 2E_z(z)S$

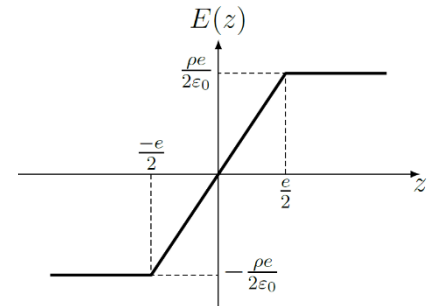
$$\text{pour } z \leq -a : E_z(z) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} ;$$

$$\text{pour } -a \leq z \leq +a : E_z(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} ;$$

$$\text{pour } z \geq +a : E_z(z) = +\frac{\rho a}{\epsilon_0} ;$$

Homogénéité : on a bien  $[E_z] = \left[ \frac{\rho a}{\epsilon_0} \right] = \left[ \frac{\rho V}{\epsilon_0 L^2} \right] = \left[ \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \right] : \text{Ok}$

e.  $\sigma = 2\rho a.$



### Exercice 10. Câble creux

• **Système de coordonnées :** cylindrique, l'axe Oz étant confondu avec l'axe du câble.

• **Symétries :**

— le plan  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie des charges, donc du champ électrique (principe de Curie). Or  $M \in \pi_1$ , donc  $\vec{E}(M)$  appartient à ce plan.

— de même, le plan  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie des charges. Or  $M \in \pi_2$ , donc  $\vec{E}(M) \in \pi_2$ .

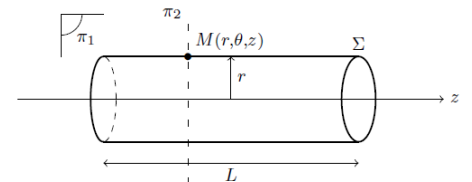
— Donc  $\vec{E}(M) \in (\pi_1 \cap \pi_2)$ . Finalement  $\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r$

• **Invariances :** Il y a invariance de la distribution de charge par : — rotation d'angle  $\theta$  ; — translation selon z

D'après le principe de Curie,  $\vec{E}$  vérifie ces mêmes invariances, donc  $E(M) = E(r, \theta, z) = E(r)$

• **Théorème de Gauss :**

— **Surface de Gauss :** on choisit un cylindre d'axe Oz, de longueur L (Attention, ce n'est pas la longueur de la distribution de charge : le câble creux est infini !), tel que M se trouve sur sa face latérale (donc de rayon  $OM = r$ ). La surface est fermée : elle inclut les disques aux deux extrémités du cylindre (sur le schéma, on ne représente pas la distribution de charges pour ne pas surcharger le dessin).



— Flux sortant du champ électrique : on découpe la surface de Gauss en sa surface latérale et les deux disques gauche et droit qui la constitue.  $\vec{E}$  étant selon  $\vec{u}_r$ , le flux est non nul uniquement sur la face latérale. Notons  $P(r_p, \theta_p, z_p)$  le point où se situe la surface d'intégration  $d\vec{S}$  :

$$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 + 0 + \iint_{P \in S_{latérale}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \iint_{P \in S_{latérale}} \mathbf{E}(r_p) \vec{u}_{r,p} \cdot dS \vec{u}_{r,p} \text{ où } \vec{u}_{r,p} \text{ vecteur radial en P.}$$

$$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = E(r) \iint_{P \in S_{latérale}} dS = E(r) 2\pi r L$$

— **Charge intérieure** : la charge intérieure à la surface de Gauss dépend de la valeur de  $r$  (donc de la dimension de la surface de Gauss) :

— si  $r < R$  : alors il n'y a aucune charge dans la surface de Gauss :  $Q_{int} = 0$

— si  $R < r < 2R$  : il faut compter uniquement les charges à l'intérieur de la surface de Gauss. Il s'agit donc des charges se trouvant dans le cylindre creux de rayon intérieur  $R$  et de rayon extérieur  $r$ , soit  $Q_{int} = \pi \rho L (r^2 - R^2)$

— si  $r > 2R$  : alors la charge intérieure à la surface de Gauss ne dépend plus que de la longueur de la surface de Gauss : il s'agit de la totalité des charges dans le câble creux sur une longueur  $L$ , soit  $Q_{int} = \pi \rho L (4R^2 - R^2) = 3\pi \rho L R^2$

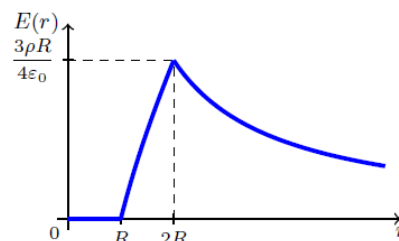
— **Théorème de Gauss** :

On utilise les résultats précédents (en constatant au vu des expressions qu'il y a continuité en  $R$  et  $2R$ ) :

$$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ soit } \vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho(r^2 - R^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{si } R < r < 2R \\ \frac{3\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{si } r \geq 2R \end{cases}$$

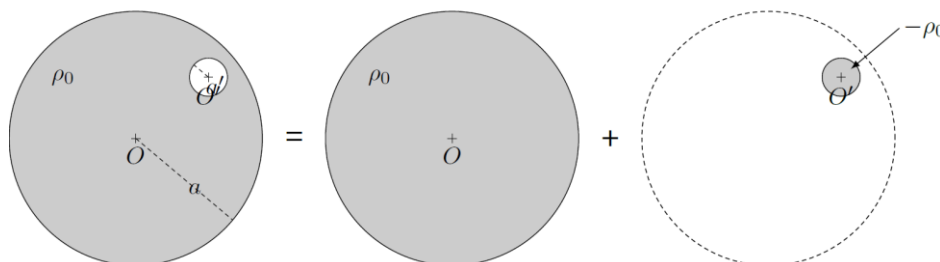
• **Tracé de la courbe dans le cas  $\rho > 0$  :**

**Remarque** : le champ électrique est défini partout et continu, ce qui est normal pour une distribution volumique de charges.



### Exercice 11. Cavité sphérique (Oral ATS 2021) 3 | ✖ 2

- Voir application de cours : Si  $r \geq R$  :  $\vec{E}_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  et si  $r \leq R$  :  $\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho \vec{OM}}{3\epsilon_0}$ ;
- On cherche à déterminer le champ électrique en tout point à l'intérieur de la cavité, mais les invariants et symétries du problème sont très faibles par une étude directe. On exploite donc le théorème de superposition en adoptant le modèle suivant : la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$  chargée avec  $\rho$  présentant une cavité centrée sur  $O'$  peut être décrite comme la superposition d'une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$  chargée avec  $\rho$  de manière homogène et ne présentant pas de cavité superposée à une boule de centre  $C$  et de rayon  $R'$  chargée avec  $-\rho$



Le champ dans la cavité  $\vec{E}_{tot}$  s'écrit alors comme la somme des champs créés par chacune des deux boules chargées de manière uniforme, avec des champs faciles à exprimer :  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Pour chacune des deux distributions, le volume correspondant à la cavité se trouve à l'intérieur de la boule. On a donc :

Champ  $\vec{E}_1$  créé par la boule de centre O et de rayon R chargée avec  $\rho$  en un point M de la cavité :  $\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho \overline{OM}}{3\epsilon_0}$

Champ  $\vec{E}_2$  créé par la boule de centre O' et de rayon R' chargée avec  $-\rho$  en un point M de la cavité :  $\vec{E}_2 = \frac{-\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r'} = \frac{-\rho \overline{O'M}}{3\epsilon_0}$

*Attention !!!!  $r = OM$  et  $\vec{e}_r = \frac{\overline{OM}}{r}$  tandis que  $r' = O'M$  et  $\vec{e}_{r'} = \frac{\overline{O'M}}{r'}$   
ce ne sont pas les mêmes grandeurs pour chacune des deux distributions ; afin de pouvoir exploiter la distribution il faut donc bien se ramener à une description indépendante du système de coordonnées utilisé*

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{OO'}$  uniforme dans la cavité

3. Champ gravitationnel créé par astre sphérique plein à l'intérieur : on peut redémontrer l'ensemble des résultats ou encore exploiter l'analogie sur le résultat final selon la formulation de l'énoncé (ici, l'analogie finale était suffisante, nous allons néanmoins reprendre la démonstration complète)

<b>Force</b>	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}_r$
<b>Sources de champ</b>	Charges fixes $q$	Masses $m$
<b>Densité volumique</b>	$\rho$	$\rho$
<b>Constante</b>	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
<b>Flux non conservatif (théorème de Gauss)</b>	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

Coordonnées : sphériques

Invariances et symétries :  $\vec{G} = G(r)\vec{u}_r$

Surface de Gauss : sphère de même centre que l'astre, de rayon  $r$  passant par le point M étudié :

$$\phi = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 G(r)$$

Lien entre  $m$  et  $\mu$  :  $m = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \Leftrightarrow \mu = \frac{3m}{4\pi R^3}$

2 cas :  $r > R$   $M_{int} = m$   $\vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$

$r < R$   $M_{int} = m \frac{r^3}{R^3}$   $\vec{G} = -G \frac{m r}{R^3} \vec{u}_r$

$$\vec{g}_{int} = -\frac{4}{3} \pi G \mu r \vec{e}_r = -\frac{4}{3} \pi G \mu \overline{OM}$$

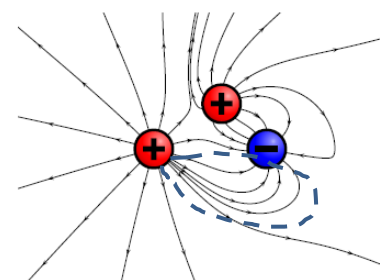
Astre avec grotte : par superposition :  $\vec{g}_{cavité} = -\frac{4}{3} \pi G \mu \overline{OM} + \frac{4}{3} \pi G \mu \overline{O'M}$

$$\vec{g}_{cavité} = -\frac{4}{3} \pi G \mu \overline{OO'}$$

**Exercice 12. Analyse de cartes de champ** (d'après CCP 2017)

Il y a une charge à chaque point où les lignes de champ se rejoignent, soit 3. D'après le théorème de Gauss, les lignes de champ sortent des charges positives et convergent vers les charges négatives.

Les lignes de champ autour de la charge à gauche se comportent comme celles d'une charge ponctuelle (en étoile) sur une distance plus importante que celle de la charge de droite, ce qui signifie que son champ électrique est moins modifié qu'elle ne modifie



celui de la charge de droite : elle a donc, en valeur absolue, une charge plus élevée. On pouvait également raisonner sur le tube de champ rejoignant les deux charges (cf pointillés) : cette zone étant vide de charges, le champ est à flux conservatif, et il est d'autant plus intense que les lignes de champ se rapprochent, ce qui confirme l'analyse précédente.

**Remarque :** les charges utilisées pour cette simulation sont de  $+q$  en haut,  $-q$  à droite et  $+q$  à gauche.

### Exercice 13. Champ gravitationnel d'un astre non homogène

**Coordonnées :** sphériques

**Invariances et symétries :**  $\vec{G} = G(r)\vec{u}_r$

**Surface de Gauss :** sphère de même centre que l'astre, de rayon  $r$  passant par le point M étudié :

$$\phi = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 G(r)$$

**Masse intérieure :** en définissant un volume mésoscopique à l'intérieur duquel la masse volumique est uniforme, soit une écorce sphérique d'épaisseur  $dr$  et de volume  $dV = 4\pi r^2 dr$

$$M_{int} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

Disjonction des cas nécessaire :

Pour  $r \leq R$  :

$$M_{int} = \int_0^r \rho_0 \left(1 - k \frac{r'^2}{R^2}\right) 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 \int_0^r \left(1 - k \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{k}{R^2} \frac{r'^5}{5} \right]_0^r = 4\pi \rho_0 \left( \frac{r^3}{3} - \frac{kr^5}{5R^2} \right)$$

Pour  $r \geq R$  :

$$M_{int} = \int_0^R \rho_0 \left(1 - k \frac{r'^2}{R^2}\right) 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{k}{R^2} \frac{r'^5}{5} \right]_0^R = 4\pi \rho_0 R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{k}{5} \right) = M_{tot}$$

**Théorème de Gauss pour la gravitation :**

$$\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{int} = 4\pi r^2 G(r)$$

Soit  $G(r) = -\frac{\mathcal{G} M_{int}}{r^2}$

Disjonction des cas nécessaire :

Pour  $r \leq R$  :

$$G(r) = -\frac{\mathcal{G} M_{int}}{r^2} = -\frac{4\pi \rho_0 \mathcal{G} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{kr^5}{5R^2} \right)}{r^2}$$

$$G(r) = -4\pi \rho_0 \mathcal{G} \frac{r}{3} \left( 1 - \frac{3kr^2}{5R^2} \right) = -\mathcal{G} M_{tot} \frac{r}{R^3} \frac{1 - \frac{3kr^2}{5R^2}}{1 - \frac{3k}{5}}$$

Pour  $r \geq R$  :

$$G(r) = -\frac{\mathcal{G} 4\pi \rho_0 \frac{R^3}{3} \left( 1 - \frac{3k}{5} \right)}{r^2} = -\frac{\mathcal{G} M_{tot}}{r^2}$$

### Exercice 14. Champ de pression dans une étoile (corrigé J. Kieffer)



- 1) Les invariants et symétries permettent de trouver  $\vec{g} = g(r)\vec{e}_r$ .  
On applique le théorème de Gauss (gravitationnel) sur une sphère de rayon  $r < R_0$

$$\oiint \vec{g} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{int} \Rightarrow 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \mu \Rightarrow g = \frac{-4}{3}\pi G r \mu$$

- 2) On applique le principe de la statique

$$-\vec{\text{grad}} P + \mu \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{-4}{3}\pi G r \mu^2 \Rightarrow P(r) - \underbrace{P(R_0)}_{=0} = \frac{-2}{3}\pi G \mu^2 (r^2 - R_0^2)$$

D'où  $P(0) = \frac{2}{3}\pi G \mu^2 R_0^2$  et par application de la loi des gaz parfaits

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow T = \frac{PMV}{Rm} = \frac{PM}{R\mu}$$

- 3) AN :  $\mu = \frac{\rho}{4/3\pi R_0^3} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $P(0) = 1,36 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$  et  $T(0) = 1,2 \cdot 10^7 \text{ K}$  En température, le modèle paraît "correct". En revanche en pression, on est assez loin du compte ... Il faut dire que le modèle  $\mu = \text{cste}$  me paraît ... suspect!

## EXERCICES COMPLEMENTAIRES

### Exercice 15. Calculs de charge

1.  $q_{anneau} = 2\pi R \lambda$     2.  $q_{disque} = \pi R^2 \sigma$     3.  $q_{disque} = \int_0^R kr \times 2\pi r dr = \frac{2}{3}\pi R^3 k$   
4.  $q_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$     5. a)  $Q = \rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{8}{15}\pi R^3 \rho_0$     5. b)  $\langle \rho \rangle = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{8}{15}\pi R^3 \rho_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{5}\rho_0$

### Exercice 16. Distribution discrète

	$V(O)$	$E_x(O)$	$E_y(O)$
Cas 1	$\frac{q}{\pi \epsilon_0 a}$	0	0
Cas 2	0	$\frac{q}{\sqrt{2}\pi \epsilon_0 a^2}$	0

### Exercice 17. Champ créé par un noyau non uniformément chargé

1. Charge totale  $Q$  du noyau :

$$Q = \iiint \rho d\tau = \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\int_0^a r^2 dr - \frac{1}{a^2} \int_0^a r^4 dr\right)$$

$$Q = \rho_0 4\pi \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a - \frac{1}{a^2} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a\right) = \rho_0 4\pi \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15}$$

2. Distribution à symétrie sphérique donc coordonnées sphériques.

#### Symétries et invariances de la distribution de charge

Plan de symétrie de la distribution de charge :

Tous les plans passant par OM sont  $\Pi^+$  en particulier les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  ou le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

Conclusion :  $\vec{E}$  appartient à l'intersection de ces plans. Il est donc porté par  $\vec{u}_r$ .

Invariances de la distribution de charge :

par rotation autour du point O :  $\vec{E}$  ne dépend pas de  $\theta$  ni de  $\phi$ .

Conclusion :  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$ .

Conclusion :  $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$

3. A l'extérieur du noyau  $r > a$

**Choix de la surface de Gauss :**

Puisque le champ est radial, on choisit une sphère de rayon  $r' = OM$  passant par M.

**Expression du flux  $\Phi$**

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E \cdot dS \quad \text{car } \vec{E} // d\vec{S}$$

$$\Phi = E \oiint_S dS \quad \text{car } E \text{ ne dépend que de } r \Rightarrow \Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi r'^2$$

**Détermination de la charge  $Q_{int}$**

$$Q_{int} = Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$$

**Application du théorème de Gauss :**  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

4. A l'intérieur du noyau, même démarche mais  $Q_{int}$  est différent.

**Détermination de la charge  $Q_{int}$**

$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left( \int_0^r r^2 dr - \frac{1}{a^2} \int_0^r r^4 dr \right)$$

$$\rho_0 4\pi \left( \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^r - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^r \right) = \rho_0 4\pi \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right)$$

**Application du théorème de Gauss :**  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \vec{u}_r$$

On vérifie la continuité du champ pour  $r = a$ .

---

### Exercice 18. Distribution de charges (corrigé J. Kieffer)

Les invariants et symétries permettent d'écrire  $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$ .

Le plus simple est alors de considérer un seul plan épais puis d'appliquer le principe de superposition pour trouver le champ total.

Pour un plan épais d'épaisseur  $e$  (on repère  $z'$  dont l'origine est au centre du plan). On applique (comme dans le cours) un théorème de Gauss sur un cylindre de section  $S$  et compris entre  $z'$  et  $-z'$ .

Dans le cas  $z' < e/2$ , le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{2z'S\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{\epsilon_0} z'$$

Dans le cas  $z' > e/2$ , le théorème de Gauss s'écrit cette fois :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{e\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{e}{2}$$

On peut alors appliquer le principe de superposition au deux plans pour trouver le champ total :

— pour  $z < -e$ ,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$

— pour  $-e < z < 0$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}(z+e)\vec{e}_z$$

— pour  $0 < z < e$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}(z-e)\vec{e}_z$$

— pour  $e < z$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

