

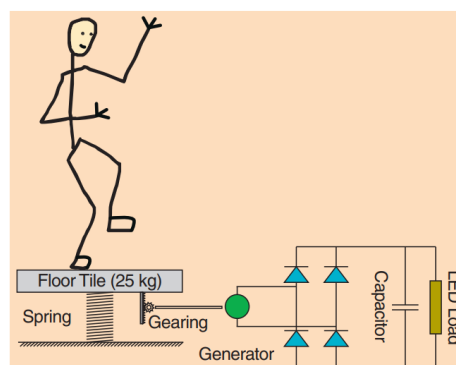
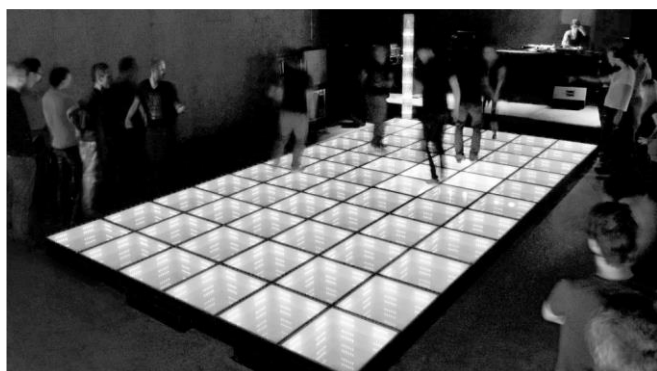
## D.M. DE PHYSIQUE-CHIMIE N°6

A rendre pour le lundi 04 Novembre

	Problème N°1	Problème N°1 bis	Problème N°2	Problème N°3
<b>Niveau 1</b>	questions 1 à 10	-	questions 1 et 2	questions 1 à 13
<b>Niveau 2</b>	tout	-	Partie A)	questions 1 à 15
<b>Niveau 3</b>	-	tout	tout	questions 6 à 21

### PROBLEME N°1 : RECUPERATION DE L'ENERGIE DE VIBRATION (ATS)

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).



**Document 1** : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.

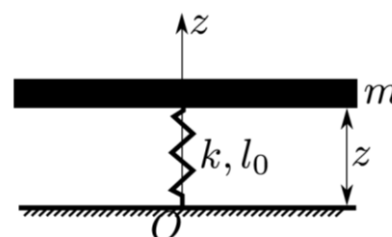
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI 10.1109/MIAS.2010.939649.

Nous étudions dans un premier temps la réponse mécanique de ce système puis la conversion de puissance mécanique en puissance électrique .

### 1) ETUDE EN REGIME LIBRE

En première approximation, le système est modélisé comme une masse  $m$  (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement.



C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse.

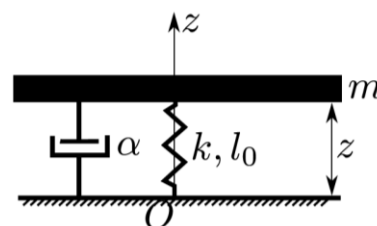
On note  $k$  la raideur du ressort,  $l_0$  sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme  $g$  est dirigé vers le bas de la figure.

**Document 2** : modèle simplifié du système réel.

- 1) En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre  $z_{\text{éq}}$  de la masse, en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .
- 2) Établir ensuite à l'aide de la seconde loi de Newton l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$  lorsque le système est mis en mouvement.
- 3) Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration.

Quelle est la nature du mouvement ?

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3.



**Document 3** : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement.

L'amortisseur exerce sur la masse une force  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de la masse et  $\alpha$  une constante positive.

- 4) En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$ .
- 5) Mettre l'équation sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = +\omega_0^2 z_e \quad (1)$$

avec  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $z_e$  des constantes dont on donnera les expressions en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $l_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

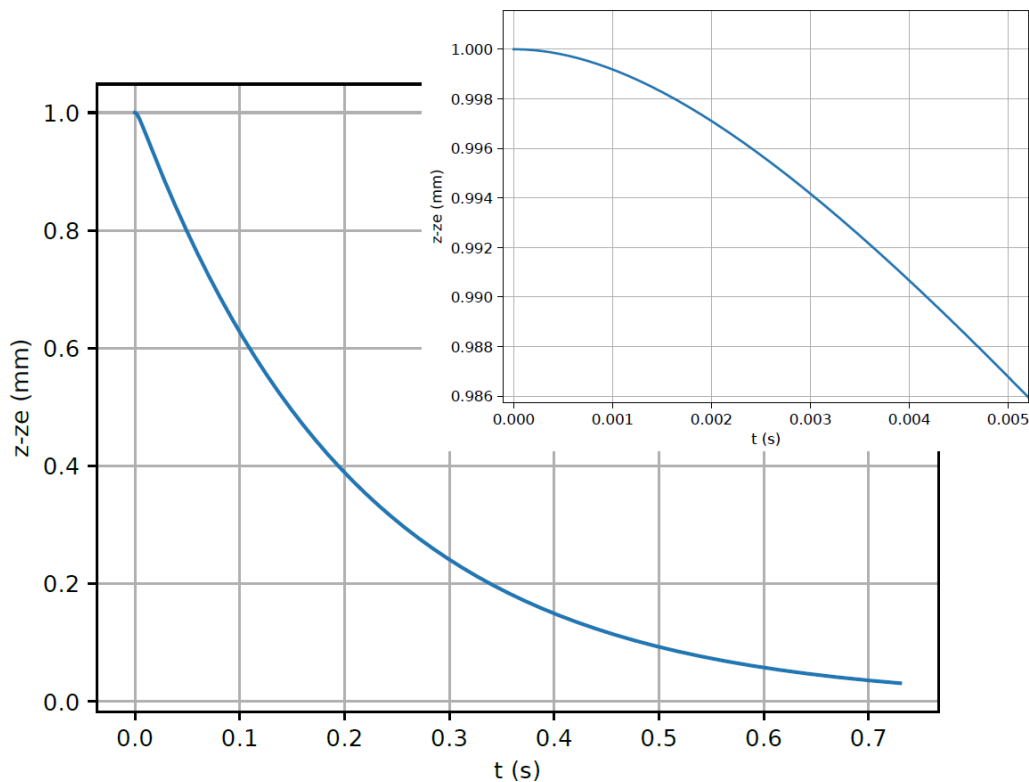
- 6) Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du second ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité  $Q$  qui correspondent à chaque régime.

D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

**Tableau des paramètres retenus** par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

$m$	$k$	$\alpha$	$\omega_0$	$Q$	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N.m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg.s}^{-1}$	$43 \text{ rad.s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

- 7) Le document 4 ci-dessous montre le tracé de la solution  $z(t) - z_e$ . En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



Document 4 : tracé de  $z(t) - z_e$  et zoom aux temps courts.

## 2) Étude en régime sinusoïdal forcé

Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé.

On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais  $z_e = 0$ .

– On note  $z_d(t) = A \cos(\omega t)$  la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur  $A$  est positif.

– On étudie le régime permanent où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme  $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $Z_m > 0$ .

– On utilise la représentation complexe :  $z_d(t)$  est représenté par  $\underline{z}_d(t) = A e^{j\omega t}$ , et  $z(t)$  est représenté par  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$  avec  $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi}$ . (Avec comme d'habitude  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$ ).

On admet qu'une démarche similaire à celle de la sous-partie précédente mène à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d \quad (2)$$

avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour  $\omega_0$  et  $Q$ , et avec  $\mu$  une constante donnée par  $\mu = \frac{\text{masse du danseur}}{m} \approx 0,7$ .

**8)** À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{Z}_m$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\mu$  et  $A$ .

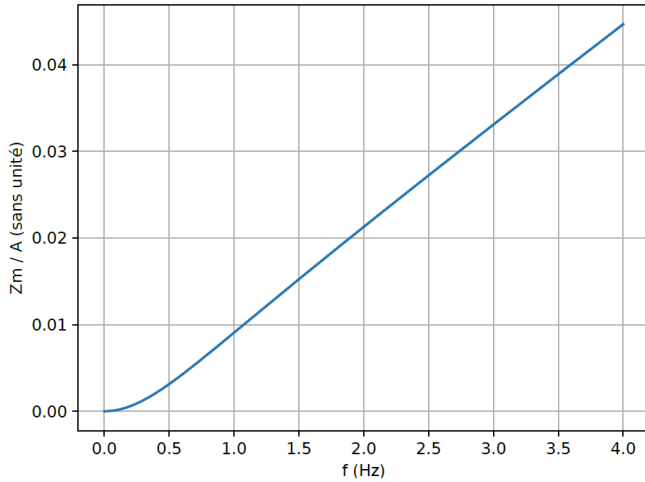
**9)** En déduire une expression de l'amplitude  $Z_m$  en fonction des mêmes paramètres.

**10)** Donner l'expression de la limite de  $Z_m$  à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.

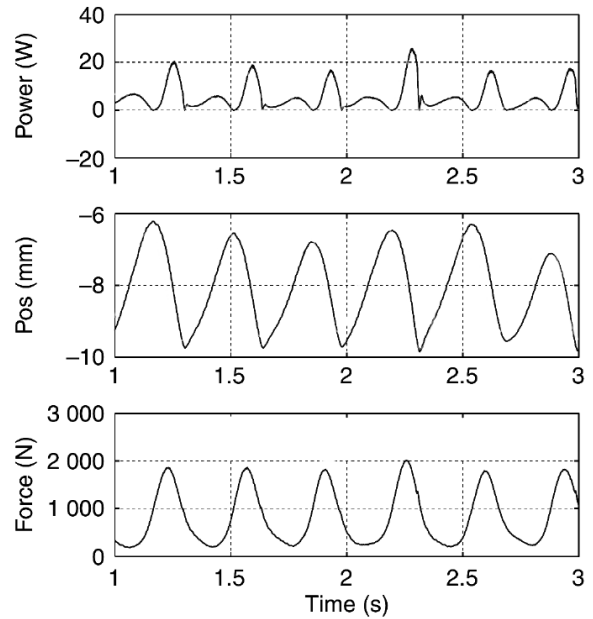
On admet qu'en posant  $u = \frac{\omega_0}{\omega}$ , on peut écrire  $Z_m = \frac{A\mu}{\sqrt{(u^2-1)^2 + u^2/Q^2}}$ .

**11)** Montrer qu'il existe un phénomène de résonance à condition que  $Q$  vérifie une certaine inégalité qu'on établira.

Y a-t-il existence d'une résonance pour le système considéré ici ?



**Document 5 :** tracé de  $Z_m/A$  en fonction de la fréquence, à basse fréquence, à partir de l'expression établie dans cette sous-partie.



**Document 6 :** expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur). De bas en haut : enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle, de la position  $z(t)$  de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire) et de la puissance

On s'intéresse maintenant à une confrontation entre notre modèle et un enregistrement en situation réelle. En exploitant les documents 5 et 6 :

- 12)** Proposer une estimation de la valeur de la fréquence  $f$  d'excitation, ainsi que de la valeur de  $Z_m$  à cette fréquence.
- 13)** En déduire une estimation de la valeur de l'amplitude  $A$  des mouvements du danseur.
- 14)** D'autre part, sachant que d'après l'équation (2), la force exercée par le danseur sur la dalle s'écrit  $F = -m_{\text{danseur}}\ddot{z}_d$ , estimez l'amplitude de cette force (la masse du danseur est de 60 kg).

Cette amplitude est-elle du même ordre de grandeur que celle mesurée par le constructeur dans le document 6 ?

## PROBLEME N°1 – BIS : LE MILLENIUM BRIDGE (CMP)

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au-dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on

remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

Un oscillateur est constitué d'une masse  $m$ , dont le centre d'inertie  $G$  est repéré par la position  $x$  dans le référentiel galiléen  $(O, \hat{u}_x)$  - voir figure 1. L'origine  $O$  se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité  $\alpha$ , exerçant sur  $m$  une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$ . À tout instant  $t$ , on assimile la distance  $OG$  à la longueur  $\ell(t)$  du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur avec  $\vec{g} = -g \hat{u}_x$  avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

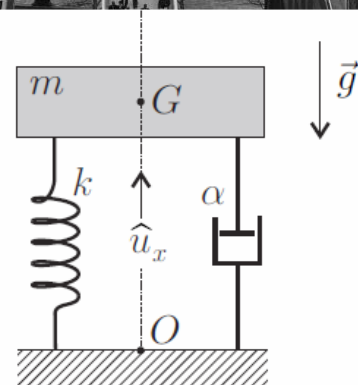


FIGURE 1 – Oscillateur

□ 1 – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0$$

dans laquelle on a introduit la fonction  $X(t) = x(t) - \tilde{x}$  où  $\tilde{x}$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $g$ ,  $\omega_0$  et  $\ell_0$ . On précisera les expressions et significations de  $\omega_0$  et  $\xi$ .

□ 2 – Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles  $X(0) = X_0 \neq 0$  et  $\dot{X} = V_0 \neq 0$ . Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $X_0$ ,  $V_0$  et  $t$ ) pour les cas  $\xi = 0$  et  $0 < \xi < 1$  et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit  $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\beta > 0$ . Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage)  $F(t)$  de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

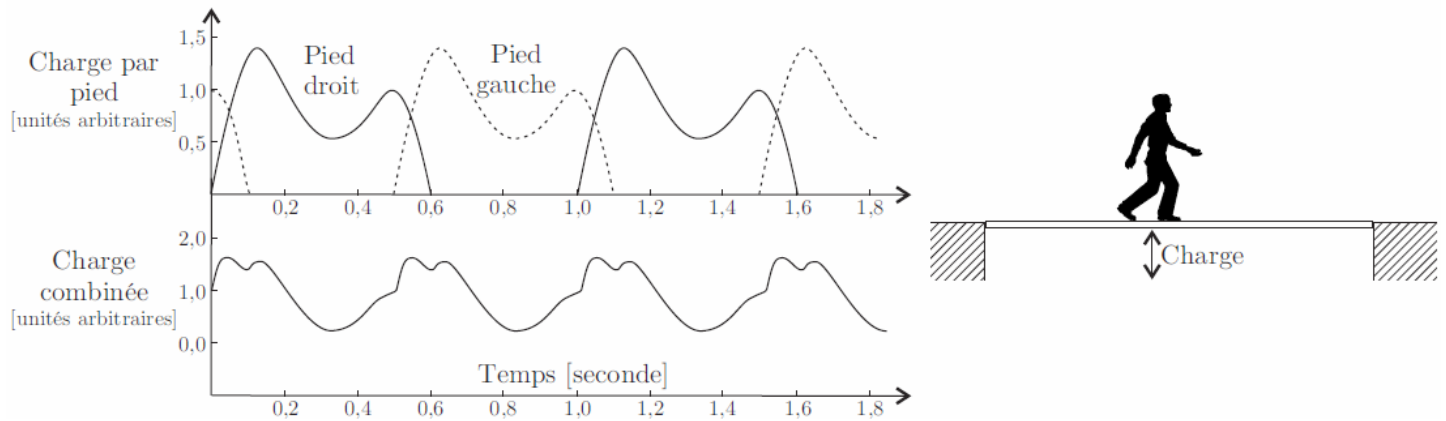


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique  $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$ .

Le vecteur  $\vec{F}_0$  correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence  $f$  correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que  $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$ . Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme  $-\hat{u}_x$ .

On note  $F_0 = \|\vec{F}_0\|$  le module de la force statique,  $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  la réponse en déplacement de l'oscillateur et  $\underline{Y} = Y m e^{i\omega t}$  sa représentation complexe.

□ 3 – Que devient l'équation de l'oscillateur en  $Y$  sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement  $Y$  sur la représentation complexe de l'excitation  $\underline{E} = \frac{F_1}{m}$ . Montrer que  $\underline{H} = \frac{Y}{\underline{E}}$  peut s'exprimer en fonction de  $\xi$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  sous la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{Y}{\underline{E}} = \frac{1}{\omega_0^2} \left[ \frac{A_0}{(1-\Omega^2) + 2i\xi\Omega} \right].$$

□ 4 – Sous quelle condition portant sur  $\xi$  un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation  $\omega_r$ , obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance  $|\underline{H}|(\omega_r)$  dans la limite  $\xi^2 \ll 1$ .

□ 5 – En se plaçant dans l'hypothèse  $\xi^2 \ll 1$  et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de  $\xi$  ainsi que la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

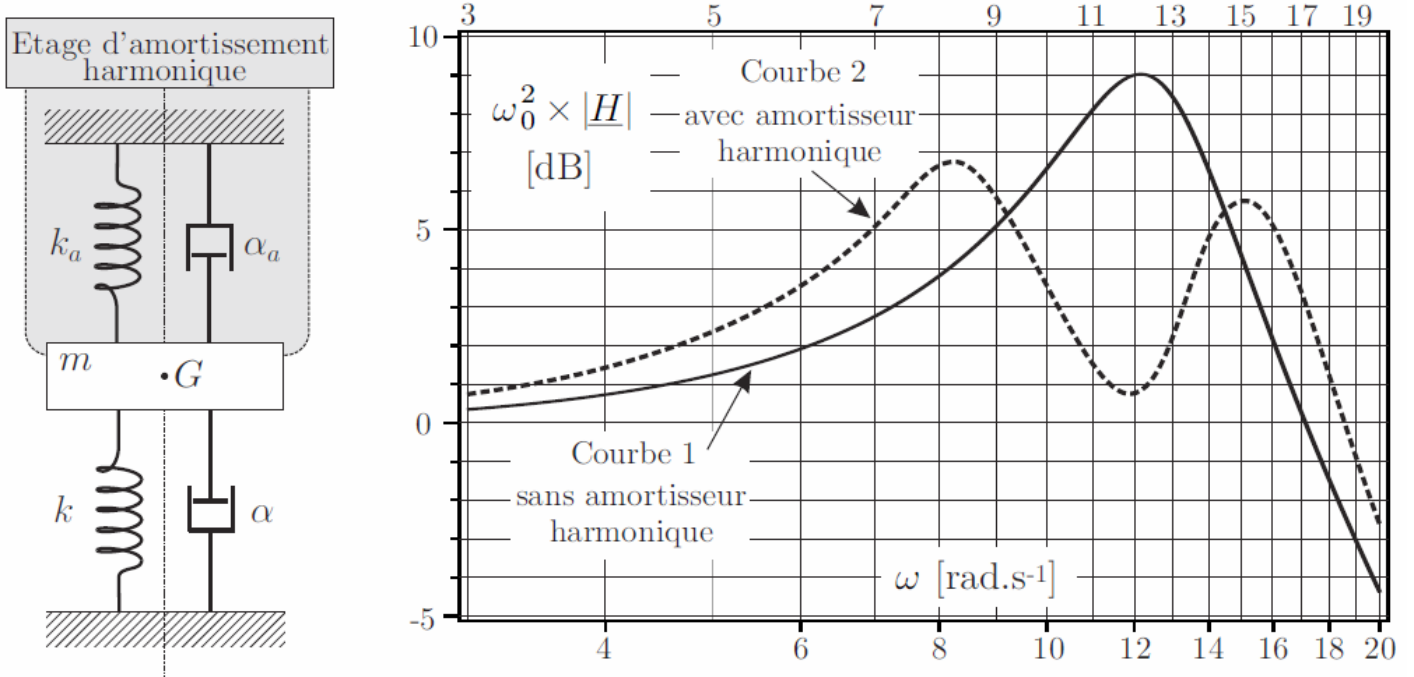


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge

❑ 6 – Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

❑ 7 – Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux reproduit sur la figure 4.

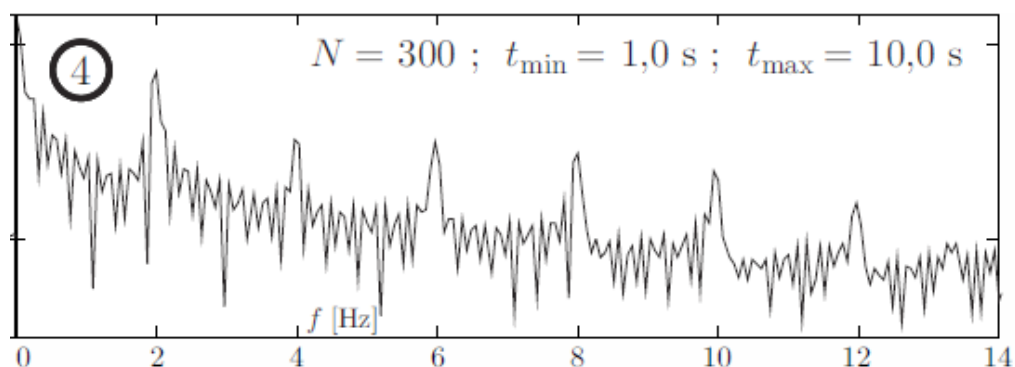


FIGURE 4 – Spectre du signal correspondant à la marche d'un piéton

❑ 8 – En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?



□ 9 – À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

## PROBLEME N°2 : MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES (CCINP)

On suppose dans tout le problème que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , ce qui revient à négliger toute correction relativiste.

Les effets de la gravitation seront également négligés.

**Données :**

- Charge élémentaire  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C
- Vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>
- Perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>
- Permittivité du vide  $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9}$  F.m<sup>-1</sup>
- Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont  $m_{U5} = 235$  uma et  $m_{U8} = 238$  uma, avec 1 uma (une unité de masse atomique) =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  kg.

### A) Spectrographe de masse

On considère un référentiel galiléen muni d'un repère cartésien  $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ .

Une particule chargée de charge  $q$  positive et de masse  $m$  pénètre avec un vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  au point  $O$  de coordonnées  $(0,0,0)$  dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  perpendiculaire à  $\vec{v}_0$  (figure 1).

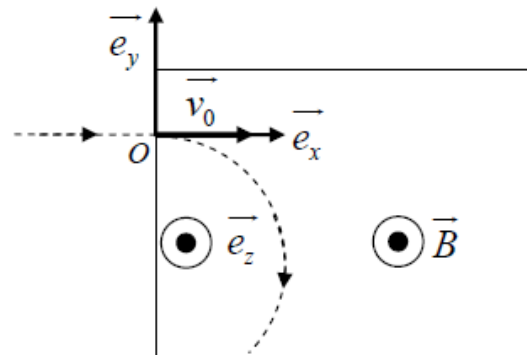


Figure 1 : trajectoire d'une particule de charge  $q$  positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

- 1) On admet que cette particule décrit une trajectoire plane et circulaire. Exprimer le rayon  $R$  de cette trajectoire en fonction de  $m$ ,  $v_0$ ,  $q$  et  $B$  ainsi que la vitesse angulaire  $\omega_c$  à laquelle elle est parcourue, dite pulsation cyclotron.

Pour séparer les deux isotopes naturels de l'uranium, l'uranium 238 et l'uranium 235, il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse où règne un vide poussé.

Cet appareil comporte trois parties, représentées en figure 2.

Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en ions  $U^+$ , de charge  $q = +e$ , d'où ils sortent par la fente  $F_1$  avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension  $W = V_{P1} - V_{P2}$  entre les deux plaques  $P_1$  et  $P_2$ . Enfin les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme,



d'intensité  $B = 0,1 \text{ T}$ , perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et parviennent à deux collecteurs  $C_1$  et  $C_2$ .

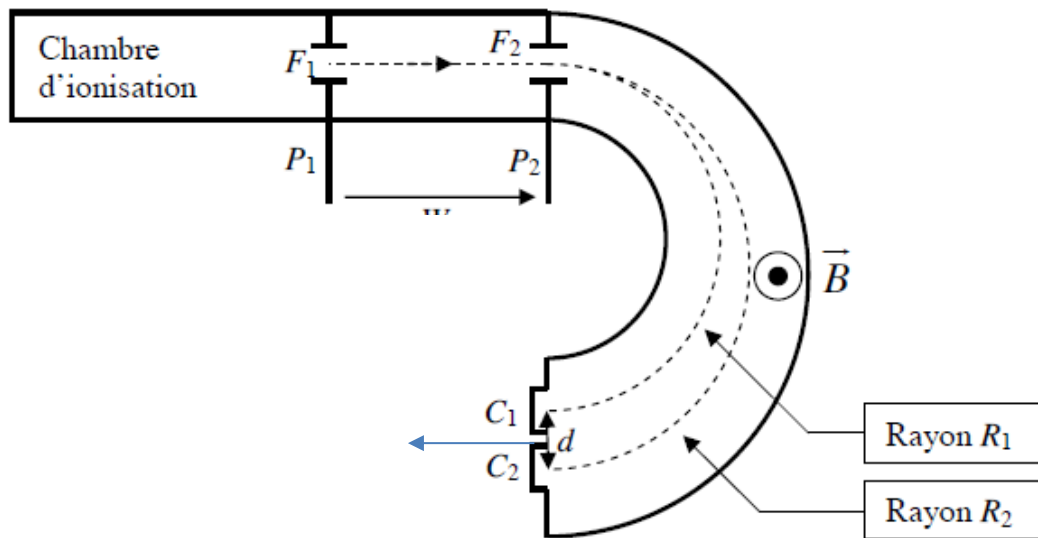


Figure 2 : schéma de principe du spectrographe de masse

- 2) Etablir l'expression  $v_0$  de la vitesse atteinte en  $F_2$  à l'entrée de la chambre de déviation.
- 3) Calculer la tension  $W$  pour que la distance entre les deux collecteurs soit égale à  $d = 2 \text{ cm}$ .

## B) Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux  $D_1$  et  $D_2$  dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit.

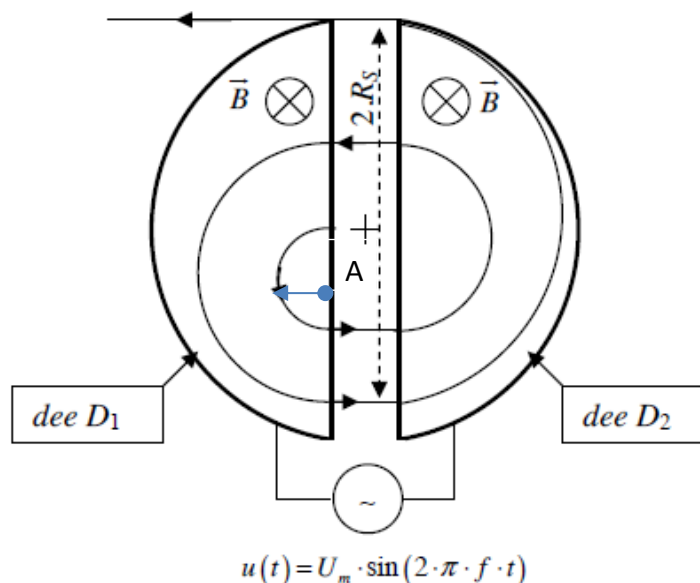


Figure 3 : schéma de principe du cyclotron

Un champ magnétique uniforme, d'intensité  $B = 1,00 \text{ T}$ , règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrostatique variable peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant entre les *dees* une tension alternative sinusoïdale

$u(t)$  qui atteint sa valeur maximale  $U_m = 100$  kV lorsque le proton traverse cet espace. Les protons de masse  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg et de charge électrique  $q = +e$  sont injectés au centre du cyclotron au niveau du point A avec une énergie cinétique négligeable.

Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est  $R_s = 50,0$  cm.

- 4) Déterminer l'expression littérale de la durée  $T_{1/2}$  mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de  $m_p$ ,  $e$  et  $B$ . Qu'en déduisez-vous ?
- 5) Justifier le choix d'une tension  $u(t)$  alternative sinusoïdale.
- 6) En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence  $f$  de la tension alternative sinusoïdale  $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$  pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
- 7) Déterminer l'expression puis la valeur en eV de l'énergie cinétique  $E_{Cs}$  d'un proton à la sortie du cyclotron.
- 8) Déterminer l'expression du nombre de tours  $N$  effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de  $e$ ,  $R_s$ ,  $B$ ,  $m_p$  et  $U_m$ . Effectuer l'application numérique.
- 9) Pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge  $q$  et d'accélération  $a$  rayonne une puissance  $P_r$  donnée par la formule de Larmor :  $P_r = \frac{\mu_0 \cdot q^2}{6 \pi c} a^2$ . On rappelle que  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.
  - a) Montrer qu'une particule chargée de charge  $q$  et de vitesse  $v$  qui décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$  rayonne une puissance  $P_r$  de la forme  $P_r = \alpha v^4$ . Exprimer le coefficient  $\alpha$  en fonction de  $q$ ,  $c$ ,  $R$  et  $\mu_0$ .
  - b) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon  $R_s = 50$  cm. Conclure.
  - c)

### PROBLEME N°3 : DESCENTE EN LUGE (ATS)

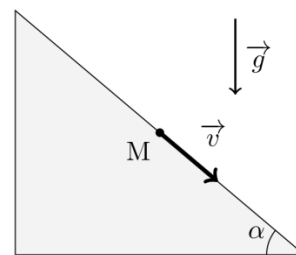
La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble { luge + lugeur } (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse  $m = 100$  kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



## A) Etude préliminaire

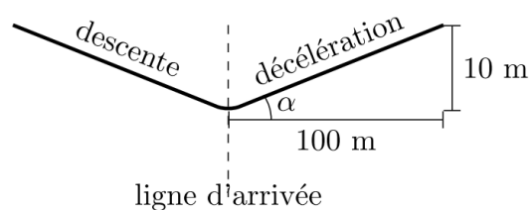
Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse  $v_0 = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$ . Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle  $\alpha$  l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.



1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.
2. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération  $a$  de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de l'angle  $\alpha$ .
3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée  $t$  la luge atteint-elle la vitesse  $v_a = 30 \text{ m.s}^{-1}$  ? Application numérique.
4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse  $v_a$  ? Application numérique.

La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse  $v_a = 30 \text{ m.s}^{-1}$ . Dans cette partie, les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu.

5. Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . Déterminer la longueur  $L$  de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de  $v_a = 30 \text{ m.s}^{-1}$  à l'arrêt, en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

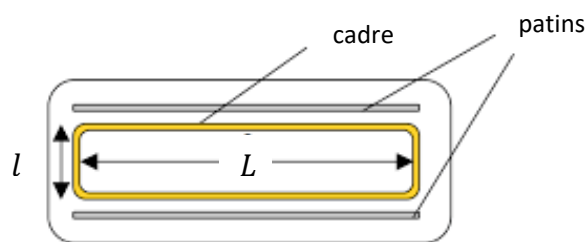
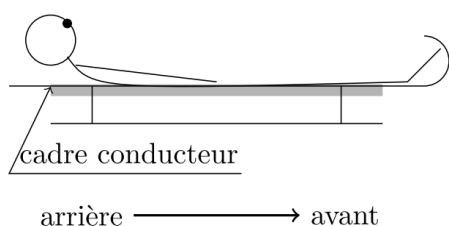


Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

L'infrastructure ne se prêtant pas à la réalisation d'une piste inclinée de décélération on envisage un autre type de freinage ; c'est ce freinage et ses conséquences qui est étudié dans la suite.

## B) Freinage magnétique de la luge

On fixe sous la luge un cadre métallique rigide, conducteur, rectangulaire, de résistance totale  $R = 1,0 \cdot 10^{-2} \Omega$ , d'auto-inductance négligeable et de côtés  $l \times L$ .



Figures 2 a) et b) : Schémas de la luge dotée d'un cadre métallique

Pour la modélisation, on assimile à nouveau l'ensemble {luge + lugeur + cadre} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse  $m = 100 \text{ kg}$ .

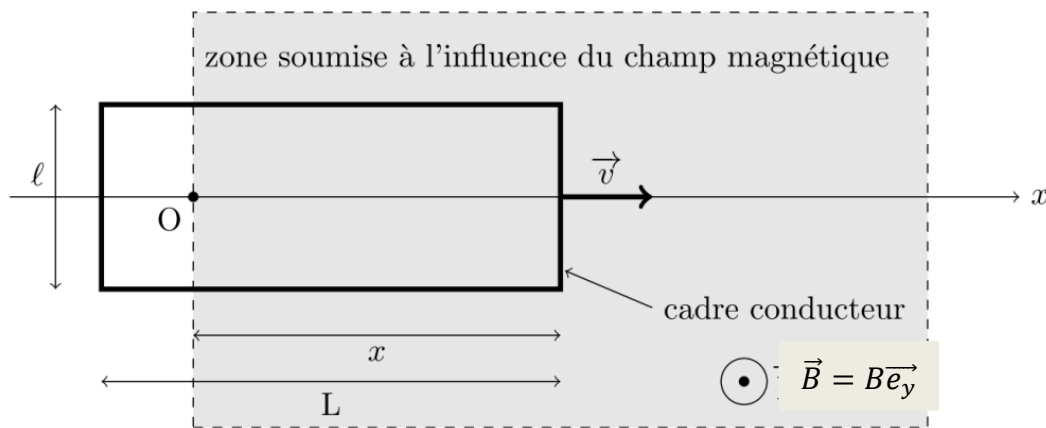
La luge franchit la ligne d'arrivée (située au point O) à la vitesse  $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$  et pénètre sur la piste de décélération juste après la ligne d'arrivée.

La piste de décélération est horizontale ; on considérera un référentiel  $(Oxyz)$  galiléen lié au sol : l'origine O est prise au niveau de la ligne d'arrivée, l'axe  $Ox$  le long de la piste de décélération (qui correspond donc à  $x > 0$ ), l'axe  $Oy$  selon la verticale ascendante.

Un dispositif adéquat crée un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_y$  ( $B = 1,0 \text{ T}$ ) stationnaire et uniforme sur toute ou partie de la longueur de piste de décélération (et sur toute la largeur de la piste). La position du cadre est repérée par l'abscisse  $x$  de son extrémité avant et on suppose  $x = 0$  à  $t = 0$ .

6. Le champ magnétique a une valeur de 1 T. Est-ce élevé ? Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre ?

On supposera dans un premier temps que le champ magnétique est étendu à toute la zone  $x > 0$ .



Figure

3 : Cadre

### conducteur entrant dans la zone magnétique

7. Décrire (sans calcul) les différentes phases du mouvement de la luge depuis la ligne d'arrivée jusqu'à ce qu'elle soit totalement plongée dans la zone soumise au champ magnétique.

On souhaite dans un premier temps étudier la phase au cours de laquelle le cadre se trouve partiellement plongé dans le champ magnétique.

8. Etablir l'expression du flux magnétique  $\Phi$  qui traverse le cadre lorsqu'il pénètre dans la zone magnétique.
9. Exprimer l'intensité  $i$  induite dans le cadre en fonction de la vitesse  $v$  du cadre, de sa largeur  $l$ , du champ magnétique  $B$  et de la résistance  $R$  du cadre.
10. Par application du principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe  $Ox$ , donner l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse  $v = \frac{dx}{dt}$  de la luge lors de cette première phase. Mettre en évidence un temps caractéristique  $\tau$  que l'on exprimera en fonction de  $B$ ,  $m$ ,  $l$  et  $R$  (résistance du cadre).
11. Que peut-on dire du mouvement lorsque le cadre est totalement plongé dans le champ magnétique ? Commenter.
12. Déterminer la position  $x(t)$  de la luge pendant la phase de décélération en fonction de  $t$ ,  $\tau$  et  $v_0$ .
13. Déterminer la durée  $t_f$  que met le cadre de longueur  $L$  pour pénétrer entièrement dans la zone magnétique.

14. En déduire l'expression  $v(t_f)$ . Déterminer la variation  $\Delta v = v_0 - v(t_f)$  de vitesse de la luge entre les instants  $t = 0$  et  $t_f$ . Calculer numériquement  $\tau$  puis  $\Delta v$ .

On donne :  $l = 30 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$ ,  $B = 1,0 \text{ T}$  et  $R = 1,0 \times 10^{-2} \Omega$

15. Montrer que l'engin ne stoppe qu'à condition que  $L$  soit supérieure à une certaine valeur que l'on précisera. Faire l'application numérique. Est-ce réalisable ?

On suppose à présent que le champ magnétique (stationnaire et uniforme) est non nul uniquement dans la zone comprise entre  $x = 0$  et  $x = d$ .

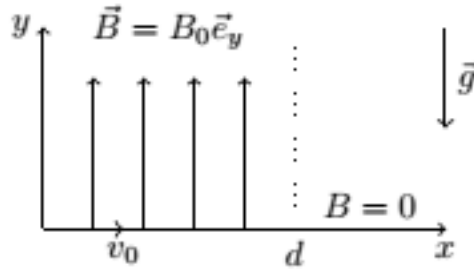


Figure 4 : zone de champ magnétique non nul

16. Si  $L \geq d$ , montrer qualitativement qu'il existe deux phases de freinage séparées par une phase où la vitesse reste constante et déterminer la vitesse à l'issue des deux phases de freinage.

17. Même question si  $L \leq d$ .

18. Quelle valeur doit-on donner à  $d$ , en fonction de  $L$ , pour optimiser le freinage ?

On place  $N$  zones de champ magnétique identiques à la précédente séparées les unes des autres d'une distance  $D$ .

19. Quelle doit être la distance  $D$  pour encore une fois optimiser le freinage ?

20. Quelle valeur donner à  $N$  pour stopper le skeleton ? En déduire la distance d'arrêt et comparer sa valeur numérique aux valeurs trouvées précédemment.

21. Donner un exemple d'utilisation de freinage par induction.

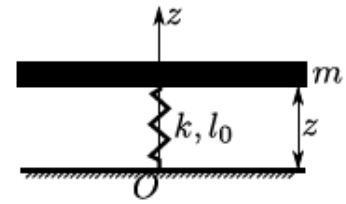
## PROBLEME N°1 : RECUPERATION DE L'ENERGIE DE VIBRATION (ATS 2023)

### 1) ÉTUDE EN REGIME LIBRE

1. Le système (dalle + danseur) de masse  $m$  est soumis à :

- son poids  $m\vec{g}$

- la force de rappel exercée par le ressort  $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z = -k(z - \ell_0) \vec{e}_z$



Selon le principe fondamental de la statique appliqué au système dans le référentiel terrestre supposé galiléen, à l'équilibre :

$$m\vec{g} - k(z_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_z = \vec{0}$$

soit, en projetant selon l'axe ( $Oz$ ) ascendant :

$$-mg - k(z_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$$

$$\boxed{z_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

**Remarque :** vérifier la cohérence du signe obtenu ! il faut  $z_{\text{éq}} < \ell_0$ , cohérent avec le système qui vient comprimé par son poids le ressort

2. Principe fondamental de la dynamique appliqué au système :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(z - \ell_0) \vec{e}_z$$

Projection sur  $\vec{e}_z$

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0)$$

soit

$$m\ddot{z} + kz = k\ell_0 - mg$$

ou

$$\boxed{m\ddot{z} + kz = kz_{\text{éq}}}$$

3. Sous forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{\text{éq}}$$

On retrouve la forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

**mouvement sinusoïdal (non amorti) de pulsation propre** (par identification)

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Solution générale à l'équation homogène :  $z_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

**Attention ! ne pas redémontrer les solutions comme en maths mais reconnaître la forme canonique d'un oscillateur harmonique non amorti : les SGEH sont alors des résultats de cours**

Solution particulière à l'équation complète :  $z_p(t) \stackrel{\substack{= \\ \text{2nd membre} \\ \text{constant}}}{=} z_{\text{éq}}$

**Attention à ne pas oublier le second membre ! connaître son interprétation physique : il s'agit de la position à l'équilibre de l'oscillateur harmonique étudié.**

Solution générale à l'équation complète :

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$A$  et  $B$  constantes d'intégration pouvant être déterminées à l'aide des conditions initiales.

Oscillations sinusoïdales (harmoniques) non amorties.

4. On ajoute la force de frottement dans l'expression du principe fondamental de la dynamique :

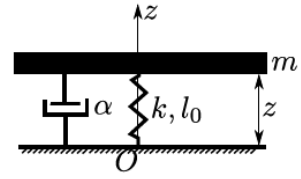
$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(z - \ell_0) \vec{e}_z - \alpha \vec{v}$$

d'où en projetant sur  $\vec{e}_z$

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0) - \alpha \dot{z}$$

soit

$$m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = k\ell_0 - mg$$



5. Sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_{\text{eq}}$$

de la forme

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; z_e = z_{\text{eq}} ; \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

6. Les trois régimes possibles pour le système sont :

Régime **apériodique** : si  $Q < 1/2$  ; Régime **critique** : si  $Q = 1/2$  ; Régime **pseudopériodique amorti** : si  $Q > 1/2$

Ici, facteur de qualité  $Q = 0,11$  : **régime apériodique**.

7. On lit sur le tracé principal que  $z(t=0) - z_e = 1,0 \text{ mm}$  (et même 1,000 mm grâce au zoom)

Sur le tracé zoomé, on voit que la tangente est horizontale au départ, donc  $\dot{z}(t=0) = 0$ .

## 2) ÉTUDE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

8. On écrit l'équation complexe associée à l'équation différentielle donnée

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d$$

avec

$$z = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)} = Z_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{Z}_m e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{z} = j\omega \underline{z} \Rightarrow \ddot{z} = -\omega^2 \underline{z}$$

et

$$\underline{z}_d = A e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{z}_d = -\omega^2 \underline{z}_d$$

d'où

$$\underline{z} \left( -\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = +\mu \omega^2 \underline{z}_d$$

$$\underline{Z}_m e^{j\omega t} \left( -\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \mu \omega^2 A e^{j\omega t}$$

$$\underline{Z}_m \left( -\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \mu \omega^2 A$$

d'où l'amplitude complexe



$$\underline{Z_m = \frac{\mu \omega^2 A}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}$$

9. On en déduit l'amplitude réelle

$$\underline{Z_m = |Z_m| = \frac{\mu \omega^2 A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

Le module du rapport de deux nombres complexes est égal au rapport des modules de ces deux nombres complexes ; ne pas chercher à multiplier par le conjugué du dénominateur !!

10. Valeurs limites

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_m = 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_m = \mu A$$

11. Entre ces deux valeurs limites, il est possible qu'il y ait un maximum pour  $Z_m$ , correspondant alors à une résonance.

On donne

$$Z_m = \frac{\mu A}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$Z_m$  présente un extremum (qui ne peut qu'être un maximum) si le dénominateur présente un minimum, et donc si la fonction  $D(u) = (u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$  présente sous la racine présente un minimum.

On cherche donc  $u$  tq  $\frac{dD(u)}{du} = 0$

$$\frac{dD(u)}{du} = \frac{d}{du} \left( (u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \right) = 2u \frac{d}{du^2} \left( (u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \right) = 2u \left( 2(u^2 - 1) + \frac{1}{Q^2} \right) = 4u \left( u^2 - \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right)$$

$$\text{On a donc } \frac{dD(u)}{du} = 0 \Leftrightarrow 4u \left( u^2 - \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } u^2 - \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right) = 0$$

La dérivée  $\frac{dD(u)}{du}$  s'annule pour une pulsation réduite différente de 0 si et seulement si  $u^2 - \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right) = 0$  admet une solution réelle positive, ce qui impose

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow Q^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il existe un phénomène de **résonance** ssi  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$Q = 0,11 < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

**Il y a donc absence de résonance pour le système étudié**

12. Sur le **document 6**, on peut évaluer la période  $T = 1/f$  d'excitation :  $3T = \frac{3}{f} \approx 1 \text{ s}$  d'où

$$\underline{f \approx 3 \text{ Hz}}$$

Sur ce même **document 6**, la position  $z(t)$  varie entre  $-9,5 \text{ mm}$  et  $-6,5 \text{ mm}$  environ, ce qui donne une amplitude crête à crête de l'ordre de 3 mm, ou encore une amplitude de 1,5 mm.

$$\underline{Z_m \approx 1,5 \text{ mm}}$$

13. Sur le **document 5**, on peut lire, pour  $f \approx 3 \text{ Hz}$  :  $\frac{Z_m}{A} \approx 0,033$  d'où  $A \approx \frac{Z_m}{0,033} \approx 30 \times 1,5$

$$\underline{A \approx 45 \text{ mm}}$$

C) La force exercée par le danseur sur la dalle est :

$$F = -m_{\text{danseur}} \ddot{z}_d = +m_{\text{danseur}} \omega^2 z_d = +m_{\text{danseur}} \omega^2 A \cos(\omega t)$$

Son amplitude est donc

$$F_m = m_{\text{danseur}} \omega^2 A \approx A m_{\text{danseur}} (2\pi f)^2$$

A.N. :  $F_m \approx 60 \times 40 \times 9 \times 4,5 \times 10^{-2} \times 6 \times 4 \times \frac{81}{2}$

$$F_m \approx 1 \times 10^3 \text{ N}$$

Sur le **document 6**, on peut évaluer que l'amplitude est d'environ  $8 \times 10^2 \text{ N}$ , les deux valeurs sont du même ordre de grandeur.

## PROBLEME N°1-BIS : LE MILLENIUM BRIDGE MINES MP 2016

### I) Oscillateur simple

1 Etude du système de masse  $m$  dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Cet objet subit son poids, la force de rappel élastique et le frottement fluide.

La relation fondamentale de la dynamique vectorielle appliquée à la masse donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = [-k(x - \ell_0) - \alpha \dot{x} - mg] \hat{u}_x$$

projeté sur l'axe  $(Ox)$ , on obtient  $m\ddot{x} + k(x - \ell_0) + \alpha\dot{x} + mg = 0$ .

A l'équilibre :  $0 + k(x_{eq} - \ell_0) + 0 + mg = 0$ , avec  $x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$

Par différence :  $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k(x - x_{eq}) = 0$

En posant  $X = x - x_{eq} = x - \ell_0 + \frac{mg}{k}$ , on a  $\dot{X} = \dot{x}$  et  $\ddot{X} = \ddot{x}$ , on obtient la relation demandée :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

On identifie alors :

$$x_{eq} = \tilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \text{ (longueur du ressort à l'équilibre, soit position d'équilibre du système),}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(pulsation propre = pulsation des oscillations libres en l'absence d'amortissement)}$$

$$2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}, \text{ soit } \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \text{ ou encore comme } \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q}, \xi = \frac{1}{2Q} \text{ ou encore comme } \frac{\alpha}{m} = 2\lambda, \xi = \lambda / \omega_0$$

Ce coefficient  $\xi$  caractérise l'amortissement. Il évolue comme le coefficient d'amortissement  $\lambda$  mais est sans dimension, ou il évolue inversement avec  $Q$ .

Plus  $Q$  est grand, plus  $\xi$  est petit, moins l'oscillateur est amorti.

2 – Cas  $\xi = 0$  :

L'équation du mouvement devient  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ . On a donc un oscillateur harmonique dont la réponse est :

$$X = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

L'application des conditions initiales donne  $X(0) = X_0 = A$  et  $\dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0$ , soit une solution :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Il s'agit d'une solution oscillante non amortie idéale (elle ne se rencontre pas en réalité).

**Cas 0 <  $\xi$  < 1 :**

l'équation du mouvement complète, homogène,  $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0$  se résout en posant le polynôme caractéristique

$$r^2 + 2\xi\omega_0r + \omega_0^2 = 0.$$

Son discriminant réduit s'écrit  $\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2$ .

La condition imposée sur  $\xi$  donne donc un discriminant réduit négatif et des solutions complexes conjuguées :

$$r = -\xi\omega_0 \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\omega_0, \text{ correspondant à un régime pseudo-périodique.}$$

On peut poser pour des raisons pratiques la pseudo-période  $\omega = \sqrt{1 - \xi^2}\omega_0$ .

La réponse du système est alors de la forme :  $X(t) = \exp(-\xi\omega_0t) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ .

L'application des conditions initiales donne  $X(0) = X_0 = A$  et  $\dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0A + B\omega$ , soit une solution :

$$X(t) = \exp(-\xi\omega_0t) \left[ X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0X_0}{\omega} \sin(\omega t) \right].$$

Il s'agit d'une solution oscillante amortie plus réaliste avec un amortissement pas trop élevé.

Si l'on rajoute l'action du vent, c'est le terme d'amortissement qui se trouve modifié :  $\alpha$  est remplacé par  $\alpha - \beta$ . L'action globale est donc de diminuer l'amortissement et donc  $\xi$ .

- Si la différence  $\alpha - \beta$  reste positive, les oscillations sont toujours amorties mais moins rapidement amorties et peuvent conduire à un grand inconfort rendant le pont peu praticable.
- Mais ce coefficient  $\alpha - \beta$  peut éventuellement devenir négatif ce qui engendre une instabilité : la solution mathématique comporte alors une exponentielle à coefficient positif donc croissante et divergente au lieu d'une exponentielle décroissante. L'évolution devient alors une sinusoïde à amplitude croissante. Cela pose évidemment un grand problème pratique : le vent peut conduire à des oscillations amplifiées et à la destruction de la structure.

▣ **3** – En présence du forçage piéton (excitation périodique), le principe fondamental de la dynamique devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = [-k(x - \ell_0) - \alpha\dot{x} - mg]\hat{u}_x + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$$

Projeté sur  $Ox$  :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k(x - \ell_0) = -mg - F_0 - F_1 \cos(2\pi ft)$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) = -g - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

A l'équilibre :  $\omega_0^2(x_{eq} - \ell_0) = -g$  soit  $x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

Soit avec  $X = x - \ell_0 + \frac{mg}{k}$   $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$

Soit avec  $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$   $\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

En utilisant la notation complexe, on obtient en utilisant la pulsation  $\omega = 2\pi f$  :

$$-\omega^2\underline{Y} + 2\xi\omega_0i\omega\underline{Y} + \omega_0^2\underline{Y} = -\frac{F_1}{m} \exp(i\omega t) = -\underline{E}.$$

On peut alors exprimer la fonction de transfert du système telle qu'elle est définie dans l'énoncé :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = -\frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}.$$

En utilisant les notations réduites de l'énoncé, on a donc finalement :

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{A_0}{(1 - \Omega^2) + 2i\xi\Omega}$$

avec  $A_0 = -1$ .

- 4 - On a affaire à une fonction de transfert de type passe-bas du second ordre qui pourra présenter un phénomène de résonance si la norme de  $\underline{H}$  présente un maximum, avec

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}}$$

Le numérateur étant constant, c'est le cas si la norme du dénominateur (ou son carré) est minimale.

Dérivons donc  $(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2$  par rapport à  $\Omega$  :

$2(1 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2 \Omega = 0$  donne la solution  $\Omega = 0$  (minimum ou maximum en 0 : comportement attendu d'un passe-bas), ou  $(1 - \Omega^2) + 2\xi^2 = 0$  qui donne  $\Omega = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

L'existence de cette solution est conditionnée par  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  soit un amortissement pas trop fort. Si cette solution existe, c'est bien un maximum pour la norme de  $\underline{H}$  car elle est continue et tend vers 0 à l'infini.

Le maximum est alors obtenu pour  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

Dans le cas où  $\xi^2 \ll 1$ , on constate que  $\omega_r = \omega_0$  au deuxième ordre près en  $\xi$ . On obtient alors un maximum pour la norme de  $\underline{H}$  valant environ

$$H_{max} = |\underline{H}(\omega_0)| = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{2\xi}$$

- 5 – Sur la courbe de la figure 3, on lit un maximum aux alentours de  $G_{dB,max} = 9$  dB soit

$$H_{max} = 10^{G_{dB,max}/20} \approx 2,8 = 10^{9/20} \text{ pour la norme de } \underline{H} \cdot \omega_0^2 \text{ pour une pulsation légèrement supérieure à } 12 \text{ rad.s}^{-1}.$$

**Attention ! ne pas confondre  $G_{dB,max} = 20 \log(H_{max})$  et  $H_{max} = 10^{G_{dB,max}/20}$**

Avec l'hypothèse précédente,  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \omega_0$ ; on en déduit  $\omega_0 \approx 12 \text{ rad.s}^{-1}$ , soit une fréquence  $f_0 \approx \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1,9 \text{ Hz}$

Pour finir, comme  $H_{max} = \frac{1}{2\xi \omega_0^2}$ , on obtient  $\xi = \frac{1}{2H_{max} \omega_0^2} = \mathbf{0,18}$  qui correspond bien à un faible amortissement avec  $\xi < 2^{-1/2}$ .

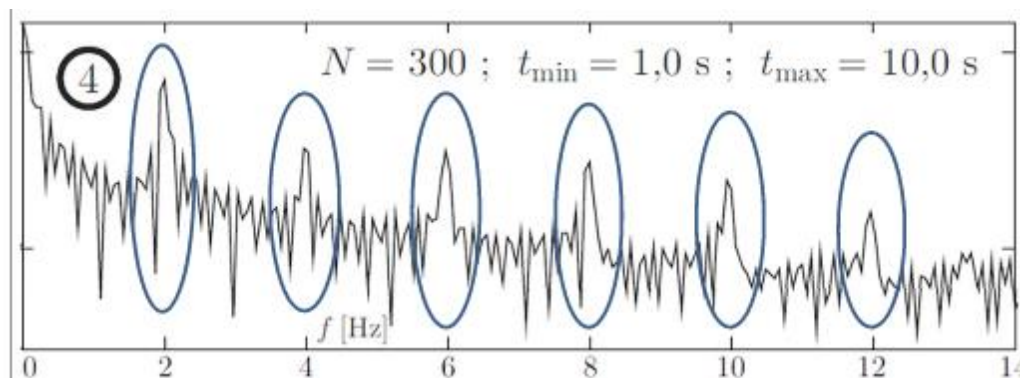
- 6 - On a vu dans la question 4 que le déplacement de la structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance (voir l'introduction). La connaissance des fréquences de résonance pour un ouvrage d'art est donc essentielle. En effet, si la sollicitation extérieure est de fréquence proche de celle de résonance, le déplacement de la structure devient important ce qui peut entraîner la destruction de l'édifice. Il faut donc éviter ce phénomène, qui génère au minimum un inconfort rendant le pont inutilisable.

- 7 – On peut envisager un capteur transformant une contrainte mécanique en un signal électrique, comme un capteur piézoélectrique.

On peut par exemple envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations qui auraient lieu s'il était fixé au niveau d'un bras ou d'une jambe, et utiliser ensuite  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

On observe différents pics (entourés ci-dessous) qui correspondent à un fondamental de 2 Hz et ses harmoniques (4, 6, 8... Hz)

Cela correspond à deux pas par seconde, ce qui est cohérent avec une marche à un rythme classique.



- 9 – Sur la figure 3, on a relevé une fréquence de résonance de 1,9 Hz. La fréquence de résonance du pont correspond donc pratiquement à la fréquence de la marche ! Cela explique les fortes oscillations ressenties à l'ouverture du pont au public.

La figure 3 montre également la réponse du pont après transformation (mise en place d'amortisseurs harmoniques) ; le système d'amortisseur n'a pas amorti grand-chose (-2 dB). On y remarque cependant une anti résonance à la fréquence de marche ce qui va atténuer les oscillations (-8 dB cette fois) et rendre le pont praticable. En revanche, il y a apparition de 2 résonances (8 et 15 rad.s<sup>-1</sup> soit 1,4 et 2,4 Hz) certes un peu moins marquées mais il faudra éviter de marcher plus vite ou plus lentement !

## PROBLEME N°2 : MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES (CCINP PC 2014)

### A) Spectrographe de masse

- 1) Etude, dans le référentiel galiléen proposé par le sujet, du mouvement d'une particule ponctuelle, de charge  $q$  et de masse  $m$ , ne subissant que la force magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  car selon le sujet le poids est négligeable.
- La force magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  est perpendiculaire au vecteur vitesse, donc elle ne travaille pas.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la particule entre deux instants quelconques, la variation d'énergie cinétique de la particule chargée est toujours nulle (aucune force ne travaille), le **mouvement est donc uniforme** : à tout instant la valeur de la norme de la vitesse  $v$  est constante et égale à  $v_0$ .

*Ne pas confondre norme de la vitesse et vecteur vitesse !!! la direction du vecteur varie, l'accélération est donc non nulle, et la force de Lorentz exploitée dans le PFD doit être écrite avec  $\vec{v}$  à  $t$  quelconque et non la vitesse initiale !*

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule :

$$m\vec{a} = \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Etude cinématique : mouvement circulaire : choix des coordonnées polaires, soit pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

Si la vitesse est constante (mouvement circulaire uniforme) :  $v = v_0 = R\omega = cte$  ;  $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \underbrace{-\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N}$$

Projection du PFD sur  $\vec{u}_r$  :  $-m \frac{v_0^2}{R} = qR\dot{\theta}B = qv_0B$  soit  $R = \left| \frac{mv_0}{qB} \right|$  rayon de la trajectoire circulaire.

De plus,  $\left| \frac{v_0}{R} \right| = \left| \frac{qB}{m} = \omega_c \right|$  pulsation cyclotron à laquelle est parcourue la trajectoire.

**Remarque :** on pouvait aussi retrouver le mouvement uniforme en projetant le PFD sur  $\vec{u}_\theta$  avec  $\vec{F} \cdot \vec{u}_\theta = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\theta = 0$  car  $\vec{v}$  colinéaire à  $\vec{u}_\theta$  donc  $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{u}_\theta$  d'où  $\vec{a}_T = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}$  soit  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\dot{\theta} = \omega = cte$  soit  $v = R\dot{\theta} = cte$  : mouvement circulaire uniforme.

**Rappel :** démonstration complète sans admettre que le mouvement est circulaire (normalement hors programme).

### Méthode N°1 :

- En appliquant la seconde loi de Newton en coordonnées cartésiennes, et en projetant sur les vecteurs de la base d'étude, on obtient :

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B ; \quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B ; \quad m\ddot{z} = 0$$

- La 3<sup>ème</sup> équation différentielle s'intègre directement en 2 temps et compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{z}(t=0) = 0 \text{ et } z(t=0) = 0, \text{ on obtient } \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}.$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan  $(xOy)$  à valeur de vitesse constante  $v_0$ .

- Découplage et résolution :**

Attention à l'exploitation des conditions initiales et plus généralement aux constantes d'intégration !!!

En intégrant une fois la 1<sup>ère</sup> équation différentielle entre  $(t=0, y=0 \text{ et } \dot{x}=v_0)$  et  $(t, y \text{ et } \dot{x})$  on obtient :

$$m(\dot{x} - v_0) = qBy \quad \text{donc} \quad \dot{x} = v_0 + \frac{qB}{m}y$$

On réinjecte  $\dot{x}$  dans la 2<sup>ème</sup> équation différentielle qui devient  $\dot{y} = -\frac{qB}{m}(v_0 + \frac{qB}{m}y)$  ou avec  $\omega = \frac{qB}{m}$  :

$$\dot{y} + \omega^2 y = -\omega v_0$$

Solution générale en  $y$  :  $y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}$

1<sup>ère</sup> CI :  $y(t=0) = 0$ , soit  $0 = \alpha - \frac{v_0}{\omega}$  donc  $\alpha = \frac{v_0}{\omega}$

2<sup>ème</sup> CI :  $\dot{y}(t=0) = 0$ , soit avec  $\dot{y}(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t)$  :  $0 = \beta\omega$  donc  $\beta = 0$

$$\text{soit : } \mathbf{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}}$$

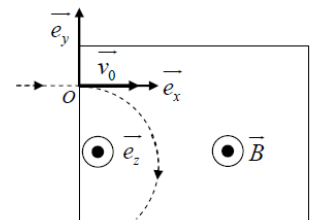
Or  $\dot{x} = v_0 + \frac{qB}{m}y$ , donc  $\dot{x} = v_0 + \omega(\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}) = v_0 \cos(\omega t)$  donc

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + cste, \text{ or } x(t=0) = 0, \text{ donc } \mathbf{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

- Récapitulation :**

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \text{ et } y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} \text{ donc } \mathbf{x^2 + (y + \frac{v_0}{\omega})^2 = (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

La trajectoire est donc un cercle de centre  $\Omega(0, -\frac{v_0}{\omega}, 0)$ , de rayon  $R = \left| \frac{v_0}{\omega} \right| = \left| \frac{mv_0}{qB} \right| = R$  parcouru à vitesse constante  $v_0$ .



### Méthode N°2 :

- En appliquant la seconde loi de Newton en coordonnées cartésiennes, et en projetant sur les vecteurs de la base d'étude, on obtient :

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B ; \quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B ; \quad m\ddot{z} = 0$$

- La 3<sup>ème</sup> équation différentielle s'intègre directement en 2 temps et compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{z}(t=0) = 0 \text{ et } z(t=0) = 0, \text{ on obtient } \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}.$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan  $(xOy)$ .

On pose  $u = x + iy$ , soit  $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$  et  $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

En exploitant les équations (1) et (2) issues de la projection du PFD :

$$\dot{x} = \frac{q\dot{y}B}{m} \quad (1); \quad \dot{y} = -\frac{q\dot{x}B}{m} \quad (2):$$

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{u} = \frac{q\dot{y}B}{m} - i\frac{q\dot{x}B}{m} = -i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u} \Leftrightarrow \ddot{u} + i\frac{qB}{m}\dot{u} = 0$$

En posant  $\tau = \frac{m}{qB}$  :  $\ddot{u} + i\frac{1}{\tau}\dot{u} = 0$  soit

$$\dot{u}(t) = Ae^{-\frac{it}{\tau}}$$

Pour déterminer la constante d'intégration :

Condition initiale de l'énoncé :  $\dot{u}(t=0) = \dot{x}(t=0) + i\dot{y}(t=0) = v_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{expression} \\ \text{à } t=0}}{=} A$ , soit

$$\dot{u}(t) = v_0 e^{-\frac{it}{\tau}} = v_0 (\cos(-t/\tau) + i \sin(-t/\tau))$$

En posant  $\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{qB}{m}$  :

$$\dot{u}(t) = v_0 (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)) = v_0 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) = \dot{x} + i\dot{y}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\omega t) \quad \dot{y}(t) = -v_0 \sin(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, et en exploitant les conditions initiales :  $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{conditions} \\ \text{initiales}}}{=} \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + y_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{conditions} \\ \text{initiales}}}{=} \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} (\cos(\omega t) - 1)$$

La trajectoire est donc un cercle de centre  $\Omega(0, -\frac{v_0}{\omega}, 0)$ , de rayon  $R = \left| \frac{v_0}{\omega} \right| = \left| \frac{m v_0}{q B} \right| = R$  parcouru à vitesse constante  $v_0$ .

## 2) Séparation des isotopes

- **Accélération d'un ion chargé  $q = +e$  par une tension (différence de potentiel = ddp)  $W = V_{P1} - V_{P2}$  :**

Seule force à laquelle est soumis l'ion : force électrique  $\vec{F}_E$  : force conservative d'énergie potentielle  $E_p = qV = +eV$

On applique le théorème de l'énergie mécanique (TEM) à l'ion entre l'entrée A dans la zone d'accélération ( $P_1$ ) avec une vitesse négligeable et la sortie B de la zone d'accélération ou l'entrée dans la zone de déviation ( $P_2$ ) avec une vitesse  $v_0$  :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{non\ conservative} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2 - 0}_{=\Delta E_c} + (e V_{P2} - e V_{P1}) = 0 \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = e W \text{ donc } v_0 = \sqrt{\frac{2eW}{m}}$$

**3) Distance entre les collecteurs :** elle est liée à la différence de rayon entre les trajectoires de chacun des isotopes.

- Comme vu dans la question 1), le rayon  $R$  de la trajectoire circulaire est lié à la masse de l'ion :  $R = \frac{m v_0}{e B} = \frac{m}{e B} \sqrt{\frac{2eW}{m}}$



$$R = \sqrt{\frac{2 m W}{e B^2}}$$

- La distance entre les deux collecteurs est :

$$d = 2R_{238} - 2R_{235} = 2 \sqrt{\frac{2 m_{U8} W}{e B^2}} - 2 \sqrt{\frac{2 m_{U5} W}{e B^2}} = 2 \sqrt{\frac{2 W}{e B^2}} (\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}}) \text{ donc}$$

$$W = \frac{e B^2 d^2}{8 (\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

$$\text{A. N. : } W = 5,07 \text{ kV}$$

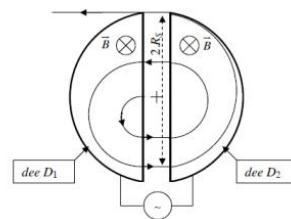
## B) Le cyclotron

### 4) Expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour :

- Dans chaque *dee*, le mouvement est circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega = \left| \frac{q B}{m} \right| = \frac{e B}{m_p}$ , donc de période  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

La durée permettant de parcourir un demi-cercle correspond à une demi-période du mouvement :

$$T_{1/2} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m_p}{e B}$$



**Remarque :** cette durée est indépendante du rayon de la trajectoire, donc la durée de présence du proton dans un *dee* pour chaque demi-tour est toujours la même.

- La tension  $u(t)$  est sinusoïdale pour qu'à chaque traversée de la zone centrale, la ddp ait changé de signe. Ainsi le champ électrique associé change de sens et la force électrique subie par le proton permet de l'accélérer à **chaque traversée**.
- La fréquence  $f$  de la tension alternative sinusoïdale doit être adaptée à la durée d'un demi-tour : la période  $T$  de la tension sinusoïdale doit correspondre à la durée d'un tour complet, donc de deux demi-tours puisque l'on néglige la durée de la traversée de la zone centrale.

$$\text{Ainsi } T = \frac{1}{f} = 2 T_{1/2}, \text{ donc } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 T_{1/2}} = \frac{e B}{2 \pi m_p} = f = 1,53 \text{ MHz.}$$

- A la sortie du cyclotron, le rayon du cercle est  $R_S$  lié à la vitesse sur cette dernière trajectoire demi-circulaire ou vitesse de sortie par la relation  $R_S = \frac{m_p v_S}{e B}$ , donc

$$v_S = \frac{e B R_S}{m_p}$$

$$\text{Energie cinétique d'un proton en sortie : } E_{c,S} = \frac{1}{2} m_p v_S^2 = \frac{1}{2} m_p \left( \frac{e B R_S}{m_p} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2 B^2 R_S^2}{m_p} \right) = E_{c,S}$$

$$\text{A.N. : } E_{c,S} = 1,92 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 12,0 \text{ MeV}$$

- Expression du **nombre de tours**  $N$  effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie :

- Lors de chaque demi-tour l'énergie cinétique est constante.
- Entre chaque demi-tour, l'énergie cinétique augmente de  $\Delta E_c = e U_m$  qui est indépendant du nombre de tours déjà réalisés, donc l'énergie cinétique augmente de  $2\Delta E_c = 2e U_m$  au bout d'un tour.

$$\text{Au bout de } N \text{ tours (en sortie) } E_c = E_{c,S} = N 2\Delta E_c = N 2e U_m \text{ ainsi } N = \frac{E_{c,S}}{2e U_m}$$

$$N = \frac{e B^2 R_S^2}{4 m_p U_m}$$

- A.N. :  $N = 59,9 = 60$  tours

### 9) Rayonnement

- a) Particule chargée de charge  $q$  et de vitesse  $v$  qui décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$  a une accélération  $a = \frac{v^2}{R}$ , elle rayonne donc une puissance  $P_r = \frac{\mu_0 \cdot q^2}{6 \pi c} a^2 = \frac{\mu_0 \cdot q^2}{6 \pi c} \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$  qui est bien de la forme  $P_r = \alpha v^4$ , avec

$$\alpha = \frac{\mu_0 \cdot q^2}{6 \pi c R^2}$$

- b) La puissance rayonnée lors de chaque demi-tour est constante puisque pour une particule de charge  $q$  donnée elle ne dépend que de  $v$  et de  $R$  qui sont constants sur chaque demi-tour.

Ainsi l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon  $R_s$  est :

$$E = \mathcal{P}_{rS} \cdot T_{1/2} = \frac{\mu_0 \cdot q^2}{6 \pi c} \left(\frac{v_s^4}{R_s^2}\right) \frac{\pi m_p}{e B} = \frac{\mu_0 \cdot e}{6 c} \left(\frac{v_s^4}{R_s^2}\right) \frac{m_p}{B}$$

Or  $v_s = \frac{e B R_s}{m_p}$ , donc l'énergie rayonnée par le proton lors de son dernier demi-tour est

$$E = \frac{\mu_0 \cdot e^5 \cdot B^3 \cdot R_s^2}{6 c m_p^3}$$

A.N. : énergie rayonnée  $E = 2,5 \cdot 10^{-11}$  eV.

Cette perte est tout à fait négligeable devant l'énergie cinétique du proton calculée précédemment, donc le phénomène est négligeable dans le bilan énergétique.

## PROBLEME N°3 : DESCENTE EN LUGE (ATS 2013)

### A) Etude préliminaire

1. **Système** : l'ensemble coureur + luge, assimilé à un point matériel M de masse  $m$

*Système* : l'ensemble luge + lugeur, assimilé à un point matériel M

*Référentiel* : terrestre, supposé galiléen

Descente rectiligne

*Bilan des forces* :

- Poids  $\vec{P} = m\vec{g} = m g (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$
- Réaction du support  $\vec{R} = R \vec{u}_y$ , perpendiculaire au support car les frottements sont négligés.

2. Etude cinématique :  $\vec{OM} = x \vec{u}_x$      $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = v \vec{u}_x$      $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x = a \vec{u}_x$

On applique la relation fondamentale de la dynamique au système M de masse constante dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

On projette sur l'axe  $Ox$  :  $m a = m g \sin \alpha$ , d'où ;

$$\ddot{x} = a = g \sin \alpha$$

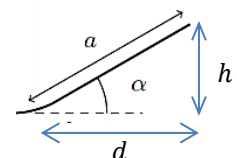
Angle  $\alpha$  que fait la pente avec l'horizontale :

Sur une pente à 10 %, on monte de 10 m pour 100 m parcourus horizontalement :

$$\tan \alpha = \frac{h}{d} = \frac{10}{100}$$

Pour un angle suffisamment petit (exprimé en radians), d'après l'approximation des petits angles,  $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha$ . D'où :

$$\tan \alpha = \frac{10}{100} = 0,1 \ll 1 \text{ donc } \alpha \approx \tan \alpha \approx \sin \alpha$$



$$A.N. : a = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3. On intègre l'expression précédente par rapport au temps :

$$v = g \sin \alpha t + cte$$

Or d'après les conditions initiales,  $v(0) = v_0 = cte$ , d'où :  $v = g \sin \alpha t + v_0$

La luge atteint la vitesse de  $v_a$  au bout d'un temps  $t_a$  tel que :

$$v_a = g \sin \alpha t_a + v_0 \Rightarrow t_a = \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha}$$

Application numérique :

Angle  $\alpha$  que fait la pente avec l'horizontale :  $\tan \alpha = \frac{10}{100} = 0,1 \ll 1$  donc  $\alpha \approx \tan \alpha \approx \sin \alpha$

$$t_a = \frac{30 - 5}{10 \times 0,1} = 25 \text{ s}$$

4. On intègre l'expression précédente par rapport au temps :

$$x = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t + cte$$

Or d'après les conditions initiales,  $x(0) = 0 = cte$ , d'où :  $x = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t$

Distance parcourue par la luge quand elle atteint la vitesse  $v_a$  :

$$d = g \sin \alpha \frac{t_a^2}{2} + v_0 t_a = \frac{g}{2} \sin \alpha \left( \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha} \right)^2 + v_0 \left( \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha} \right) = \frac{v_a^2 + v_0^2 - 2v_a v_0}{2 g \sin \alpha} + \frac{2v_a v_0 - 2v_0^2}{2 g \sin \alpha}$$

$$d = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2 g \sin \alpha}$$

Application numérique :

$$d = \frac{30^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 0,1} = 437 \text{ m}$$

5. **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen

**Bilan des forces** :

- **Poids**, force conservative car dérivant d'une énergie potentielle  $E_p = m g z$  si on choisit l'origine des énergies potentielles à la ligne d'arrivée, avec un axe ( $Oz$ ) ascendant.
- **Réaction du support solide**  $\vec{R}_N$ , selon la direction normale au support, les frottements solides étant négligés. C'est une force qui ne travaille pas, étant toujours normale au déplacement.

$$W = \int \vec{R}_N \cdot d\vec{OM} = 0$$

Comme on néglige également les frottements fluides, les forces qui s'appliquent à la luge sont conservatives (poids) ou ne travaillent pas (réaction) : **le système est conservatif**.

D'après le **théorème de l'énergie mécanique** appliqué au système **entre le point initial** (passage de la ligne d'arrivée) **et le point final** où la luge s'arrête (vitesse nulle, altitude  $h$ ) :

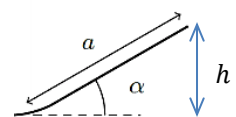
$$\Delta E_m = E_m(F) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservatives}) = 0 :$$

il y a conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m(A) = E_m(F)$$

On choisit l'origine des énergies potentielles à la ligne d'arrivée .

Avec  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$  :  $E_m(A) = \frac{1}{2} m v_a^2$  et  $E_m(F) = m g h = m g a \sin \alpha$ .



On en déduit :

$$a = \mathcal{L} = \frac{v_a^2}{2 g \sin \alpha}$$

Application numérique :  $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha$

$$\mathcal{L} = \frac{30^2}{2 \times 10 \times \frac{10}{100}} = 450 \text{ m}$$

La longueur de la piste de ralentissement est beaucoup trop importante : le ralentissement mécanique n'est pas approprié.

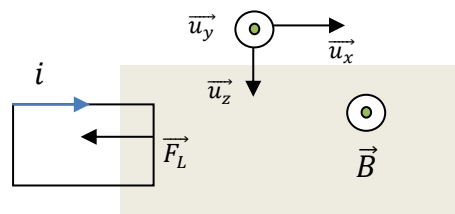
## B) Freinage de la luge

6. Un champ magnétique de 1 T dans l'air est considéré comme très intense par rapport au champ magnétique terrestre (de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5}$  T).

Un champ magnétique uniforme de cette intensité sur une telle surface (50cm x 100cm) est comparable aux champs utilisés dans les machines médicales de type IRM et nécessite l'utilisation un aimant supraconducteur à refroidissement à hélium liquide ! Cette hypothèse d'un champ uniforme permet de simplifier le calcul et permettre de comprendre les phénomènes mis en jeu, mais n'est pas réaliste.

### 7. Les différentes phases du mouvement

**Phase 1 :** le cadre métallique est soumis à un phénomène d'induction quand il rentre dans la zone de champ magnétique car la surface du cadre soumise à  $\vec{B}$ , et donc le flux de  $\vec{B}$  associé, varie au cours du temps (induction de Lorentz). Le cadre constituant un circuit fermé, la fém induite implique l'apparition d'un courant induit, qui en présence du champ magnétique implique l'existence de forces de Laplace s'exerçant sur les différentes portions du cadre. D'après la loi de Lenz, la résultante des forces de Laplace s'oppose au mouvement (elle constitue donc une force de freinage), et en l'absence de toute autre force dans la direction du mouvement, il s'agit donc d'un **mouvement ralenti**.

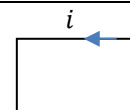


Attention ! il faut impérativement évoquer la notion de **variation de flux de  $\vec{B}$  au cours du temps** pour justifier le phénomène d'induction, cf. loi de Faraday !!

**Phase 2 :** quand le cadre se trouve entièrement dans la zone où règne  $\vec{B}$ , la surface du cadre soumise à  $\vec{B}$  ne varie plus, le flux du champ magnétique étant constant, il n'y a alors plus de phénomène d'induction, donc plus de courant induit ni force de Laplace. Il n'existe alors aucune force dans la direction du mouvement, qui correspond donc à un mouvement rectiligne uniforme.



8. Orientation du courant : on peut choisir  $i$  dans le sens du schéma ci-contre (choix arbitraire)



Orientation de la surface : grâce au sens de  $i$ , selon la règle de la main droite :  $\vec{dS} = dS \vec{u}_y$ .

Le choix d'orientation de  $i$  permet d'avoir une surface orientée dans le même sens que  $\vec{B}$ ; toutefois, selon la loi de Lenz, la force de Laplace étant une force de freinage, on peut également en déduire que le courant orienté ainsi sera en réalité négatif : il n'y a pas de mauvais choix, il faut simplement être cohérent et rigoureux avec le choix fait, et vérifier à l'aide de la loi de Lenz que les résultats obtenus correspondent bien aux résultats attendus.

Calcul du flux de  $\vec{B}$  :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad \stackrel{\text{champ uniforme}}{=} \quad B \cdot l \cdot x$$

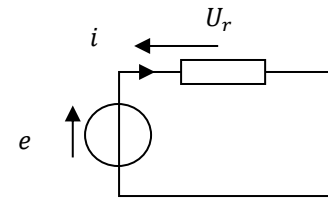
sur l'ensemble de la surface  $lx$  nul en dehors de cette surface

Attention ! seule la longueur  $x$  de circuit est immergée dans une zone de champ magnétique non nul ; le circuit n'est pas déformable comme dans le cas de rails de Laplace ou du haut-parleur, mais il est en mouvement par rapport à la zone de champ magnétique uniforme

## 9. Loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = -B l \frac{dx}{dt} = -B l v$$

Schéma électrique équivalent ( $e$  orientée en convention générateur) :



Attention !!! ce schéma est absolument indispensable !! afin de bien représenter la fém induite en convention générateur après avoir orienté  $i$  arbitrairement ; sans cela les signes dans la loi des mailles ne sont pas justifiés et ont donc une chance sur deux d'être faux.

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : obtention de l'équation électrique (EE)

$$e = U_r$$

$$\boxed{-B l v = R i} \quad (EE)$$

## 10. Lors de la première phase du mouvement :

Système : cadre de masse  $m$  étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Etude cinématique : mouvement rectiligne selon  $Ox$  avec  $\vec{OM} = x \vec{u}_x$   $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = v \vec{u}_x$   $\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_x = \dot{v} \vec{u}_x$

Bilan des forces :

- Poids :  $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$
- Réaction du support  $\vec{R} = R \vec{u}_y$
- Force de Laplace  $\vec{F}_L = \int i \vec{dl} \wedge \vec{B}$

En étudiant le cadre côté par côté : les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés haut et bas se compensent ; le côté gauche du cadre n'étant pas encore situé dans la zone de champ magnétique, la force de Laplace s'exerçant sur lui est nulle. Il reste donc la force de Laplace s'exerçant sur le côté droit du cadre :

$$\vec{F}_L = \int_0^l i dz (-\vec{u}_z) \wedge B \vec{u}_y = i l B \vec{u}_x$$

On applique le principe fondamental de la dynamique au système de masse constante dans le référentiel terrestre supposé galiléen :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L$

On projette sur  $Ox$  : Obtention de l'équation mécanique

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = ilB} \quad (EM)$$

Les deux équations étant couplées, on isole  $i$  de l'équation mécanique afin de découpler :

$$i = \frac{m dv}{lB dt}$$

On reporte  $i$  dans l'équation électrique :

$$B l v = -Ri = -\frac{m R dv}{lB dt} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{(B l)^2}{m R} v = 0}$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants sans second membre, qui peut se mettre sous la forme canonique :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{m R}{(B l)^2}}$$

Avec  $\tau$  constante de temps du système, caractéristique de l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

11. Lors de la deuxième phase du mouvement, le cadre étant totalement immergé dans le champ magnétique, il n'y a plus de phénomène d'induction, donc plus de forces de Laplace, et le système n'est soumis qu'à son poids et à la réaction

du support. En projection sur  $Ox$ , le PFD donne :  $\boxed{\frac{dv}{dt} = 0} \Rightarrow v = cte$  : **mouvement rectiligne uniforme**, il n'y a plus freinage magnétique.

12. L'équation  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$  a pour solution :

$$v = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

En l'absence de second membre, la solution générale à l'équation homogène (SGEH) correspond à la solution générale à l'équation complète. Il faut connaître la forme de cette solution, très utilisée en physique, sans avoir à faire de calculs pour la retrouver !

D'après les conditions initiales :  $v(0) = v_0 = K$  d'où  $v_0 = K$

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{m R}{(B l)^2}$$

En intégrant l'expression de la vitesse par rapport au temps pour obtenir la position :

$$x(t) = \int v dt + cte = \int v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt + cte = -\tau v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + cte$$

Or  $x(0) = 0$  d'où  $-\tau v_0 + cte = 0 \Rightarrow cte = \tau v_0$

$$x = \tau v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

13. Le cadre pénètre entièrement dans la zone magnétique lorsque  $x(t_f) = L$

$$L = \tau v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right)\right) \Rightarrow \exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right) = 1 - \frac{L}{\tau v_0} \Rightarrow \boxed{t_f = -\tau \ln\left(1 - \frac{L}{\tau v_0}\right)}$$

14. On en déduit alors la vitesse en fin de décélération :

$$v(t_f) = v_0 \exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right) = v_0 \left(1 - \frac{L}{\tau v_0}\right) = \boxed{v_0 - \frac{L}{\tau} = v(t_f)}$$

Variation de vitesse de la luge entre les instants  $t = 0$  et  $t_f$  :

$$\Delta v = v_0 - v(t_f) = v_0 - \left(v_0 - \frac{L}{\tau}\right) = \boxed{\frac{L}{\tau} = \Delta v}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{m R}{(B l)^2} = \frac{100 \times 1,0 \times 10^{-2}}{(1 \times 30 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{-2}} = 0,11 \cdot 10^2 \text{ s} = \underline{11 \text{ s}}$$

$$\Delta v = \frac{L}{\tau} = \frac{0,5}{11} = \underline{0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

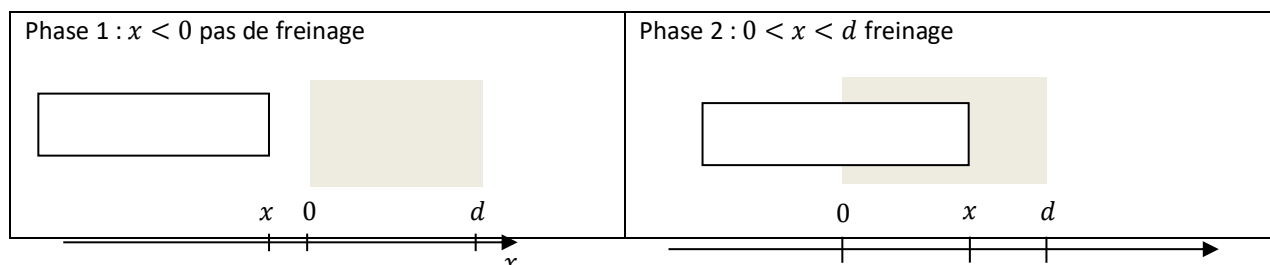
15. La luge s'arrête si  $v(t_f) \leq 0 \Rightarrow v_0 - \frac{L}{\tau} \leq 0 \Rightarrow v_0 \leq \frac{L}{\tau} \Rightarrow \boxed{L \geq v_0 \cdot \tau}$

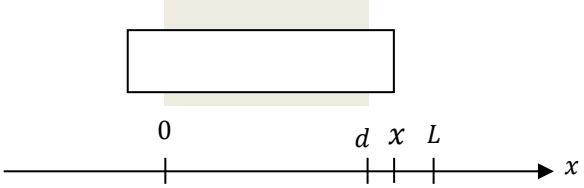
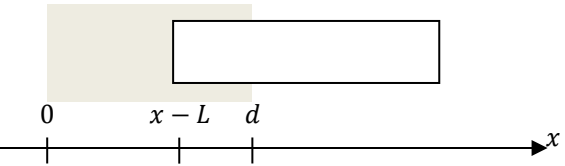
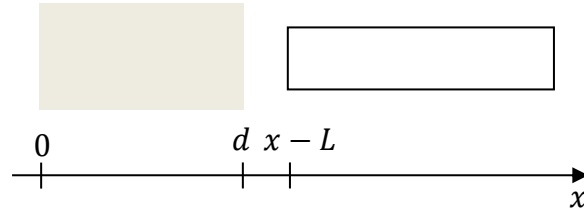
Application numérique :

$$L_{\min} = v_0 \cdot \tau = 30 \times 11 = \underline{330 \text{ m}}$$

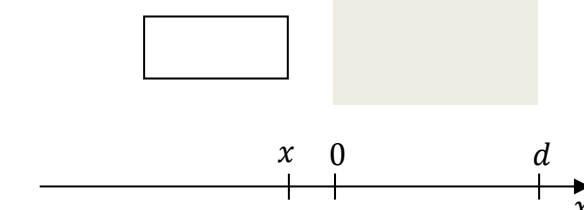
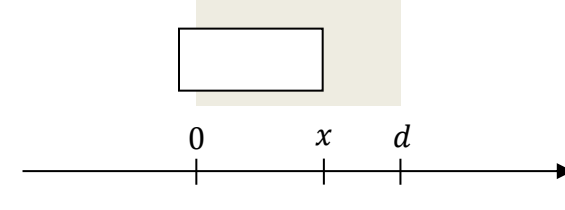
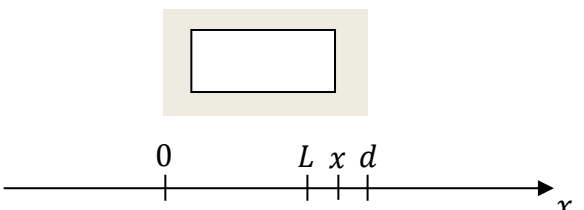
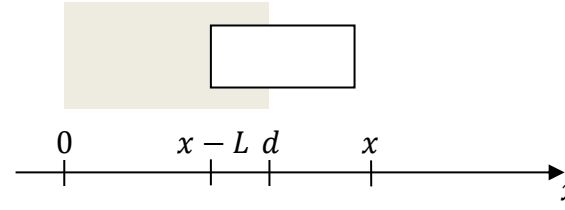
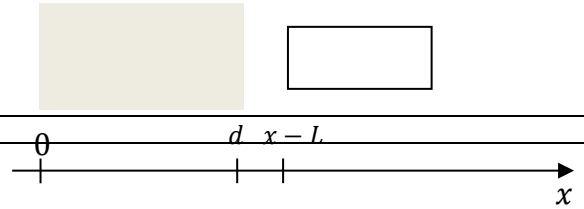
La luge ne peut pas avoir une aussi grande longueur. Un tel freinage n'est pas possible.

16. Si  $L \geq d$  : 5 phases. Le freinage s'effectue tant que le flux de  $\vec{B}$  varie dans le cadre, soit tant que la surface immergée dans la zone de champ  $\vec{B}$  non nul varie.



<p>Vitesse constante <math>v_0</math></p>	<p>A l'issue de la 1<sup>ère</sup> phase de freinage <math>v_{f1} = v_0 - \frac{d}{\tau}</math></p>
<p>Phase 3 : <math>d &lt; x &lt; L</math> pas de freinage</p>  <p>Vitesse constante <math>v_{f1}</math></p>	<p>Phase 4 : <math>0 &lt; x - L &lt; d</math> (soit <math>L &lt; x &lt; d + L</math>) freinage</p>  <p>A l'issue de la 2<sup>ème</sup> phase de freinage <math>v_{f2} = v_{f1} - \frac{d}{\tau}</math></p>
<p>Phase 5 : <math>x - L &gt; d</math> (soit <math>x &gt; d + L</math>) pas de freinage</p>  <p>Vitesse constante <math>v_{f2}</math></p>	

17. Si  $L \leq d$  : 5 phases. Idem, le freinage s'effectue tant que le flux de  $\vec{B}$  varie dans le cadre, soit tant que la surface immergée dans la zone de champ  $\vec{B}$  non nul varie.

<p>Phase 1 : <math>x &lt; 0</math> pas de freinage</p>  <p>Vitesse constante <math>v_0</math></p>	<p>Phase 2 : <math>0 &lt; x &lt; L</math> freinage</p>  <p>A l'issue de la 1<sup>ère</sup> phase de freinage <math>v_{f1} = v_0 - \frac{L}{\tau}</math></p>
<p>Phase 3 : <math>L &lt; x &lt; d</math> pas de freinage</p>  <p>Vitesse constante <math>v_{f1}</math></p>	<p>Phase 4 : <math>x &gt; d</math> et <math>x - L &lt; d</math> (soit <math>d &lt; x &lt; d + L</math>) freinage</p>  <p>A l'issue de la 2<sup>ème</sup> phase de freinage <math>v_{f2} = v_{f1} - \frac{L}{\tau}</math></p>
<p>Phase 5 : <math>x - L &gt; d</math> (soit <math>x &gt; d + L</math>) pas de freinage</p> 	



Vitesse constante $v_{f2}$	
----------------------------	--

18. Pour optimiser le freinage, il faut que  $v_{f2}$  soit le plus petit possible et qu'il n'existe pas de zone où  $v = v_{f1}$  soit constante. Il faut donc prendre  $L = d$ .

19. Si  $D \geq L$ , il va exister une zone où  $v_{f2}$  sera constante. Si  $D \leq L$ , il va exister une zone où le flux de  $\vec{B}$  ne varie pas dans le cadre. Pour optimiser le freinage, il faut donc choisir une distance  $D = L$ .

20. A chaque entrée dans la zone de champ magnétique, le skeleton perd une vitesse de  $\Delta v = \frac{d}{\tau} = \frac{L}{\tau} = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et à chaque sortie de la zone, le skeleton perd la même vitesse. Lors de la traversée d'une zone, le skeleton perd une vitesse de  $2 \times \Delta v = 2 \frac{L}{\tau} = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour perdre  $\Delta v_{tot} = v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  il faut donc :

$$N = \frac{\Delta v_{tot}}{2\Delta v} = \frac{\tau v_0}{2L}$$

A.N. :  $N = 300$  zones de champ magnétique, c'est-à-dire 300 mètres de piste (puisqu'à chaque zone de champ de 50 cm de long, on associe une zone sans champ de même distance).

Plus précisément, en tenant compte que pour  $N$  zones de champ il y a  $(N - 1)$  zones les séparant :

$$d_{arrêt} = NL + (N - 1)L = (2N - 1)L \approx 300 \text{ m}$$

La distance d'arrêt est donc 3 fois plus faible que celle de la question 2, et ce avec une longueur de luge usuelle.

21. Exemple de freinage par induction :

- sur les véhicules lourds (poids lourds (camions, autocars...), ralentisseur sur les trains allemands, à l'étude pour le TGV) ;
- sur les outils électriques tels que les scies circulaires, pour arrêter rapidement la lame lorsque l'alimentation est coupée