

TD CHAPITRE EM.1 : ELECTROSTATIQUE - PARTIE 2 – ELEMENTS DE CORRECTION

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Energie cinétique d'une particule chargée accélérée par un champ électrique

Toute particule chargée soumise à un champ \vec{E} subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ \vec{E} , or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

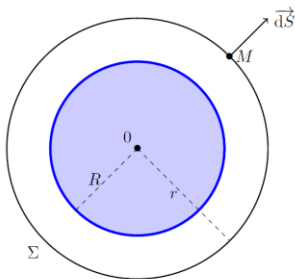
Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

Remarque : on retrouve le critère énoncé dans la question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il est nécessaire que $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

Exercice 2. Utilisation du théorème de Gauss pour l'étude de distributions de charge classiques

1) Cas N°1 : Sphère uniformément chargée en surface



$$\text{Soit } E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\text{Pour } r < R : \quad E(r) = 0$$

$$\text{Pour } r > R : \quad E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

Détermination de $V(M)$

$$1 - \text{Variable d'intégration} : V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} + cte = \int -E \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} + cte = -\int E dr + cte$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\int E_{int} dr + K_1 = -\int 0 \cdot dr + K_1$ $V_{int} = K_1$	$V_{ext} = -\int E_{ext} dr + K_2 = -\int \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \cdot dr + K_2$ $V_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 – Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

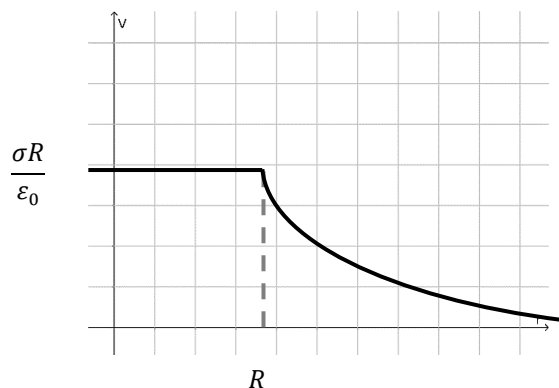
$$K_1 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R}$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$	$V_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$

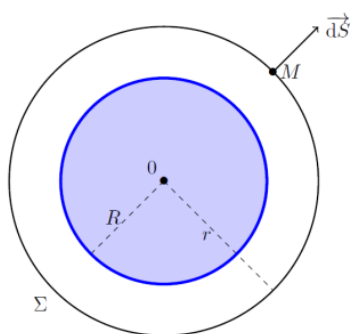
4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L} \dots$

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\sigma]L}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$
Cohérent	

5 – Graphe $V(r)$



2) Cas N°2 : Sphère uniformément chargée en volume



On a :

$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Détermination de $V(M)$

1 – Variable d'intégration

1^{ère} méthode : $V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int -E \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = -\int E dr + cte$

2^{ème} méthode : $\vec{E} = E \vec{u}_r = -\text{grad} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V =$

$-\int E dr + cte$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\int E_{int} dr = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot dr$	$V_{ext} = -\int E_{ext} dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot dr$
$V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 – Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K_1 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R}$$

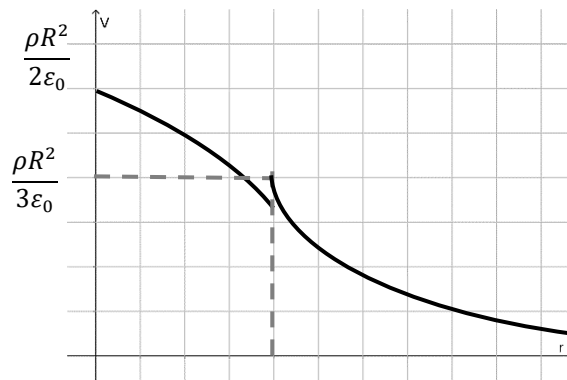
$$\Rightarrow K_1 = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} (2 + 1) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$	$V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L} \dots$

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L^2}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$
Cohérent	

5 – Graphe $V(r)$



3) Cas N°3 : fil infini de densité linéique λ

pour $r \neq 0$: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$

Détermination de $V(M)$

1 – Variable d'intégration

$$V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} + cte = \int -E \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} + K = - \int E dr + K = - \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr + K$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + K$$

2 – Origine du potentiel

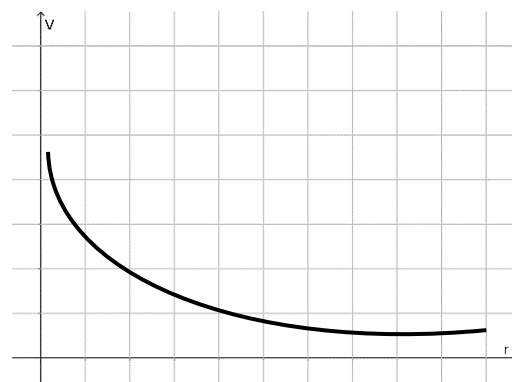
Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty) = 0$. On prend l'origine en un point M_0 à la distance r_0 de l'axe du cylindre.

$$V(r = r_0) = 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 + K \Rightarrow K = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L}$: $[V] = \frac{[\lambda]}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$: Cohérent

5 – Graphe $V(r)$



4) Cas N°4 : Cylindre infini chargé en volume

$$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Détermination de $V(M)$

1 – Variable d'intégration

$$V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} + cte = \int -E \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} + cte = - \int E dr + cte$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = - \int E_{int} dr + K_1 = - \int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \cdot dr + K_1$ $V_{int} = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = - \int E_{ext} dr + K_2 = - \int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \cdot dr + K_2$ $V_{ext} = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty) = 0$. On prend l'origine sur l'axe du cylindre.

$$V_{int}(r = 0) = 0 = 0 + K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

3 – Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

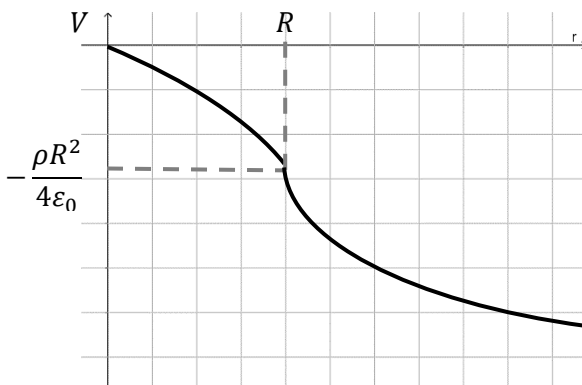
$$-\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} (2 \ln R - 1)$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}$	$V_{ext} = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(2 \ln \frac{r}{R} + 1 \right)$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L} \dots$

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$
Cohérent	

5 – Graphe $V(r)$



5) Cas N°5 : Plan infini

$$z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Détermination de $V(M)$

1 – Variable d'intégration

$$V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} + K = \int -E \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} + K = - \int E dz + K = - \int \epsilon \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz + K = -\epsilon \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + K$$

2 – Origine du potentiel

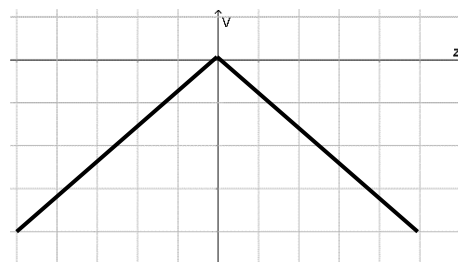
Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty) = 0$. On prend l'origine en O .

$$V(0) = 0 = 0 + K \Rightarrow K = 0$$

$$V = -\varepsilon \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L} \dots : [V] = \frac{[\sigma]L}{[\varepsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$ Cohérent

5 – Graphe $V(r)$



Distribution	Sphère chargée uniformément en surface (σ)	Sphère chargée uniformément en volume (ρ)	Fil infini uniformément chargé (λ)	Cylindre infini chargé en volume (ρ)	Plan $x = 0$ infini chargé (σ)
Champ électrostatique	$r < R : \vec{E} = \vec{0};$ $r > R : \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0 r} \vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{e}_x$ $x < 0 :$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{e}_x$
Potentiel électrostatique	$r \leq R : V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ $r \geq R : V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$ Avec $V(r \rightarrow +\infty) = 0$	$r \leq R :$ $V = \frac{\rho R^2}{3 \varepsilon_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right)$ $r \geq R : V = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r}$ Avec $V(r \rightarrow +\infty) = 0$	$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$ Avec $V(r_0) = 0$	$r \leq R :$ $V = \frac{\rho}{4 \varepsilon_0} (R^2 - r^2)$ $r \geq R : V = -\frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$ Avec $V(R) = 0$	$z \leq 0 : V = V_0 - \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$ $z \geq 0 : V = V_0 + \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$ Avec $V(z = 0) = V_0$

Exercice 3. Apparition d'un arc électrique

1- Le champ dans un condensateur est uniforme, dirigé d'une armature vers l'autre. Il est donc relié à la tension à ses bornes par : $\|\vec{E}\| = \left| \frac{dV}{dz} \right| = cte = \left| \frac{\Delta V}{\Delta z} \right| = \frac{U}{d}$ avec $d = 2 \text{ mm}$ la distance entre les armatures, d'où :

$$U \geq dE_c = 7,2 \text{ kV}.$$

2- La médiatrice entre les deux électrodes correspondant à l'équipotentielle de valeur moyenne entre les potentiels des deux électrodes, il s'agit ici de l'équipotentielle de valeur nulle. Avec un écart de 100 mV entre chaque équipotentielle, on obtient alors pour les différentes équipotentielles : en haut à gauche : -100 mV, colonne de droite de haut en bas : -200 mV, 0 et 200 mV.

3- Tracé à faire. Le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, donc les lignes de champ partent de l'électrode du bas pour aboutir sur l'électrode du haut, et en tout point elles sont orthogonales aux équipotentielles.

4- Le champ est maximal là où les équipotentielles sont le plus resserrées, l'arc apparaîtra donc initialement le long de l'axe (Oz), c'est-à-dire sur l'axe de symétrie des électrodes au niveau de leurs pointes.

Exercice 4. Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss pour déterminer un champ électrique

D'après les études de symétries et d'invariances de la distribution de charges, on peut montrer que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ soit $E_r = E(r)$, et $E_\theta = E_\varphi = 0$

Pour à l'extérieur de la boule chargée la densité volumique de charges est nulle, soit d'après l'équation de Maxwell-Gauss (M.G.) :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{or avec } E_r = E(r), \text{ et } E_\theta = E_\varphi = 0, \text{ on a}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right)_{\varphi, r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{r, \theta} \stackrel{E_\theta = E_\varphi = 0}{=} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} \stackrel{M.G.}{=} 0$$

donc $\frac{d(r^2 E(r))}{dr} = 0$ soit $r^2 E(r) = cte = K_1$ et $E(r > R) = \frac{K_1}{r^2}$

À l'intérieur : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 E(r) = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + K_2$$

Par symétrie, on sait que $E(0) = 0$ donc $K_2 = 0$.

$$E(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Finalement, par continuité du champ en $r = R$, $\frac{\rho R}{3\epsilon_0} = \frac{K_1}{R^2}$ soit $K_1 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}$

$$E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On constate sur cet exemple que $\rho(M)$ ainsi que $\text{div}(\vec{E}(M))$ peuvent être nuls en M sans que le champ électrique $\vec{E}(M)$ ne le soit.

Exercice 5. Capacité d'un condensateur plan

La plaque chargée positivement est prise comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$, avec $U = V_A - V_B = V(z = 0) - V(z = e)$.

Méthode N°1 :

Cf. appli précédente : calcul du champ créé par un plan infini chargé avec une densité surfacique σ ; avec $Q_{int} = \sigma \cdot S$

$$z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

D'après ce qui précède :

Champ créé par l'armature 1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Champ créé par l'armature 2 :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > e \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < e \end{cases}$$

Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z > e \text{ ou } z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } 0 < z < e \end{cases}$$

1. Détermination du potentiel V et de la différence de potentiel U :

Détermination de V : on utilise la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

Or d'après les symétries, V ne dépend que de z :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$$

$$V = - \int E \cdot dz + cte = - \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dz + cte = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + cte$$

Détermination de U : $U = V_A - V_B = V(z = 0) - V(z = e)$

$$U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

On pouvait aussi écrire :

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_A^B dz$$

$$U = V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

2. La capacité C est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

On a donc :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma e} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \text{ avec } S = \pi a^2$$

Méthode N°2

Par étude des invariances et symétries : tout plan (M, \vec{e}_z) est plan de symétrie et il y a invariance par translation selon x et y ; on a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

Equation de Maxwell Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ or en coordonnées cartésiennes, $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y}$ soit avec $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$, $E_x = E_y = 0$ soit $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{dE}{dz}$

Pour tout point de l'espace compris entre les armatures, on a $\rho = 0$, soit $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE}{dz} = 0 : E(z) = cte = E_0$

Loi de Coulomb : Au voisinage immédiat du conducteur, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$ soit ici en se plaçant au niveau de la plaque chargée positivement, qu'on peut choisir comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$:

$$\vec{E}(z=0) = E_0 \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{e}_z$$

On a alors :

$$U = V(z=0) - V(z=e) = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{Q}{S\epsilon_0} dz = \frac{Q}{S\epsilon_0} \int_A^B dz$$

$$= \frac{Q}{S\epsilon_0} e$$

Avec par définition $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q S \epsilon_0}{Q e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

Méthode N°3

Il y a invariance de la distribution de charges par translation selon x et y ; on a donc selon le principe de Curie V qui ne dépend que de z

Equation de Laplace : $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$ soit en intégrant par rapport à z : $V(z) = Az + B$

$$U = V_A - V_B = V(z=0) - V(z=e)$$

En prenant $V(z=0) = 0$, on a donc $V(z=e) = -U$

Conditions aux limites : $V(z=0) \stackrel{\text{formule en } z=0}{=} B = 0$ et $V(z=e) \stackrel{\text{formule en } z=e}{=} Ae = -U$

$$V(z) = Az + B = -\frac{U}{e} z$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

Remarque : on pouvait se contenter de déterminer $\frac{dV}{dz}$, avec d'après $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$,

$$\frac{dV}{dz} = A = cte = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{V(z=e) - V(z=0)}{e-0} = -\frac{U}{e}$$

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

Loi de Coulomb : Au voisinage immédiat du conducteur, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$ soit ici en se plaçant au niveau de la plaque chargée positivement, qu'on peut choisir comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$:

$$\vec{E}(z=0) = E_0 \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

$$\text{Avec par définition } C = \frac{Q}{U} = \frac{S \epsilon_0}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Exercice 6. Capacité d'un condensateur cylindrique

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \text{ entre les armatures}$$

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \cdot d\vec{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} dr = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\text{Calcul de la capacité : } C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \text{ soit } C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Validation : $[C] = [\epsilon_0] L$ et $C > 0$

Capacité linéique ou capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$:

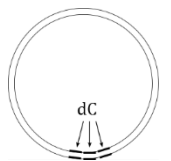
$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Cas où les deux armatures sont très proches : $e = R_2 - R_1 \ll R_1$: $\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1+e}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)$ avec $\frac{e}{R_1} \ll 1$

Développement limité à l'ordre 1 en $\frac{e}{R_1}$: $\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{R_1} + o\left(\frac{e}{R_1}\right)$

$$\text{La capacité du condensateur s'écrit alors : } C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{e}{R_1}} = \epsilon_0 \frac{2\pi R_1 h}{e}$$

Lien avec la capacité d'un condensateur plan : $2\pi R_1 h =$ Surface latérale du cylindre, soit C de la forme $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$:
localement, comportement de condensateur plan



Remarque : méthode N°2 : exploitation de l'équation de Laplace

Il y a invariance de la distribution de charges par rotation selon θ et translation selon z donc selon le principe de Curie V ne dépend que de r

Equation de Laplace en cylindriques : $\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$ soit en intégrant par rapport à r , en prenant $r = 0$ comme origine des potentiels : $V(r) = K \ln(r)$

$$U = V(r = R_1) - V(r = R_2) = -K \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{K}{r} \vec{u}_r$$

Loi de Coulomb : Au voisinage immédiat du conducteur, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$ soit ici en se plaçant au niveau de la plaque chargée positivement située en $r = R_1$

$$\vec{E}(r = R_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q}{2\pi R_1 h \epsilon_0} \vec{u}_r = -\frac{K}{R_1} \vec{u}_r$$

Soit $K = -\frac{Q}{2\pi h \epsilon_0}$ et $U = V(r = R_1) - V(r = R_2) = -K \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Avec par définition

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Exercice 7. Calcul de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique

$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}$ (uniforme) où \vec{e} est orienté de l'armature $+Q$ vers l'armature $-Q$; $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2}$;

$$W_C = \mathcal{E}_{el} = \iiint_{\text{l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{\text{l'espace}} w_e d\tau = w_e S e = \frac{Q^2 e}{2\epsilon_0 S} ;$$

Or $W_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{Q^2}{2C}$ donc $C = \frac{Q^2}{2W_C} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

Exercice 8. Energie stockée dans une boule chargée uniformément en volume

1) On a $r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \iiint_{\text{l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\substack{\text{volume mésoscopique} \\ \text{écorce d'épaisseur } dr}} = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0}\right)^2}_{E(r \leq R)} 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}\right)^2}_{E(r \geq R)} 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = 2\pi \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{3 \epsilon_0}\right)^2 \left[\int_0^R r^4 dr + \int_R^{+\infty} \frac{R^6}{r^2} dr \right] = \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left(\left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R + \left[-\frac{R^6}{r} \right]_R^{+\infty} \right) = \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left(\frac{R^5}{5} + R^5 \right) = \frac{4\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} R^5$$

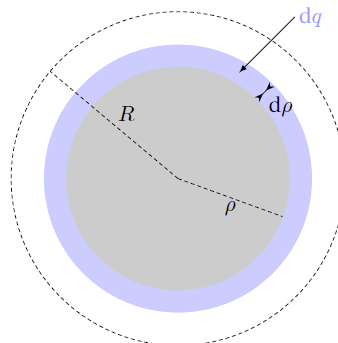
En introduisant la charge totale de la sphère : $Q = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, on trouve

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \frac{4\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} R^5 = \frac{3}{20\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

Remarque : $\left[\frac{3}{20\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right] = \left[\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q^2}{R^2} \right] L = [F]L = [\text{énergie}]$: expression homogène.

Les charges positives se repoussant, il a fallu leur fournir de l'énergie pour les rapprocher les unes des autres. C'est cette énergie fournie qui est stockée sous forme électrique.

2) Corrigé J. Kieffer



On peut également retrouver l'énergie stockée en imaginant la méthode dite constructive suivante. On suppose qu'on a déjà "construit" une boule de rayon $\rho \in [0, R]$ et on regarde l'énergie nécessaire pour amener une couche d'épaisseur $d\rho$ de l'infini.

On sait que la boule de rayon ρ crée un potentiel $V = \frac{4 \pi \rho^3 \rho_0}{3 4 \pi \varepsilon_0 r} = \frac{1}{3} \frac{\rho^3 \rho_0}{\varepsilon_0 r}$.

La charge dq qu'on souhaite amener de l'infini vaut $dq = 4 \pi \rho^2 d\rho \rho_0$. L'énergie nécessaire pour amener cette charge de l'infini vaut la version d'énergie potentielle soit :

$$dE = dq(V(r = \rho) - V(\infty)) = \frac{4 \pi \rho^4 \rho_0^2}{3 \varepsilon_0} d\rho$$

On peut alors trouver l'énergie totale nécessaire pour créer la distribution en intégrant pour $\rho \in [0, R]$

$$E_{\text{stockée}} = \int_0^R \frac{4 \pi \rho^4 \rho_0^2}{3 \varepsilon_0} d\rho = \frac{4 \pi R^5 \rho_0^2}{15 \varepsilon_0}$$

On retrouve la même expression que celle retrouvée précédemment ce qui est toujours rassurant :-)

Analogie gravitationnelle

On peut bien entendu effectuer le même type de calcul pour trouver l'énergie d'une planète ou d'une étoile. On a :

$$\rho_0 \rightarrow \mu \quad Q \rightarrow M \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow -4\pi G$$

donc

$$E_{\text{stockée}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

on trouve bien entendu une énergie négative car cette fois les masses s'attirent. Il faut donc fournir de l'énergie pour détruire la distribution.

EXERCICES

Exercice 9. Câble creux

On a
$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho(r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{si } R < r < 2R \\ \frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r & \text{si } r \geq 2R \end{cases}$$

• Potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

Les invariances de la distribution de charges se retrouvent sur le potentiel (principe de Curie), donc $V(M) = V(r, \theta, z) = V(r)$

Donc : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r$ puisque V ne dépend que de r .

En projetant sur \vec{u}_r : $E = -\frac{dV}{dr}$ soit
$$V = \begin{cases} C & \text{si } r \leq R \\ \frac{-\rho\left(\frac{r^2}{2} - R^2 \ln(r)\right)}{2\varepsilon_0} + D & \text{si } R < r < 2R \\ -\frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + E & \text{si } r \geq 2R \end{cases}$$

où C, D et E sont des constantes que l'on trouve en utilisant la continuité du potentiel :

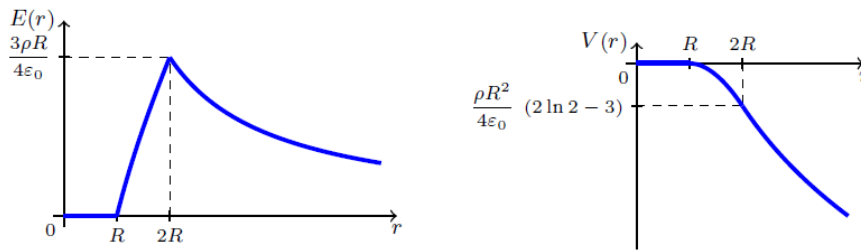
– en $r = 0$: $V(0) = 0 = C$ donc $V(r) = 0$ si $r \leq R$

– en $r = R$: $V(R) = 0 = \frac{-\rho\left(\frac{R^2}{2} - R^2 \ln(R)\right)}{2\varepsilon_0} + D$ soit $D = \frac{\rho R^2(1 - 2 \ln(R))}{4\varepsilon_0}$ donc $\frac{\rho(R^2 - r^2 + 2R^2 \ln(\frac{r}{R}))}{4\varepsilon_0}$ si $R < r < 2R$

– en $r = 2R$: $V(2R) = \frac{\rho R^2(-3 + 2 \ln(2))}{4\varepsilon_0} = -\frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(2R) + E$ soit $E = \frac{\rho R^2(6 \ln(2R) - 3 + 2 \ln(2))}{4\varepsilon_0}$ d'où

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(2\ln(2) - 3 - 6 \ln\left(\frac{r}{2R}\right) \right) \quad \text{si } r \geq 2R$$

• Tracé des courbes dans le cas $\rho > 0$:



Remarque : le champ électrique et le potentiel sont définis partout, et continus, ce qui est normal pour une distribution volumique de charges.

Exercice 10. Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène (Oral ATS 2021)

1) Application du théorème de Gauss : cf. cours : distribution de charge sphérique uniformément chargée en volume ; on retrouve :

$$r > r_0 : \vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \text{ on retrouve le cas de la charge ponctuelle}$$

$$r < r_0 : \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \vec{u}_r$$

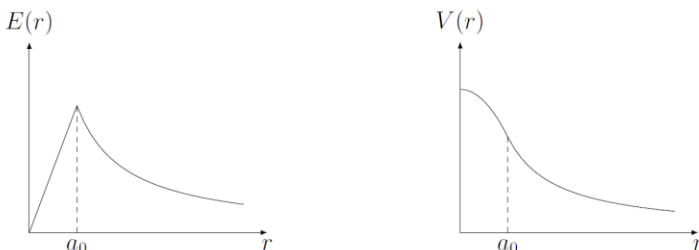
2) Obtention du potentiel : 1^{ère} méthode : $V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int -E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = -\int E dr + \text{cte}$

2^{ème} méthode : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r = -\text{grad} V \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E(r) dr + \text{cte}$

$$r > r_0 : V(M) = \boxed{V(r > r_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}} \text{ avec la convention } V(\infty) = 0$$

$$r < r_0 : V(M) = V(r) = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} + \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} (3r_0^2 - r^2) = \boxed{\frac{e}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(3 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right) = V(r < r_0)}$$

3) Graphes



4) Energie potentielle :

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int -e\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -e \int dV = -eV(r)$$

Ou alors directement : résultat de cours, $\boxed{E_p = qV = -eV}$

$$\boxed{E_p(r > r_0) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} ; \quad ; E_p(r < r_0) = +\frac{e^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \boxed{-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) = E_p(r < r_0)}$$

5) Position d'équilibre de l'électron : correspond aux extrema d'énergie potentielle, soit ici extrema de $V(r)$: cf. graphe : $r_{\text{éq}} = 0$, correspondant à un maximum de $V(r)$ donc un minimum de $E_p = qV = -eV(r)$: position d'équilibre stable.

On peut aussi le démontrer par le calcul :

$$\text{Équilibre : en } r_{\text{éq}} \text{ tq } \left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r_{\text{éq}}} = 0 \text{ avec } \frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r \text{ soit } \left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r_{\text{éq}}} = 0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r_{\text{éq}}$$

$$\boxed{r_{\text{éq}} = 0}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{dr^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} > 0 : \text{équilibre stable en O.}$$

6) L'énergie d'ionisation de l'électron est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome pris dans son état fondamental (équilibre stable), soit passage de $r = 0$ à l'infini. $E_{ionisation} = \Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(0) = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \Rightarrow$

$$r_0 = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 V_i} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Bon ordre de grandeur (Ångström)

Exercice 11. Champ et potentiel créé par un noyau non uniformément chargé

1. Charge totale Q du noyau :

$$Q = \iiint \rho d\tau = \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\int_0^a r^2 dr - \frac{1}{a^2} \int_0^a r^4 dr \right)$$

$$\rho_0 4\pi \left(\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a - \frac{1}{a^2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a \right) = \rho_0 4\pi \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$$

2. Distribution à symétrie sphérique donc coordonnées sphériques.

Symétries et invariances de la distribution de charge

Plan de symétrie de la distribution de charge :

Tous les plans passant par OM sont Π^+ en particulier les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ou le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$

Conclusion : \vec{E} appartient à l'intersection de ces plans. Il est donc porté par \vec{u}_r .

Invariances de la distribution de charge :

par rotation autour du point O : \vec{E} ne dépend pas de θ ni de ϕ .

Conclusion : \vec{E} ne dépend que de r .

Conclusion : $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$

3. A l'extérieur du noyau $r > a$

Choix de la surface de Gauss :

Puisque le champ est radial, on choisit une sphère de rayon $r' = OM$ passant par M.

Expression du flux Φ

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_S E \cdot dS \quad \text{car } \vec{E} // \vec{dS}$$

$$\Phi = E \iint_S dS \quad \text{car } E \text{ ne dépend que de } r \Rightarrow \Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi r'^2$$

Détermination de la charge Q_{int}

$$Q_{int} = Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$$

Application du théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

4. A l'intérieur du noyau, même démarche mais Q_{int} est différent.

Détermination de la charge Q_{int}

$$Q_{int} = \iiint \rho d\tau = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\int_0^r r^2 dr - \frac{1}{a^2} \int_0^r r^4 dr \right)$$
$$\rho_0 4\pi \left(\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r - \frac{1}{a^2} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^r \right) = \rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right)$$

Application du théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \vec{u}_r}$$

On vérifie la continuité du champ pour $r = a$.

5. On utilise la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1$

Expression du gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial r} \vec{u}_r + \dots \vec{u}_\theta + \dots \vec{u}_\varphi$

Or, \vec{E} est porté par \vec{u}_r donc la projection de la relation sur \vec{u}_θ et \vec{u}_φ nous indique que V_1 ne dépend pas de θ ni de φ . Donc

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{dV_1}{dr}$$

Projection sur \vec{u}_r :

$$-\frac{dV_1}{dr} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2}$$

Par intégration en r on en déduit V_1 à l'extérieur :

$$V_1 = \int dV_1 = \int -\frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} dr = \frac{2 a^3 \rho_0}{15 \epsilon_0 r} + cte$$

$V_1 = 0$ à l'infini où il n'y a pas de charges : $cte = 0$

$$\boxed{V_1 = \frac{2 a^3 \rho_0}{15 \epsilon_0 r}}$$

6. De même :

$$E_r = -\frac{dV_2}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right)$$

$$V_2 = \int dV_2 = \int -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) dr = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + cte$$

Continuité de V pour $r = a$: $V_1(a) = V_2(a)$

$$\frac{2 a^2 \rho_0}{15 \epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{20} \right) + cte$$

$$cte = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} - \frac{1}{20} \right) = \frac{\rho_0 a^2}{4 \epsilon_0}$$

$$\boxed{V_2 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} - \frac{a^2}{4} \right)}$$

Exercice 12. Potentiel de Yukawa

1- Par définition, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{ra} e^{-\frac{r}{a}} \right) \vec{u}_r$ soit en simplifiant

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \vec{u}_r$$

2- Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r , orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

D'après la question précédente :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\text{sphère}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

D'où

$$Q(r) = q \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}$$

3- Pour $r \rightarrow 0$, $Q(r) \rightarrow q$: il s'agit donc d'une charge ponctuelle localisée en O , qui modélise le **proton** de l'atome.

4- Pour $r \rightarrow +\infty$, $Q(r) \rightarrow 0$: l'ensemble est électriquement neutre, comme attendu pour un atome globalement neutre.

5- Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ avec

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \right) = -\frac{\frac{r}{a}}{r^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r a^2} e^{-\frac{r}{a}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Soit

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

Méthode N°2 : Charge δQ comprise dans la coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$, de volume $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\rho(r) = \frac{\delta Q}{dV} = \frac{\delta Q}{4\pi r^2 dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dr}$$

or cf. q.2) $Q(r) = q \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}$, soit

$$\frac{dQ}{dr} = q \left(\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} + \left(\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \right) \frac{r}{a} + \frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} \right) = q e^{-\frac{r}{a}} \left(-\frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} + \frac{1}{a} \right) = -q \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{qr}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\text{Soit } \rho(r) = \frac{dQ}{dV} = -\frac{qr}{4\pi r^2 a^2} e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{q}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

Pour un atome d'hydrogène, $q = e$, soit $\rho(r) = -\frac{e}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$, or $\rho(M) = -e P(M)$, d'où

$$P(r) = \frac{1}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

6- Probabilité de présence dp dans la coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$, de volume $dV = 4\pi r^2 dr$:

$$dp = P(r) dV = \frac{4\pi r^2}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}} dr$$

$$dp = \frac{r}{a^2} e^{-r/a} dr$$

7- Valeur de r pour laquelle la densité de probabilité $P(r) = \frac{r}{a^2} e^{-r/a}$ est maximale : condition nécessaire : sa dérivée s'annule :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} = 0 \text{ pour } r = a$$

La fonction p est toujours positive, nulle en $r = 0$ et en $r \rightarrow +\infty$, et sa dérivée s'annule effectivement en $r = a$: la densité de probabilité de présence de l'électron est donc maximale en $r = a$. Ainsi, a peut s'interpréter comme le **rayon de l'atome**.

- 8- D'après le principe de superposition, le potentiel total $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}}$ résulte de la superposition du potentiel V_{proton} créé par la charge ponctuelle $q = e$ située en zéro et correspondant au proton, ainsi que du potentiel V_{elec} associé à l'électron réparti dans l'espace avec une densité volumique de charge $\rho(r)$.

$$V_0 = V_{elec}(r=0) = V(r=0) - V_{proton}(r=0)$$

Or $V_{proton}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ (potentiel créé par une charge ponctuelle en O, en prenant une origine des potentiels à l'infini (Attention, le potentiel n'est pas toujours nul à l'infini : il ne l'est pas pour les distributions de charge infinies, par exemple un plan ou un cylindre infini), soit :

$$V_{elec}(r) = V(r) - V_{proton}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right)$$

Energie potentielle de l'électron : $Ep(r) = qV_{elec}(r) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right)$

$$V_0 = V(r=0) - V_{proton}(r=0)$$

Or pour $r \ll a$: $V_{elec}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right) \approx -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r}{a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ soit $V_0 \approx -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ et $Ep(r=0) \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

Energie d'ionisation : variation d'énergie entre E.I. : position stable et E.F. : position à l'infini, soit

$$E_{ion} = Ep(r \rightarrow +\infty) - Ep(r=0) = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Exercice 13. Force exercée entre deux conducteurs sphériques (J. Kieffer) 2 | ✂ 1 ou 2

La force d'interaction entre les deux conducteurs supposés ponctuels est : $\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{u}$

Il faut exprimer la charge Q_1 en fonction des autres grandeurs connues du système.

Application du théorème de Gauss : cf. cours : distribution de charge sphérique uniformément chargée en volume ; on retrouve à l'extérieur de chaque boule :

Pour C_1 : $\vec{E}_1(M) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et pour C_2 : $\vec{E}_2(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ (on retrouve le cas de la charge ponctuelle)

Obtention du potentiel : $E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E(r) dr + cte$ avec la convention $V(\infty) = 0$, d'où

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Or $V(R_1) = U = V_1(R_1) + V_2(l) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}$ soit $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} = R_1 \left(U - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \right)$

d'où finalement la force qui s'exerce entre les deux conducteurs :

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{u} = \frac{R_1 Q}{l^2} \left(U - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \right) \vec{u}$$

Exercice 14. Flocculation d'une suspension colloïdale – Ecrantage de Debye (Oral Banque PT)

- 1- Le rayon d'un ion est du même ordre de grandeur que celui d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} m, très inférieur à celui du colloïde.

2- Densité de charges : $\rho(r) = \frac{dq}{d\tau} = qn^+(r) - qn^-(r) = q(n^+(r) - n^-(r)) = qn_0 \left(e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}} - e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}} \right)$

$$\rho(r) = qn_0 \left(e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}} - e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}} \right) = zen_0 \left(e^{-\frac{zeV(r)}{k_B T}} - e^{+\frac{zeV(r)}{k_B T}} \right)$$

Avec $|qV| \ll k_B T$, on a $\frac{|qV|}{k_B T} \ll 1$; en faisant un DL1 en zéro de $e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}}$ et de $e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}}$:

$$\rho(r) = qn_0 \left(e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}} - e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}} \right) \approx qn_0 \left(1 - \frac{qV(r)}{k_B T} - 1 - \frac{qV(r)}{k_B T} \right) \approx -2qn_0 \frac{qV(r)}{k_B T}$$

$$\boxed{\rho(r) \approx -\frac{2q^2 n_0 V(r)}{k_B T}}$$

3- Equation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit ici en coordonnées sphériques avec $\rho(r)$ donc $V(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) = -\frac{zen_0}{\epsilon_0} \left(e^{-\frac{zeV}{k_B T}} - e^{+\frac{zeV}{k_B T}} \right) \approx \frac{2q^2 n_0 V(r)}{\epsilon_0 k_B T}$$

Soit $\frac{d^2}{dr^2} (rV) - KrV = 0$ en posant $K = \frac{2q^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} = cte$

En posant $f(r) = rV(r)$ et $K = \frac{2q^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} = cte = \frac{1}{\delta^2}$, soit $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2q^2 n_0}}$, on reconnait une équation différentielle du second ordre de forme canonique :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{f}{\delta^2} = 0.$$

Résolution : l'équation caractéristique associée est de la forme $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ d'où $r_{\pm} = \pm \frac{1}{\delta}$.

Solution générale à l'équation homogène = solution générale à l'équation complète en l'absence de second membre :

$$f(r) = Ae^{-\frac{r}{\delta}} + Be^{+\frac{r}{\delta}} = rV(r)$$

Soit

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\delta}} + \frac{B}{r} e^{+\frac{r}{\delta}}$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$ (de plus, sans cela, on aurait un potentiel qui divergerait à l'infini, ce qui n'est pas physiquement possible) :

$$\boxed{V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\delta}}}$$

La décroissance de $V(r)$ a pour longueur caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2q^2 n_0}}$ dite longueur d'écrantage de Debye : au bout de quelques δ , le potentiel tend vers 0, l'influence des ions autour de la particule colloïdale devient négligeable.

4- Par définition, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \left(+\frac{1}{\delta} \frac{A}{r^2} e^{-\frac{r}{\delta}} + \frac{A}{r^2} e^{-\frac{r}{\delta}} \right) \vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{A}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta} \right) e^{-\frac{r}{\delta}} \vec{u}_r}$$

En appliquant le théorème de Gauss sur une sphère de centre O la position de la particule colloïdale de charge $-Q$, et de rayon R le rayon de la particule colloïdale (cette sphère contient donc exactement et uniquement la particule colloïdale), on a :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\text{sphère}} \frac{A}{R^2} \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) e^{-\frac{R}{\delta}} dS = \frac{A}{R^2} \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) e^{-\frac{R}{\delta}} \times 4\pi R^2 = 4\pi A \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) e^{-\frac{R}{\delta}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Soit

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) e^{-\frac{R}{\delta}}}$$

5- En l'absence des ions, $N_0 = 0$ donc $\delta \rightarrow \infty$. Le champ électrique créé par le colloïde pour $r > R$ équivaut à celui d'une charge ponctuelle, $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, qui décroît donc lentement en $1/r^2$.

L'ajout des sels ioniques renforce nettement cette décroissance à grande distance ($r \gg \delta$) puisque le terme en $1/r^2$ est remplacé par $\frac{e^{-\frac{r}{\delta}}}{r}$.

Ainsi, les ions permettent d'écranter (de masquer partiellement) le champ créé par le colloïde, et ce faisant de masquer sa présence aux colloïdes environnants, ce qui est favorable à la floculation (en effet, d'après le document 1 de l'énoncé, la vitesse de sédimentation très faible est à la fois due à la très petite taille des particules colloïdales mais aussi aux forces de répulsions inter-colloïdales dues à leurs charges négatives).

Exercice 15. Lorsque les cartes sont mélangées (J'assure, Dunod, PT)

Sur la carte de la **figure (a)**, le plan $x = 0$ est un plan de symétrie du potentiel et de la distribution de charges ; de plus, les points « entourés » par les équipotentielles correspondent aux positions des charges. Les 2 charges situées en $y = 0$ sont donc identiques. De plus, le potentiel au voisinage de ces deux charges étant positif, elles sont positives. A l'inverse, le potentiel au voisinage de la 3^{ème} charge étant négatif, elle est également négative : Distribution (3) : $(q; q; -q)$; ou distribution (4) : $(q; q; -3q)$. De plus, en considérant les équipotentielles $|V| = 2000 \text{ V}$ au voisinage des différentes charges, on constate que la distance entre cette équipotentielle et la charge négative du haut en $x = 0$ est plus importante que pour les charges positives en $y = 0$, or au voisinage d'une charge $|V|$ augmente avec $|q|$: la charge négative est donc en valeur absolue plus élevée que les deux autres : il s'agit donc de la **distribution (4) : $(q; q; -3q)$** .

Sur la carte de la **figure (b)**, les plans orthogonaux au plan de la distribution de charges et contenant les hauteurs des triangles constituent trois plans de symétrie des équipotentielles et donc de la distribution de charge. Il s'agit donc de trois charges identiques. De plus, les équipotentielles au voisinage de ces charges étant positives, il s'agit de trois charges identiques positives : **Distribution (1) : $(q; q; q)$**

Sur la carte de la **figure (d)**, les lignes de champ divergent à partir des trois points particuliers correspondant aux positions des trois charges. Il s'agit donc de trois charges positives : Distribution (1) : $(q; q; q)$ ou distribution (2) : $(q; q; 3q)$. De plus, l'allure des lignes de champ est identique pour les deux charges du bas mais pas pour celle du haut (le plan $x = 0$ est un plan de symétrie du champ électrostatique, donc les 2 charges en $y = 0$ sont identiques ; en revanche, la charge située en $x = 0$ est plus importante car les lignes de champ sont repoussées vers les deux autres charges). Il ne peut donc pas s'agir de la distribution (1) : $(q; q; q)$, il s'agit de la **distribution (2) : $(q; q; 3q)$** .

Sur la carte de la **figure (c)**, les lignes de champ divergent à partir des 2 points particuliers du bas de manière identique : le plan $x = 0$ étant plan de symétrie, les deux charges situées en $y = 0$ sont deux charges positives identiques. Les lignes de champ convergent vers le point particulier du haut : la charge située en $x = 0$ est donc une charge négative. Il s'agit donc de la **distribution (3) : $(q; q; -q)$** , la distribution (4) : $(q; q; -3q)$ correspondant à la figure (a).

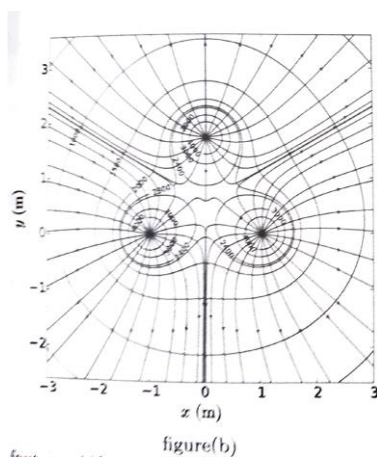
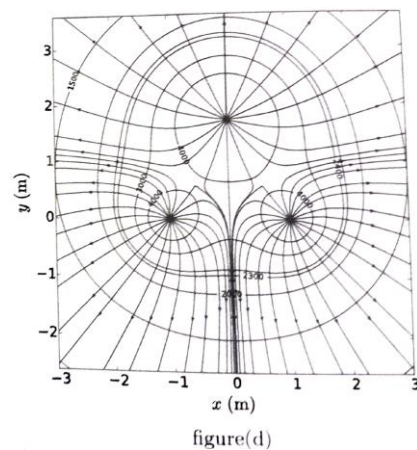


Fig. : J'assure, Dunod, PT



En se plaçant le plus proche possible de la charge pour limiter l'influence des autres charges, on peut considérer en première approximation que le potentiel est proche de celui créé par une unique charge, soit $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ou encore $q = 4\pi\epsilon_0 rV(r)$.

Dans la figure (b) : pour $r_1 \approx 0,26 \text{ m}$, $V(r_1) \approx 4\,000 \text{ V}$ soit $q = 4\pi\epsilon_0 rV(r) \approx 10^{-7} \text{ C}$.

Dans les zones vides de charges, d'après le théorème de Gauss, le champ \vec{E} est à flux conservatif, donc plus les lignes de champ s'écartent, plus le champ associé est faible.

Figure (c) : dans le plan $x = 0$, en y légèrement inférieur à 0

Figure (d) : 3 points de champ nul : $(x = 0; y \approx 0,6 \text{ m})$; $(x \approx \pm 0,7 \text{ m}; y \approx 0,8 \text{ m})$

Exercice 16. Orage

Cf. cours condensateur plan : $C = \epsilon_0 \frac{S}{e} = 138 \text{ nF}$; $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$; ici : $U = Ee$, soit $U_{dis} = eE_{dis}$; $U_{dis} = 1,53 \text{ GV}$;

Caractéristique d'un condensateur en convention récepteur : $i = C \frac{du}{dt}$; Puissance **reçue** par le condensateur : $p = u i$;

Energie **reçue** par le condensateur entre t et $t + dt$ (variation de l'énergie stockée par le condensateur) :

$\delta W_c = d\mathcal{E}_c = u i dt = u C du = d\left(\frac{1}{2} C u^2\right)$, soit énergie $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C U^2 = 161 \text{ GJ}$; puissance $P = \frac{\mathcal{E}_c}{\Delta t} = 17,9 \text{ TW}$.

Exercice 17. Capacité d'un condensateur sphérique

Invariances et symétries de la distribution de charges :

1- Coordonnées sphériques

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

2- Symétries

Tout plan passant par le centre de la sphère et le point M est plan de symétrie des sources, notamment les plans $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

$\Rightarrow \vec{E}$ en un point M d'un plan de symétrie appartient à ce plan de symétrie ; il appartient donc à l'intersection des différents plans de symétrie, soit ici par exemple $\pi_1 \cap \pi_2 = (M; \vec{u}_r)$. Finalement, \vec{E} est suivant \vec{u}_r .

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

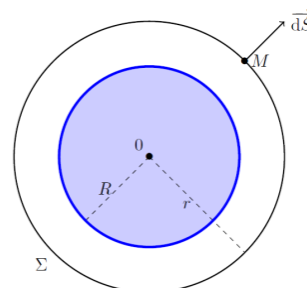
3 -Invariances

Distribution invariante par rotation de θ ou φ autour de O $\Rightarrow \|\vec{E}\|$ ne dépend ni de θ ni de φ : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

Application du théorème de Gauss

4- Choix de la surface de Gauss :

Le champ étant radial, on choisit une surface Σ_G perpendiculaire au champ : sphère de centre O et de rayon r .



5- Calcul du flux sortant de \vec{E} à travers la surface de Gauss

La norme de \vec{E} est uniforme sur cette surface car \vec{E} ne dépend que de r et \vec{E} et $d\vec{S}$ sont suivant \vec{u}_r .

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \iint_{P \in \Sigma_G} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } d\vec{S} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint_{P \in \Sigma_G} E(r) dS \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ indépendant} \\ \text{de } r}}{=} E(r) \iint_{P \in \Sigma_G} dS = E \cdot S_{Gauss} \\ &= \boxed{E(r) \cdot 4 \pi r^2 = \Phi} \end{aligned}$$

6- Calcul de la charge intérieure Q_{int} à la surface de Gauss

Pour $r < R_1$: $Q_{int} = 0$ (La sphère de Gauss ne renferme que du vide)

Pour $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q_1$ (La sphère de Gauss renferme la première armature qui porte la charge Q_1)

Pour $r > R_2$: $Q_{int} = 0$ (les charges des deux armatures sont opposées et se compensent)

7- Application du théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$, soit $E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$

ici, entre les armatures : $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_1^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{M} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Si $R_2 \approx R_1$, $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

Exercice 18. Capteur capacitif de niveau de liquide (E. Thibierge) 2 | 2

- Le système est invariant par rotation autour de l'axe des cylindres, donc V est indépendant de θ . Par ailleurs, les effets de bords sont négligés, ce qui revient à supposer une invariance par translation le long de l'axe des cylindres : V ne dépend donc pas non plus de z . Finalement, V ne dépend que de r .
- L'espace entre les deux cylindres est vide de charge.

Equation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit ici en coordonnées cylindriques avec $\rho = 0$ et $V(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Par intégrations successives (attention !! ici, ne pas chercher à développer l'expression pour obtenir une équ. diff. sous une forme canonique connue) :

$$r \frac{dV}{dr} = K = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dr} = \frac{K}{r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = K \ln(r) + K'$$

Détermination des constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites (C.L.) :

$$V(r = a) \stackrel{\text{C.L. de l'énoncé}}{=} V_0 \stackrel{\text{expression en } r=a}{=} K \ln(a) + K' \quad (1)$$

$$V(r = b) \stackrel{\text{C.L. de l'énoncé}}{=} 0 \stackrel{\text{expression en } r=b}{=} K \ln(b) + K' \quad (2)$$

En soustrayant ces deux relations :

$$V_0 = K \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow K = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Dans (2) :

$$K \ln(b) + K' = 0 = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln(b) + K' \Rightarrow K' = -\frac{\ln(b)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} V_0$$

Finalement :

$$V(r) = K \ln(r) + K' = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln(r) - \frac{\ln(b)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} V_0 = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} (\ln(r) - \ln(b))$$

$$V(r) = \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} V_0$$

3- Champ électrique entre les deux cylindres :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \stackrel{\substack{\text{cf. calcul} \\ V(r)}}{=} -\frac{K}{r} \vec{e}_r$$

Inutile de calculer la dérivée de $V(r)$: elle a été obtenue par intégration de $\frac{dV}{dr}$ à partir du Laplacien, ne pas refaire des calculs déjà connus, chronophages et sources d'erreurs.

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Validation du résultat : homogène car $[E] = [|\overrightarrow{\text{grad}} V|] = \frac{[V]}{L}$ De plus, $\ln(a/b) < 0$: on a bien \vec{E} selon $+\vec{e}_r$ donc ici dans le sens des potentiels décroissants

4- Densité volumique d'énergie stockée : $u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ dans le vide (dans l'air) ou $u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$ en présence de liquide

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \mathcal{E}_{\text{stockée,air}} + \mathcal{E}_{\text{stockée,liquide}}$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée,liquide}} = \iiint_{\substack{\text{zone avec} \\ \text{du liquide}}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 d\tau = \int_a^b \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \underbrace{2\pi r h dr}_{\substack{\text{volume du cylindre creux} \\ \text{d'épaisseur } dr \text{ et de hauteur } h}} = \pi \epsilon_0 \epsilon_r h \int_a^b \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{r}\right)^2 r dr$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée,air}} = \iiint_{\substack{\text{zone avec} \\ \text{de l'air}}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_a^b \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{2\pi r (H-h) dr}_{\substack{\text{volume du cylindre creux} \\ \text{d'épaisseur } dr \text{ et de hauteur } H-h}}$$

$$= \pi \epsilon_0 \left[(H-h) \int_a^b \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{r}\right)^2 r dr + h \epsilon_r \int_a^b \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{r}\right)^2 r dr \right] = \pi \epsilon_0 \left[(H-h + h \epsilon_r) \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^2 \int_a^b \frac{1}{r} dr \right]$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \pi \epsilon_0 \left[(H + h(\epsilon_r - 1)) \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

En simplifiant avec $\ln^2\left(\frac{b}{a}\right) = \ln^2\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \pi \epsilon_0 (H + h(\epsilon_r - 1)) \frac{V_0^2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

5- Tension aux bornes du condensateur : $U = V_0$ soit $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \pi \epsilon_0 (H + h(\epsilon_r - 1)) \frac{V_0^2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$, d'où

$$C = 2\pi \epsilon_0 \frac{H + h(\epsilon_r - 1)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Connaissant la capacité C , on a donc accès à la hauteur de liquide :

$$\frac{C}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = H + h(\epsilon_r - 1)$$

$$h = \frac{1}{\epsilon_r - 1} \left[\frac{C}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - H \right]$$

- 6- La sonde peut être utilisée pour **tout liquide isolant à condition de la calibrer** à chaque changement de liquide car la constante diélectrique ϵ_r dépend du liquide utilisé. En revanche, elle **ne peut pas convenir pour des liquides conducteurs** : l'espace entre les armatures d'un condensateur doit être constitué d'un isolant, sans quoi un courant circule dès qu'une tension est appliquée. Il faut utiliser d'autres sondes, comme celles présentées dans la vidéo dont le lien figure dans l'énoncé.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 19. Analyse d'une carte de champ

- 1) Les lignes de champ électrique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives. On en déduit que toutes les charges sont positives hormis q_3 .
- 2) Le plan orthogonal à la figure contenant l'axe $y = 0$ est un plan de symétrie du champ électrique, c'est donc aussi un plan de symétrie de la distribution de charge ... mais cela n'apporte aucune information sur les charges car elles sont toutes comprises dans ce plan.

On constate que le plan $x = 0$ est plan de symétrie du champ électrique, donc également de la distribution de charges.

On en déduit $q_5 = q_1$ et $q_4 = q_2$.

- 3) Les lignes de champ semblent « éviter » les points où S croise les plans de symétrie : cela signifie en fait qu'il existe deux lignes de champ « médianes » (l'une colinéaire à \vec{u}_x , l'autre colinéaire à \vec{u}_y) qui s'y coupent. La seule possibilité pour que \vec{E} soit tangent à deux lignes de champ orthogonales en ces points est qu'il soit nul.
- 4) Le champ est nul en tout point de S, donc son flux au travers de cette surface est nul, donc d'après le théorème de Gauss la charge intérieure à cette surface est nulle : $q_2 + q_3 + q_4 = 0$ soit $q_3 = -2q_2$

Exercice 20. Caractéristiques physiques de la Terre 2 | 2 ou 3

1. $\rho_0 = 5,52 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- 2) $\rho_0 = \rho_1 + \left(\frac{r_2}{R}\right)^3 (\rho_2 - \rho_1)$
- 3) $\delta\mathcal{G} \sim 2\mathcal{G}_0 \left(\frac{3\rho_1}{2\rho_0} - 1\right) \frac{\delta r}{R}$
- 4) $\rho_1 = \frac{2}{3}\rho_0 \left(1 - \frac{\Delta T}{T} \frac{\delta r}{R}\right) = 2,29 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- 5) $\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{R}{R-H}\right)^3 (\rho_0 - \rho_1) = 8,67 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Exercice 21. Anomalie de Bouguer 2 ou 3 | 2 ou 3

$$\Delta g_{B,z} = \frac{4\pi\mathcal{G}(\rho_2 - \rho_1)}{3} \frac{dR^3}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad d = 5,5 \text{ km et } R = 3,6 \text{ km.}$$