COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°7 – semaine Pronote 11 : 12 au 15 Novembre 2024

Au programme des exercices

→ **Chapitre MK0 :** Révisions et compléments de mécanique de 1ère année - suite : ***uniquement les exercices avec oscillateurs (régimes libre et forcé).***

→ **Chapitre EM1 parties 1 et 2 : Electrostatique :** Distribution de charges, Champ $\vec{E}$, théorème de Gauss de l'électrostatique et de la gravitation, potentiel électrostatique, cartes de champ et équipotentielles, modélisation électrostatique d'un condensateur. ***Les équations de Maxwell relatives au champ électrostatique ainsi que les équations de Poisson et Laplace ne sont pas encore au programme***

Questions de cours

1. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

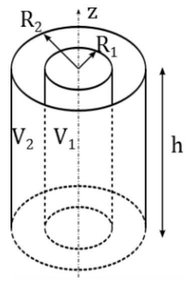
4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

5. ❤️ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

6. ** Etablir l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme par intégration directe de l'équation de Maxwell-Gauss. On admettra par ailleurs la continuité du champ à la surface de la boule.

Donnée : Divergence en coordonnées sphériques : $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}$

7. ❤️ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.



8. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.

   Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Questions de cours avec éléments de réponses

Pour les calculs de champ électrostatique ou gravitationnel, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances de la distribution, conséquences sur le champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
4) *choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)*
5) *Calcul de la charge intérieure ou de la masse intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss, la disjonction de cas sur la charge / masse intérieure se répercutant sur $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

Distribution	**Astre sphérique de masse volumique ρ**	**Cylindre infini chargé en volume (ρ)**	**Plan $x=0$ infini chargé (σ)**
Champ $\vec{G}$ ou $\vec{E}$	$r \leq R : \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\dfrac{\rho r}{3}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\frac{\rho R^3}{3 r^2}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{M_{tot}}{r^2}\vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \dfrac{\rho r}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\,\varepsilon_0\,\mathrm{r}}\vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$

1. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

1ère méthode : $V = \int -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \int -E\ \overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{d\ell} = -\int E\ dr + cte$

2ème méthode : $\vec{E} = E\ \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\ dr + cte$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\displaystyle\int E_{int}\, dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.dr$ $V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = -\displaystyle\int E_{ext}\, dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.dr$ $V_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 –Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + K_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}(2+1) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$r < R$	$r > R$
$\boxed{V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$	$\boxed{V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L} \ldots$

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\varepsilon_0]} = \frac{[charge]L^2}{[\varepsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\varepsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$
Homogène - cohérent	

5. ❤ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

1 – Variable d'intégration

$$V = \int -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} + K = \int -E\ \overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{d\ell} + K = -\int E\ dz + K$$

En posant $\varepsilon = +1$ pour $z > 0$ et $\varepsilon = -1$ pour $z < 0$, $\vec{E} = \varepsilon\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z$

$$V(z) = -\int \varepsilon\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ dz + K = -\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + K$$

2 – Origine du potentiel

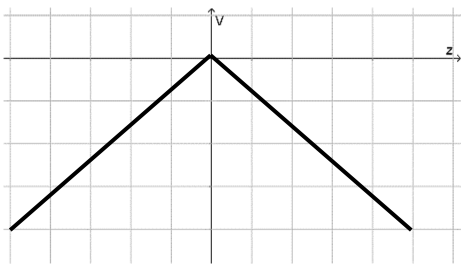
Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty) = O$. On prend l'origine en O.

$$V(0) = 0 = 0 + K \Rightarrow K = 0$$

$$\boxed{V = -\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}}$$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L} \ldots$: $[V] = \frac{[\sigma]L}{[\varepsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$ Cohérent

5 – Graphe $\boldsymbol{V(r)}$



6. ** Etablir l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme par intégration directe de l'équation de Maxwell-Gauss. On admettra par ailleurs la continuité du champ à la surface de la boule.

Donnée : Divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}$$

D'après les études de symétries et d'invariances de la distribution de charges, on peut montrer que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ soit $E_r = E(r)$, et $E_\theta = E_\varphi = 0$

Pour À l'extérieur de la boule chargée la densité volumique de charges est nulle, soit d'après l'équation de Maxwell-Gauss (M.G.) :

$div(\vec{E}) = \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0} = 0$ *or avec* $E_r = E(r)$, *et* $E_\theta = E_\varphi = 0$, *on a*

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(E_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta} \underbrace{=}_{E_\theta=E_\varphi=0} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \underbrace{=}_{M.G.} 0$$

donc $\frac{d(r^2E(r))}{dr} = 0$ *soit* $r^2E(r) = cte = K_1$ *et* $E(r > R) = \frac{K_1}{r^2}$

À l'intérieur : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ *donc*

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E(r))}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{d(r^2E(r))}{dr} = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow r^2E(r) = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + K_2$$

Par symétrie, on sait que $E(0) = 0$ donc $K_2 = 0$.

$$\boxed{E(r < R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

Finalement, par continuité du champ en $r = R$, $\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{K_1}{R^2}$ *soit* $K_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$

$$\boxed{E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

7. ❤ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.

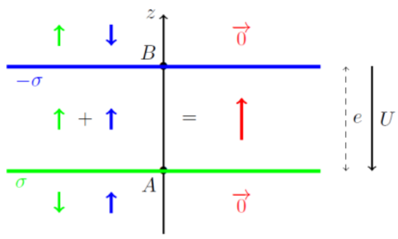
Expression à connaître, ou redonnée par l'examinateur : Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z}$ *et* $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z}$

Champ crée par l'armature 1 :

$$\vec{E_1} = \left|\begin{array}{ll} \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z} & si\ z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z} & si\ z < 0 \end{array}\right.$$

Champ crée par l'armature 2 :

$$\vec{E_2} = \left|\begin{array}{ll} -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z} & si\ z > e \\ \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{u_z} & si\ z < e \end{array}\right.$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$$\vec{E} = \left|\begin{array}{ll} \vec{0} & si\ z > e\ ou\ z < 0 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z} & si\ 0 < z < e \end{array}\right.$$

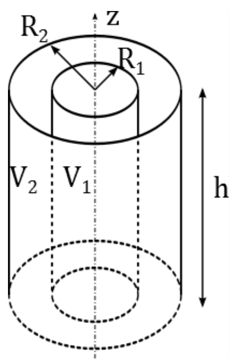
Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, *d'après les symétries, V ne dépend que de z :* $-\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dz}\vec{u_z}$

$$V = -\int E.dz + cte = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.dz + cte = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ *soit* $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma\,S\,\varepsilon_0}{\sigma\,e} = \frac{\varepsilon_0\,S}{e}$

8. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Par application du théorème de Gauss entre les armatures du condensateur (détailler les étapes)

symétries et invariances : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$*, surface de Gauss cylindre de rayon* r *de hauteur h,*

flux $\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = 2\pi r h E(r)$*, charge intérieure* Q*, d'où*

$\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r$ *entre les armatures*

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h} dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\, ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ *soit* $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Validation : $[C] = [\varepsilon_0]\, L$ *et* $C > 0$

***Capacité linéique** ou capacité par unité de longueur* $\Gamma = \frac{C}{h}$ *:* $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$