TD CHAPITRE EM.3 : MAGNETOSTATIQUE

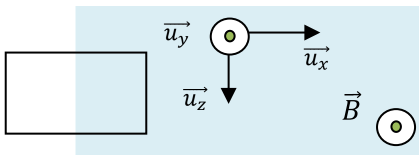
CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Pour exprimer la résultante des forces de Laplace, il est impératif de commencer par orienter le circuit en orientant l'intensité du courant.
2. Pour le calcul de la force élémentaire de Laplace, il est impératif de représenter les trois vecteurs sur une figure afin d'obtenir le sens de $d\vec{f}$, ce qui oblige à choisir sur la figure une orientation pour i (dans les calculs, i reste algébrique). On calcule ensuite soit la résultante (pour un mouvement de translation). Attention à l'orientation de la base orthonormée, qui doit être directe !
3. Le sens de la force de Laplace ne dépend évidemment pas du choix de l'orientation positive de i.
4. Il faut savoir prévoir le sens du champ magnétique créé à l'aide de la règle de la main droite (ou du tire-bouchon), notamment afin de pouvoir vérifier les résultats obtenus par le calcul.
5. Les conséquences des plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courant sur le champ magnétique sont opposées à celles sur le champ électrique.
6. Afin de déterminer les caractéristiques d'un champ magnétique en un point M, il faut impérativement utiliser des plans de symétrie et d'antisymétrie passant par ce point M.
7. Dans l'application du théorème d'Ampère, il faut choisir un contour d'Ampère passant par le point M étudié, et permettant un calcul simple de la circulation du champ B.
8. Lorsque le contour d'Ampère entoure un solénoïde, il faut bien penser à faire apparaître les N spires du solénoïde dans l'expression de l'intensité enlacée.
9. Le flux magnétique est une grandeur scalaire algébrique (et non forcément positive !)
10. N'oubliez pas de tenir compte du nombre de spires des circuits dans les calculs de flux !

APPLICATIONS DE COURS

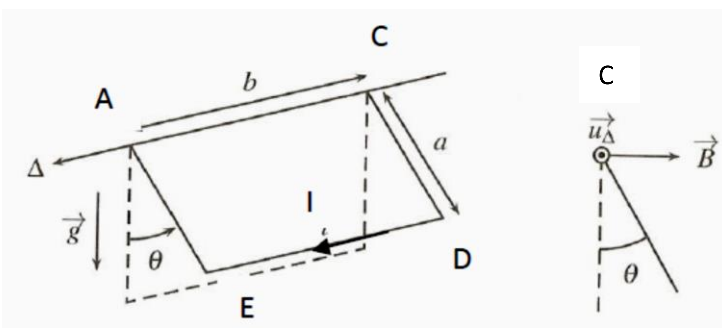
Exercice 1. Cadre rectangulaire dans un champ magnétique uniforme IMPORTANT | 1 | 2

Considérons le circuit rectangulaire ACDE ci-contre parcouru par un courant d'intensité i quelconque dont seule une partie serait plongée dans le champ magnétique uniforme, la partie gauche étant dans une zone vide de champ. Etablir l'expression de la résultante des forces de Laplace sur ce système.



Exercice 2. Actions magnétiques sur un cadre rectangulaire oscillant IMPORTANT | 1 | 2

Un cadre rectangulaire ACDE ($AC = b$ et $CD = a$) de masse m est parcouru par un courant d'intensité I constante. Il peut tourner autour de l'un de ses côtés, AC, horizontal : axe $Oz = \Delta$.



Son orientation est repérée par l'angle θ.

1) Il subit l'action d'un champ magnétique uniforme, $\vec{B}$ horizontal orienté selon $\vec{u_y}$. Déterminer l'angle correspondant à sa position d'équilibre.

2) Le cadre subit maintenant l'action d'un champ magnétique vertical dirigé vers le haut. Déterminer la nouvelle position d'équilibre.

Exercice 3. Symétries et antisymétries d'une distribution de courant, champ $\vec{B}$ *(E. Thibierge)* IMPORTANT | 2 | 1

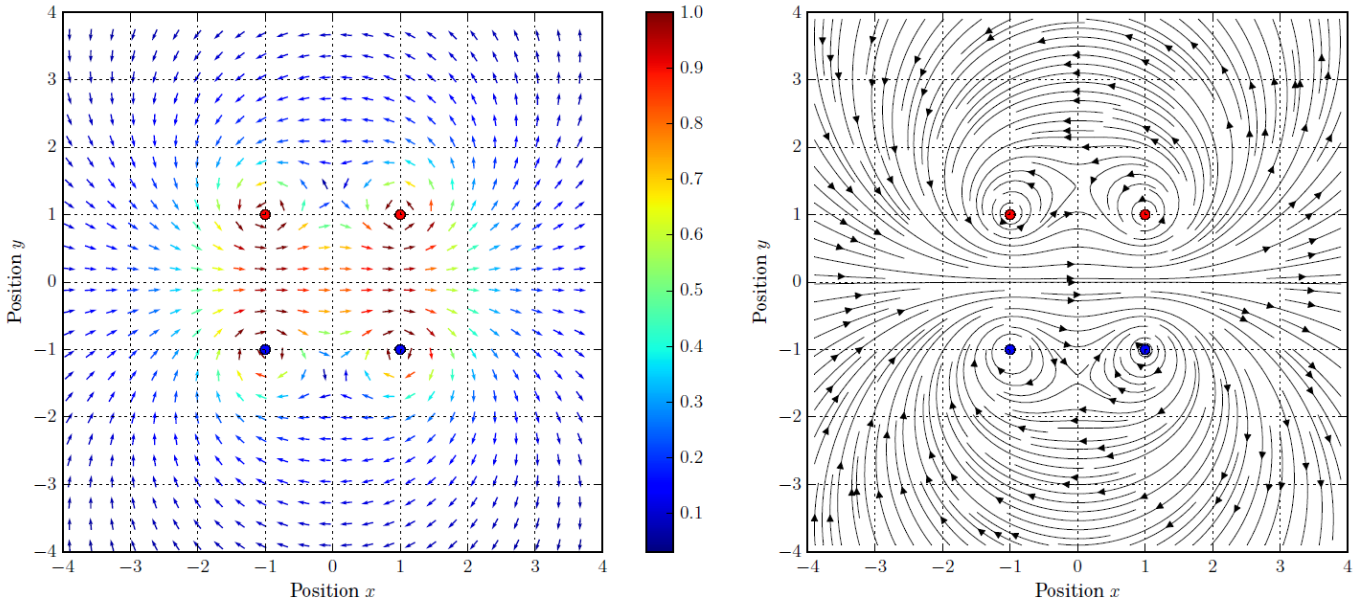


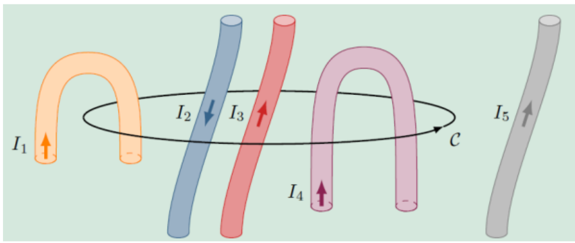
Figure : champ magnétique créé par une distribution de quatre courant égaux. *Les points représentent des courant portés par des fils rectilignes orthogonaux à la feuille ; toutes les valeurs ont été normalisées (E. Thibierge)*

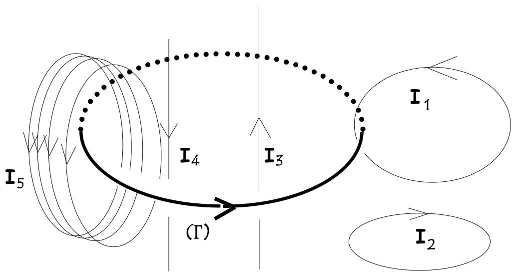
Déterminer les sens des courants ; identifier les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie et indiquer les caractéristiques du champ magnétique par rapport à ces plans, en particulier pour des points de ces plans.

Exercice 4. Calcul de courant enlacé 1

Quel est le courant enlacé par les contours ?

1) Le champ magnétique est créé par les 5 fils ci-contre :





2) Le champ magnétique est créé par :

- deux spires parcourues par I_1 et I_2
- deux fils parcourus par I_3 et I_4
- une bobine (N spires) parcourue par I_5

Exercice 5. Champ magnétostatique créé par un fil infini IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

Calculer en tout point de l'espace le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini (Oz) parcouru par un courant d'intensité I. Représenter l'allure des lignes de champ.

Exercice 6. Champ magnétostatique créé par un cylindre (fil épais) parcouru par un courant volumique IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur.

1) Exprimer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ en fonction de I et a.

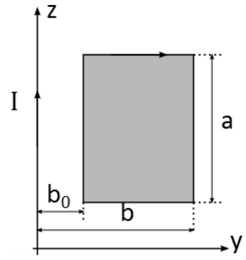
2) Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Exercice 7. Champ créé par un solénoïde « infini » parcouru par I IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul.

Montrer que le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme, et représenter l'allure des lignes de champ.

Exercice 8. Flux du champ créé par un fil infini IMPORTANT | 1 | 2



Un fil infini $(z'z)$ est parcouru par un courant I. Un cadre rectangulaire orienté est disposé dans le plan yOz.

Calculer le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre en fonction de μ_0, I, a, b et b_0.

Exercice 9. Champ magnétique au voisinage d'une spire (J. Kieffer) 2 | 2 ou 3

Soit une spire de rayon R et de centre O parcourue par un courant I. On admet que le champ magnétique $\vec{B}$ crée sur l'axe (Oz) de cette spire s'écrit :

$$\vec{B} = B(z)\vec{e}_z \qquad \text{avec} \qquad B(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = f(z)$$

1- Montrer par des considérations de symétrie que $\vec{B}$ s'écrit en un point quelconque en dehors de l'axe :

$$\vec{B} = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_z(r,z)\vec{e}_z$$

2- Toujours par des considérations de symétrie, discuter la parité des fonctions B_r et B_z. En déduire qu'on peut écrire

$$B_z(r,z) = f_0(z) + r^2 f_2(z) + r^4 f_4(z)$$

$$B_r(r,z) = r g_1(z) + r^3 g_3(z) + r^5 g_5(z)$$

3- On cherche à évaluer les champ au premier ordre non nul en r. En exploitant le théorème de Maxwell-flux sur une surface correctement choisie, en déduire la fonction g_1.

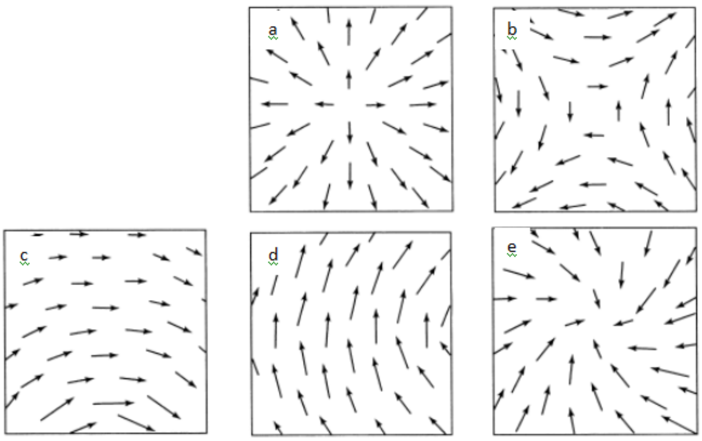
Exercices

Révisions de 1ère année : cartes de champ et actions de Laplace

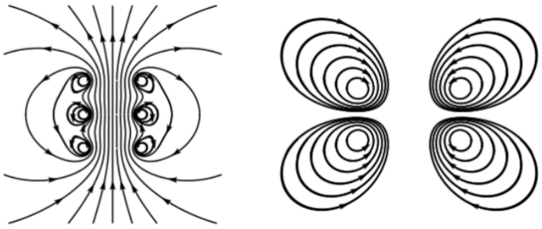
Exercice 10. Etude de cartes de champ 1

1) Quelles sont, parmi les configurations ci-dessous (cartes de a à e, à gauche), celles qui peuvent représenter un champ magnétostatique ?

   Où pourraient être les courants correspondants ? Le champ est supposé invariant par translation dans la direction perpendiculaire à la page.

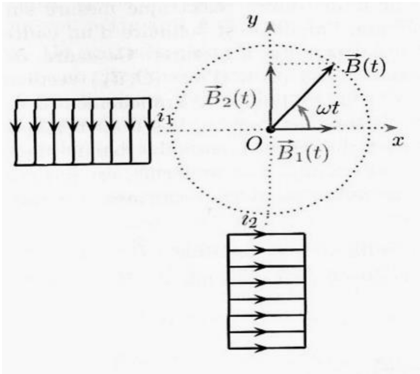


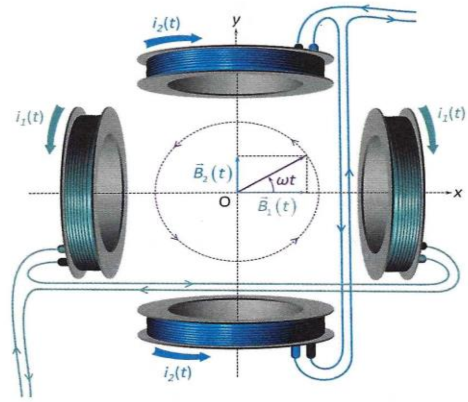
2) Dans les deux cartes de champ magnétique ci-contre, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant sort-il du plan de la figure ou y rentre-t-il ?



Exercice 11. Champ tournant 2 | 1

Les moteurs électriques utilisent des champs magnétiques tournants, que nous nous proposons d'étudier dans cet exercice. On cherche à obtenir un champ magnétique uniforme, on utilise donc des bobines de Helmholtz. La solution la plus simple consiste à utiliser 2 fois 2 bobines, alimentées par des courants en quadrature.

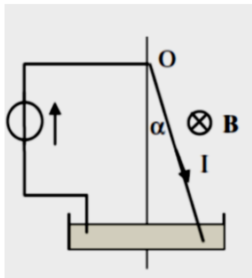




Le champ magnétique étant proportionnel aux courants alimentant les bobines, on utilise des courants variables dans le temps.

1) Donner l'expression vectorielle d'un champ magnétique d'un solénoïde infini parcouru par un courant sinusoïdal $i(t)$ en un point de son axe. Quelles caractéristiques du champ varient au cours du temps ?
2) On utilise 2 bobines identiques parcourues par des courants sinusoïdaux de même amplitude et de même fréquence, déphasés de $\frac{\pi}{2}$. On dispose les bobines à angle droit et à même distance de P, le point d'intersection des deux axes. Déterminer le champ magnétique en P. Commenter l'intérêt d'un tel dispositif.

Exercice 12. Pendule magnétostatique 1 ou 2 | 1



On étudie un conducteur filiforme rigide et homogène de longueur L, de masse m, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire au fil à son extrémité O. L'autre extrémité affleure dans du mercure contenu dans une cuve, et l'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire au plan de la figure. Un courant I traverse le fil.

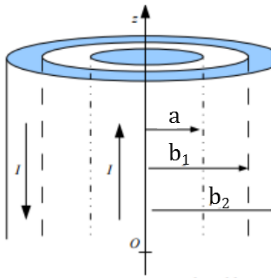
1) Exprimer l'angle d'inclinaison $\alpha_{éq}$ du fil à l'équilibre.
2) Que se passe-t-il si l'on modifie les sens de I et/ou du champ magnétique ?

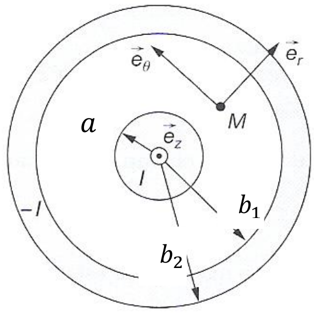
Calculs de champs magnétiques - Théorème d'Ampère

Exercice 13. Câble coaxial infini IMPORTANT | 2 | 2

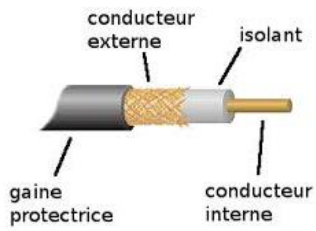
Le câble coaxial est composé de deux conducteurs de même axe ; ce type de câble est utilisé pour la transmission entre deux points (généralement distants de quelques dizaines de cm à quelques m) de signaux numériques ou analogiques à haute ou basse fréquence, en particulier dans les domaines audio et vidéo. L'invention en est attribuée à Oliver Heaviside (breveté en 1880). L'américain Herman Affel a développé le câble coaxial moderne, dont le brevet a été accepté en 1931

On se propose d'étudier le champ magnétostatique créé par un câble coaxial, qui permettrait de déterminer l'inductance linéique (et donc l'impédance associée au câble coaxial).





On considère un câble coaxial rectiligne et de longueur supposée infinie dans le problème. Ce câble est constitué d'une âme centrale en cuivre, correspondant à un conducteur plein de rayon a, et d'un conducteur cylindrique périphérique évidé, en cuivre également, de rayon intérieur b_1 et de rayon extérieur b_2. Les deux conducteurs sont séparés par un matériau diélectrique (sans propriété magnétique) assimilable au vide. On suppose ce câble parcouru par un courant continu constant I pour le conducteur central et $-I$ pour le blindage. Les densités volumiques de courant sont supposées uniformes dans les conducteurs.



1) Calculer les densités volumiques de courant dans les conducteurs intérieur et extérieur.
2) Calculer le champ magnétostatique créé par la distribution de courant en tout point de l'espace en utilisant soigneusement le théorème d'Ampère.
3) Dessiner l'allure de $B(r)$.
4) Déterminer l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ stockée dans un tronçon de câble de longueur h.
5) En déduire l'inductance L par unité de longueur du câble.

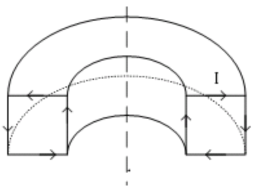
Exercice 14. Nappe de courant volumique 💡 2 | ⚒ 2

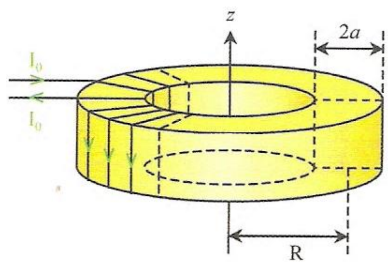
On considère une couche plane infinie, contenue entre les plans $z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$, de courant volumique uniforme $\vec{j} = j\,\vec{e}_x$.

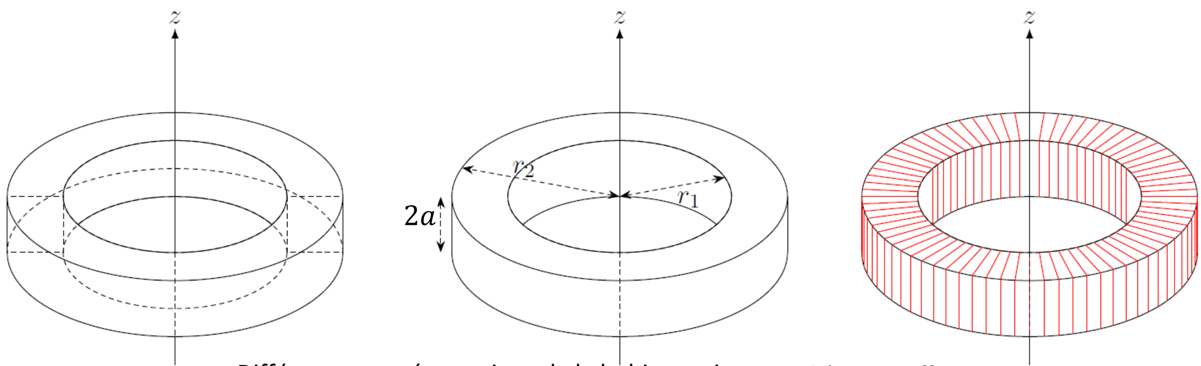
Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Exercice 15. Champ magnétostatique créé par une bobine torique IMPORTANT 💡 3 | ⚒ 2

Une bobine torique est obtenue en enroulant un fil conducteur autour d'un tore de révolution de section carrée. Les bobines toriques, peu volumineuses, sont très largement utilisées dans les cartes électroniques pour leurs propriétés magnétostatiques : un courant variable sera responsable de phénomène d'auto-induction, permettant à ces bobines de lisser le courant, ce qui les rend très utiles dans les alimentations à découpage permettant ainsi de simuler des générateurs de courant continu.







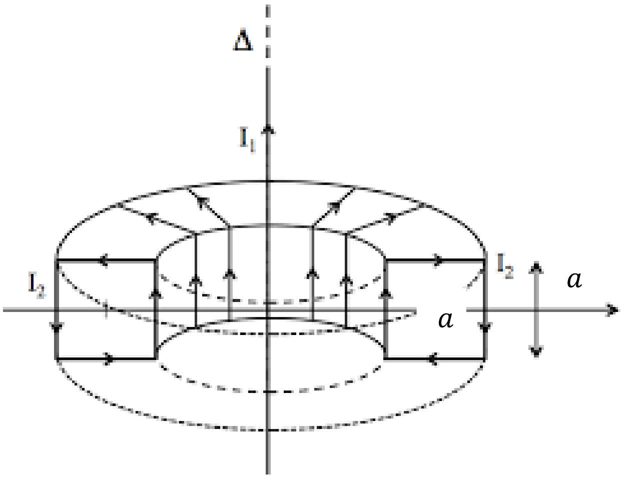
Différentes représentations de la bobine torique – *Schéma J. Kieffer*

La bobine comporte N spires assimilables à des boucles carrées de courant de côté $2a$ parcourues par un courant d'intensité I_0

1) Déterminer le module du champ magnétostatique en un point quelconque de l'espace en appliquant le théorème d'Ampère.
2) Exprimer le flux ϕ_1 du champ magnétostatique à travers une spire du circuit, puis à travers le bobinage complet (noté alors ϕ_N).
3) On définit l'inductance L d'une bobine par la relation $\phi_N = LI_0$. Exprimer L.

Exercice 16. Pince ampèremétrique

IMPORTANT | 2 | 2



On modélise une pince ampèremétrique par un tore d'axe $(O, \vec{e}_z)$ à section carrée de rayon intérieur a et de rayon extérieur $2a$, autour duquel est enroulé N fois un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité I_2.

On place un fil conducteur rectiligne le long de l'axe $(O, \vec{e}_z)$; il est parcouru par un courant d'intensité I_1.

Etablir l'expression du champ magnétique engendré en un point M de l'espace et décrire les lignes de champ.

Exercice 17. Cylindre parcouru par un courant inhomogène

IMPORTANT | 1 | 2

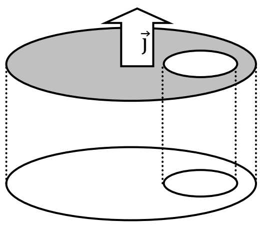
On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble, $\vec{j}(r) \ = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\overrightarrow{e_z}$.

3) Exprimer J_0 en fonction de I.
4) Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
5) Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

Exercice 18. Cavité cylindrique (Oral ATS, 2021, Oral Banque PT)

2 | 3



Soit un cylindre infini plein, de rayon R, d'axe (O_2z) parcouru par un courant de densité $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme.

On perce ce cylindre d'une cavité cylindrique d'axe (O_2z) (décentré par rapport à l'axe du cylindre d'origine) et de rayon R_2, et on suppose que la distribution volumique de courant en dehors de la cavité reste inchangée.

Déterminer le champ magnétostatique en tout point de la cavité.

Exercice 19. Modèle de Bean d'un supraconducteur *(E. Thibierge)*

2 | 2

Un supraconducteur est un matériau capable de conduire l'électricité sans aucune résistance lorsqu'il est porté à température suffisamment faible. Les applications incluent la transmission d'énergie sans perte, la création d'aimants puissants pour l'IRM médicale, la lévitation magnétique des trains à grande vitesse, ou encore la conception de détecteurs sensibles de champs magnétiques.

Parmi les nombreuses propriétés physiques associées à la supraconductivité figure l'effet Meissner : qualitativement, le champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur est toujours nul, quel que soit le champ extérieur. Cet effet peut s'interpréter par l'apparition de courants à la surface du supraconducteur, qui créent un champ venant compenser le champ extérieur. Le modèle de Bean suppose ces courants répartis en volume dans une couche d'épaisseur δ, avec une densité volumique J_c uniforme, appelée densité de courant critique, qui est une caractéristique de chaque matériau. Dans ce modèle, c'est l'épaisseur δ qui varie en fonction de l'intensité du champ extérieur.

Cet exercice a pour objectif d'estimer l'épaisseur δ dans une géométrie de type ruban, où l'une des dimensions du supraconducteur est très inférieure aux deux autres, voir figure 2 : on suppose l'échantillon infini dans les directions (Oy) et (Oz), d'épaisseur $2a$ dans la direction (Ox), placé dans un champ extérieur $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_y}$. Une telle géométrie est très utilisée en pratique car elle facilite la fabrication et la manipulation des échantillons.

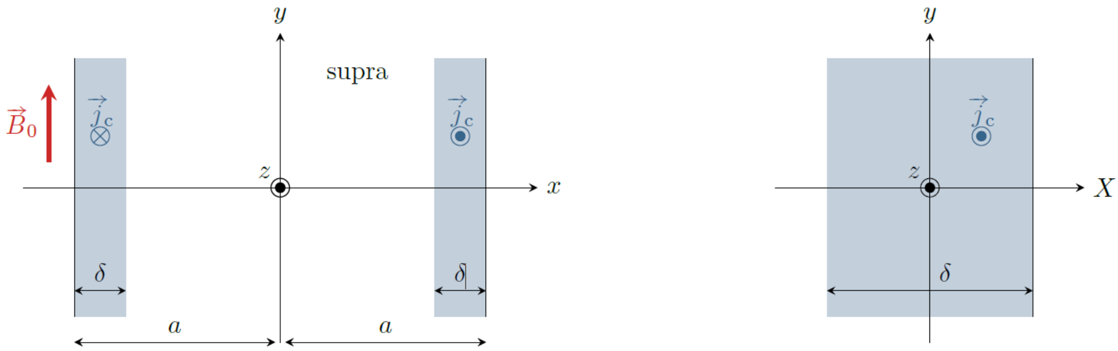


Figure 2 – Modèle de Bean d'un supraconducteur. Gauche : vue d'ensemble du ruban supraconducteur. Droite : zoom sur la couche conductrice de droite.

1 - Dans un premier temps, considérons uniquement la couche conductrice située du côté $x > 0$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = J_c\overrightarrow{e_z}$. La variable X est définie de telle sorte que la position $X = 0$ corresponde au milieu de la couche conductrice. Déterminer les caractéristiques du champ magnétique créé par cette couche (direction(s) et variable(s) dont il dépend).

2 - Montrer sans calcul que ce champ est nécessairement nul dans le plan $X = 0$.

3 - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, en déduire le champ créé dans tout l'espace par cette couche conductrice uniquement.

4 - En prenant désormais en compte l'ensemble du système, déterminer l'épaisseur δ nécessaire pour que le champ magnétique soit nul à l'intérieur du supraconducteur.

5 - Représenter graphiquement $\|\vec{B}\|$ en fonction de x pour l'ensemble de l'échantillon.

Exercice 20. Cylindre chargé en rotation

Une tige cylindrique d'axe Oz, de longueur ℓ et de rayon a est uniformément chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme. La tige est en rotation uniforme avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ constante autour de son axe dans le référentiel du laboratoire.

Déterminer le champ magnétique crée par la tige en tout point de l'espace en négligeant les effets de bords (différentes méthodes possibles).

Flux du champ magnétique

Exercice 21. Champ magnétostatique uniforme 2 | 3

Établir, à l'aide des équations locales de la magnétostatique, que si les lignes de champ magnétostatique sont des droites parallèles dans une région vide de courant, alors $\vec{B}$ est uniforme.