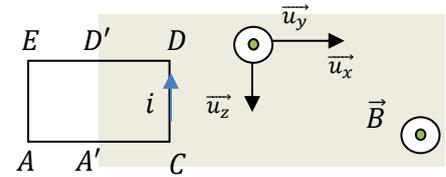


TD CHAPITRE EM.3 : MAGNETOSTATIQUE – ELEMENTS DE CORRECTION

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Résultante des forces de Laplace

On prendra comme origine de l'axe (Ox) le début de la zone où règne le champ magnétique.



Premières étapes : 1) orienter i 2) Orienter S : $d\vec{S} = dS \vec{u}_y$

Force de Laplace $\vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DE} + \vec{F}_{EA}$ avec

$\vec{F}_{AC} = i \vec{AC} \wedge \vec{B}$ etc., en parcourant bien le cadre dans le sens de i

En étudiant le cadre côté par côté : le côté gauche du cadre (AE) n'étant pas encore situé dans la zone de champ magnétique, $\vec{B} = \vec{0}$ donc la force de Laplace s'exerçant sur lui est nulle : $\vec{F}_{EA} = \vec{0}$. De même, $\vec{F}_{D'E} = \vec{0} = \vec{F}_{AA'}$.

Force de Laplace sur le côté bas du cadre :

$$\vec{F}_{AC} = \vec{F}_{AA'} + \vec{F}_{A'C} = \vec{0} + i \vec{A'C} \wedge \vec{B} = ix \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_y = ix B \vec{u}_z$$

Force de Laplace sur le côté haut du cadre :

$$\vec{F}_{DE} = \vec{F}_{DD'} + \vec{F}_{D'E} = i \vec{DD'} \wedge \vec{B} + \vec{0} = -ix \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_y = -ix B \vec{u}_z$$

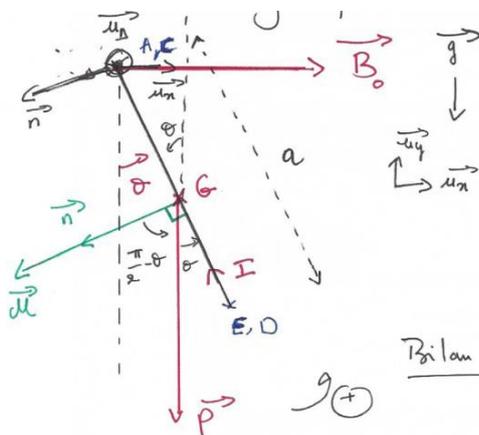
Les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés haut et bas se compensent donc : $\vec{F}_{A'C} + \vec{F}_{DD'} = \vec{0}$;

Il reste donc la force de Laplace s'exerçant sur le côté droit (CD) du cadre. Avec l'orientation choisie pour i , il faut intégrer en allant de C à D, soit en parcourant la verticale selon $-\vec{u}_z$:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{CD} = \int_0^l i dz (-\vec{u}_z) \wedge B \vec{u}_y = i l B \vec{u}_x$$

Ou $\vec{F}_L = \vec{F}_{CD} = i \vec{CD} \wedge B \vec{u}_y = iBl (-\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_y = i l B \vec{u}_x$

Exercice 2. Actions magnétiques sur un cadre rectangulaire oscillant



D'après l'orientation de I , cf schéma : moment magnétique du cadre

$$\vec{M} = I S \vec{n} = I ab \vec{n}$$

Système : cadre, étudié dans $R_{O,k}$

Bilan des actions : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Poids } \vec{P} \\ \vec{F}_{\text{Laplace}} \\ \text{liaison pivot idéale} \end{array} \right.$

A l'équilibre, d'après le TMC, à $\Delta(A; \vec{u}_0)$ appliqué au cadre dans R

$$\Gamma_{\Delta, \text{pivot}} + \Gamma_{\Delta}(\vec{P}) + \Gamma_{\Delta}(\vec{F}_{\text{Lap}}) = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\Delta, \text{pivot}} = 0 \quad (\text{+ liaison pivot idéale})$$

$$\text{or} \quad \Gamma_{\Delta}(\vec{F}_{\text{Lap}}) = (\vec{M} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_0 = I ab B_0 (\vec{n} \wedge \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_0 = I ab B_0 \sin(\pi - \theta)$$

$$\text{et } \Gamma_0(\vec{P}) = -P \times \text{bras de levier} = -\frac{mg a}{2} \sin \theta$$

$$\text{Finalement : } I b B_0 \sin \theta = \frac{mg a}{2} \sin \theta_{\text{eq}} \Leftrightarrow$$

$$\left(I b B_0 - \frac{mg}{2} \right) \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \quad (\text{vrai } \forall b, I, B_0, m)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \theta_{\text{eq}} = 0 \text{ [} \pi \text{]}$$

$$2 \text{ positions d'équilibre : } \theta_{\text{eq}1} = 0 \text{ [} 2\pi \text{]} \text{ et } \theta_{\text{eq}2} = \pi \text{ [} 2\pi \text{]}$$

(les stabilités dépendent des valeurs relatives de $I b B_0$ et $\frac{mg}{2}$)

2) Si on modifie le sens de I , on inverse le sens du moment des forces de Laplace ; la tige est donc alors inclinée vers la gauche. Idem si on modifie le sens de B , on inverse le sens du moment des forces de Laplace ; tige inclinée vers la gauche.

Si on modifie le sens de I et celui de B , on travaille avec I et B négatifs, dont les signes vont se compenser dans l'expression du moment, qui ne sera donc pas modifié : la tige reste alors inclinée vers la droite.

Exercice 3. Plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant, champ magnétique

Selon la règle de la main droite, étant donné le sens des lignes de champ magnétique, le courant sort du plan de la feuille pour les deux fils du haut, et rentre dans le plan de la feuille pour les deux fils du bas.

Le plan $x = 0$ constitue donc un plan de symétrie de la distribution de courant ; on peut par ailleurs constater qu'il constitue un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique, qui est orthogonal à ce plan pour tout point M du plan.

A l'inverse, le plan $y = 0$ constitue un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant tandis qu'il constitue un plan de symétrie pour le champ magnétique, qui appartient à ce plan pour tout point M du plan.

Exercice 4. Calcul de courant enlacé

$$1) I_{\text{enlacé}} = (-I_1 - I_2 + I_3 + I_4)$$

$$2) I_{\text{enlacé}} = (-I_1 + I_3 - I_4 + N I_5)$$

Exercice 5. Champ magnétostatique créé par un fil infini

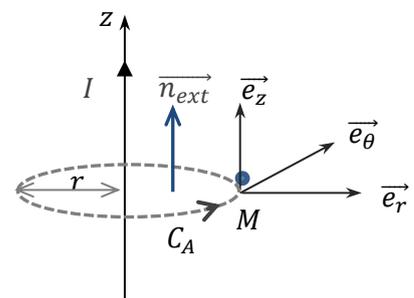
On considère un fil infini (épaisseur nulle) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité I . On définit H le projeté sur le fil chargé du point M étudié.

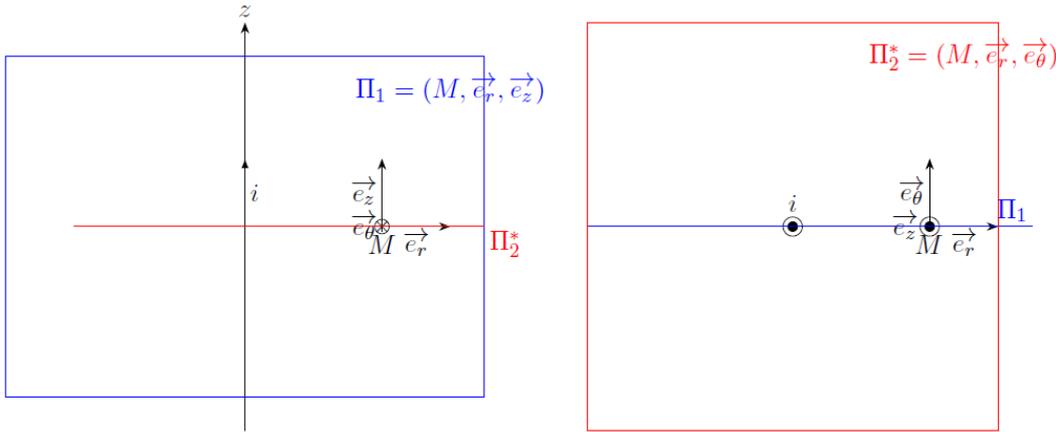
Le point M étudié (ou point de calcul) est repéré en **coordonnées cylindriques** d'axe le fil : $M(r, \theta, z)$, avec $r = HM$; M hors du fil : $r \neq 0$.

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du fil rectiligne infini.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries : Soit M un point quelconque en dehors du fil ($z \neq 0$) ; plan $\Pi_1(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.





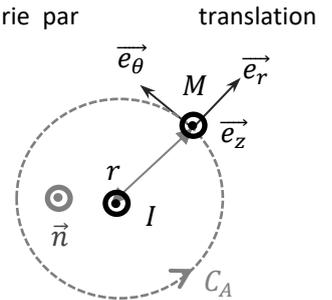
Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de B selon le principe de Curie par selon (Oz) et par rotation selon θ .

On a donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta = B(r)\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(r)} B(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(r)} B(r)r d\theta = 2\pi r B(r)$$



Courant enlacé par le contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz) , et de sens défini par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$. On a donc $I_{enlacé} = I$

Théorème d'Ampère :

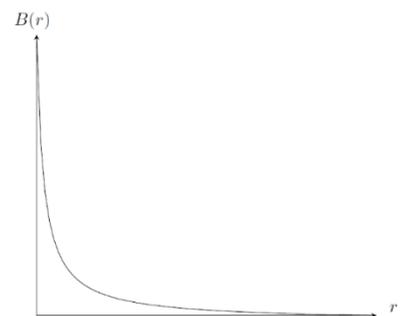
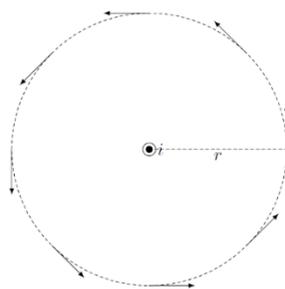
$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$$

Soit $2\pi r B(r) = \mu_0 I$ et $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$;

Finalement (Résultat à retenir)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Les lignes de champs sont des cercles d'axe le fil orientées dans le sens trigo si I suivant $+z$.



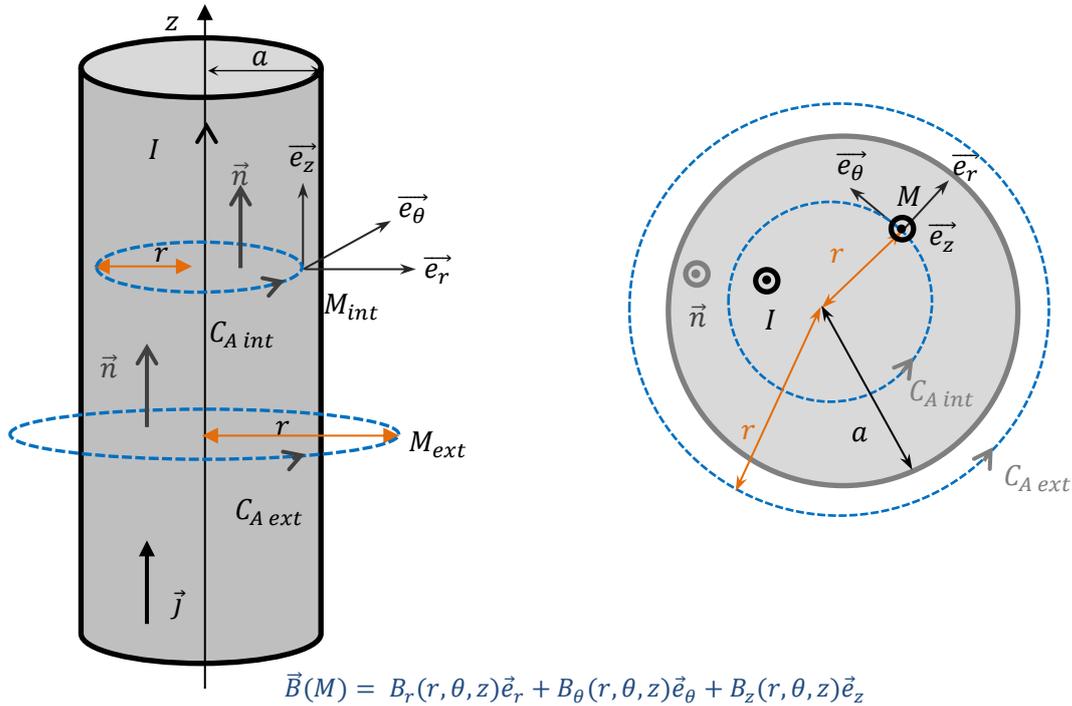
Remarque : On constate que lorsque r tend vers 0, le champ diverge. Comme en électrostatique, cela est lié au fait de regarder de "trop près" une distribution singulière (de courant ici) : la description linéique n'est alors plus adaptée, et il faut revenir à une description volumique pour une description réaliste du champ magnétique à proximité du fil.

Exercice 6. Champ magnétostatique créé par un cylindre avec courant volumique IMPORTANT | 2 | 2

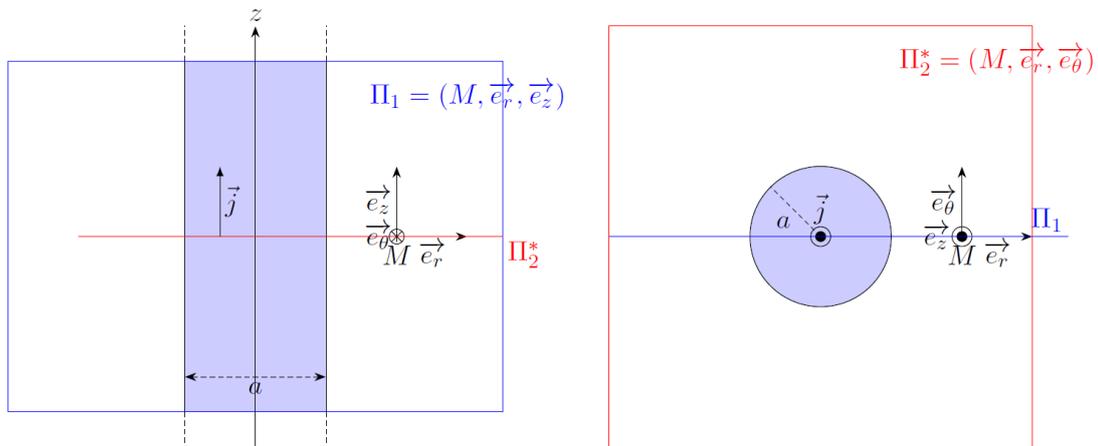
1) Considérons une section circulaire (Σ) de rayon a passant par le point M . Vecteur densité de courant \vec{j} en un point M donné situé à l'intérieur du cylindre tel que $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Le courant étant uniformément réparti dans toute section du conducteur, \vec{j} est uniforme sur (Σ) ; de plus I donc \vec{j} et $d\vec{S}$ orientés selon (Oz) : vecteurs colinéaires (\vec{j} uniforme sur une section droite). On a donc $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$

2) Détermination du champ magnétique

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) ascendant l'axe du cylindre infini.



Symétries : Soit M un point quelconque de rayon r ; plan $\Pi_1(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ (plan de la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$.



Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de $B_\theta(r, \theta, z)$ selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation selon θ .

On a donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta = B(r)\vec{e}_\theta$

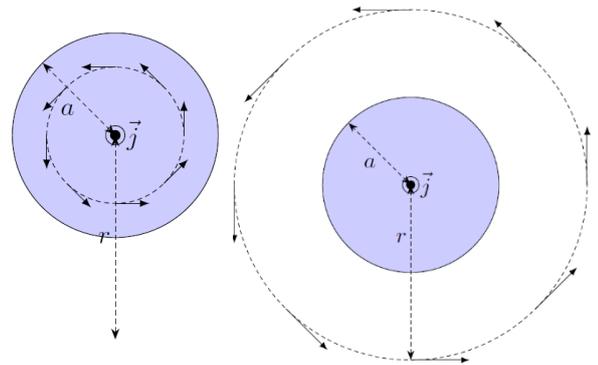
Contour d'Ampère : Cercle de centre un point de l'axe (Oz) de rayon r , passant par le point M étudié, orienté dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(r)} B(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(r)} B(r)r d\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé par le contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au disque de contour le cercle de rayon r , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} de direction \perp au disque, soit selon (Oz) , et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $+\vec{e}_z$.



si $r \geq a$, $I_{enlacé} = I$

si $r \leq a$, $I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot \vec{dS} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{a^2}$

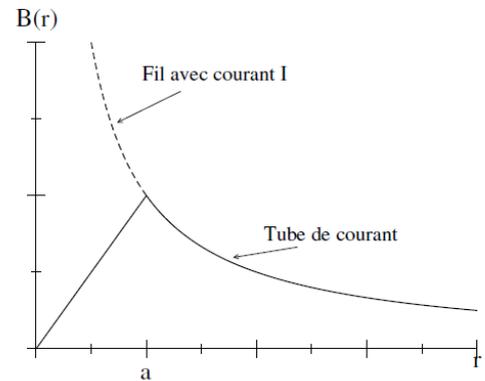
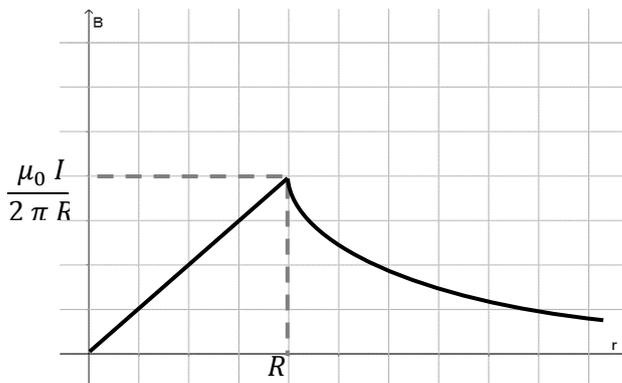
Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé} = 2\pi r B(r)$$

Soit $B(r) = \frac{\mu_0 I_{enlacé}}{2\pi r}$

si $r \leq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{e}_\theta$; si $r \geq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

Graphes $B(r)$

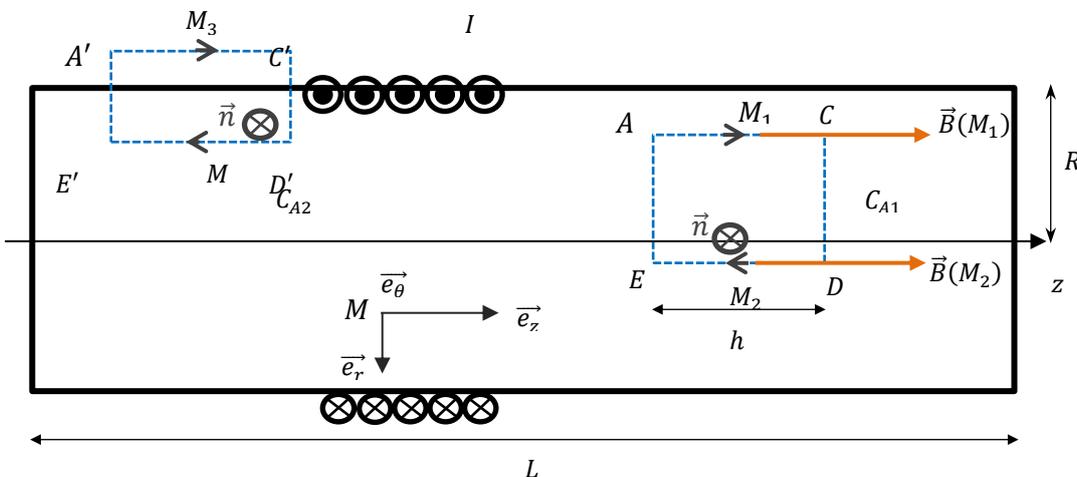


Le champ est continu puisqu'il s'agit d'une distribution volumique de courant.

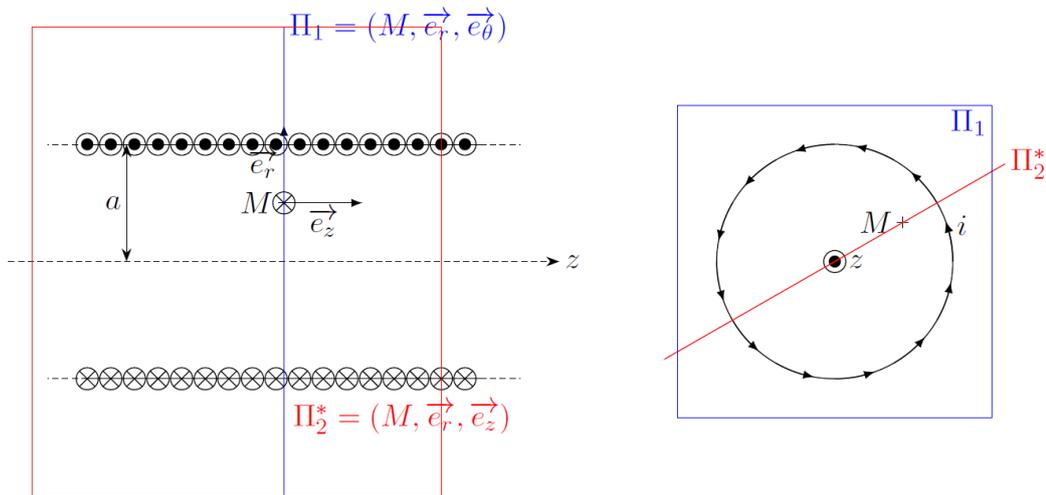
Exercice 7. Champ créé par un solénoïde « infini » parcouru par un courant I

Coordonnées : cylindriques, d'axe (Oz) l'axe du cylindre infini, dirigé de la gauche vers la droite.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$



Symétries : Soit M un point quelconque à la distance r de l'axe ; plan $\Pi_1(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$ (plan perpendiculaire à la feuille) plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B} \perp \Pi_1$, soit \vec{B} dirigé selon \vec{e}_z : $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$.

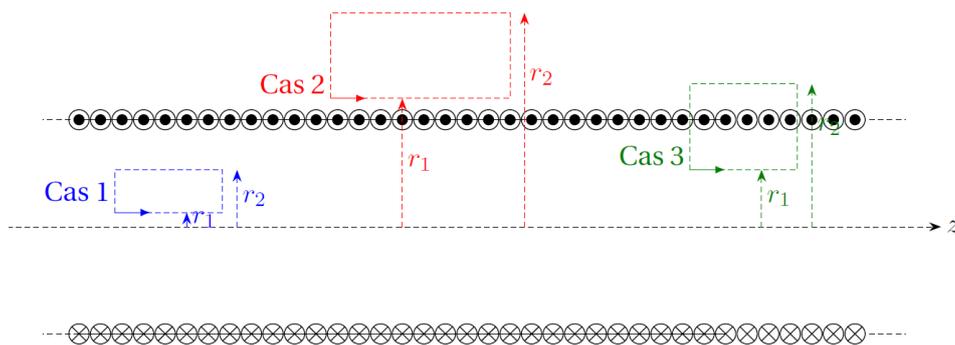


Invariances : Invariance de la distribution de courant donc de \vec{B} selon le principe de Curie par translation selon (Oz) et par rotation selon θ .

On a donc $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z = B(r)\vec{e}_z$

L'étude se fera en deux étapes avec l'application successive du théorème d'Ampère sur deux contours d'Ampère distincts.

Contour d'Ampère C_1 : cf. schéma : rectangle de longueur L passant par un point M_1 à la distance r_1 de l'axe et un point M_2 à la distance r_2 de l'axe orienté dans le sens ACDE.



Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Sur les portions verticales CD et EA, $d\vec{\ell} = \pm dl \vec{e}_r \perp \vec{B} = B(r) \vec{e}_z$ d'où

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

De plus,

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C B(r_1) \vec{e}_z \cdot dl \vec{e}_z = B(r_1)L$$

Et

$$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_D^E B(r_2) \vec{e}_z \cdot dl (-\vec{e}_z) = -B(r_2)L$$

Finalement,

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r_1)L - B(r_2)L = (B(r_1) - B(r_2))L$$

Courant enlacé par le contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au rectangle de contour C_1 , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} selon $(\pm \vec{e}_\theta)$, et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $-\vec{e}_\theta$.

Ici, $I_{enlacé} = 0$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé} = (B(r_1) - B(r_2))L = 0$$

Soit $B(r_1) = B(r_2) = B_{int} = cte$

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme.

Contour d'Ampère C_3 : cf. schéma : rectangle de longueur L passant par le point M étudié à la distance $r < R$ de l'axe (point à l'intérieur du solénoïde) et un point M_3 à la distance $r_3 > R$ de l'axe (point extérieur au solénoïde) orienté dans le sens A'C'D'E'.

Calcul de la circulation le long du contour d'Ampère :

$$\oint_{(C_2)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A'}^{C'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C'}^{D'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{D'}^{E'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{E'}^{A'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Sur les portions verticales C'D' et E'A', $d\vec{OM} = \pm dl \vec{e}_r \perp \vec{B} = B(r) \vec{e}_z$ d'où

$$\int_{C'}^{D'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{E'}^{A'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

De plus, selon l'énoncé, $B_{ext} = 0$, d'où :

$$\int_{A'}^{C'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A'}^{C'} B_{ext} \vec{e}_z \cdot dl \vec{e}_z = 0$$

Et

$$\int_{D'}^{E'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_D^E B(r) \vec{e}_z \cdot dl (-\vec{e}_z) = -B_{int}L$$

Finalement,

$$\oint_{(C_2)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -B_{int}L$$

Courant enlacé par le contour d'Ampère

Le contour d'Ampère tel qu'il est orienté définit une surface (Σ) correspondant au rectangle de contour C_2 , de vecteur normale à la surface \vec{n}_{ext} selon $(\pm \vec{e}_\theta)$, et de sens définit par la règle de la main droite, soit selon $-\vec{e}_\theta$.

Ici, l'intensité traversant cette surface selon $+\vec{e}_\theta$, $I_{enlacé} = -NI$ avec N le nombre de spires enlacées sur la longueur L du rectangle.

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C_2)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{entacé}} = -B_{\text{int}} L = -\mu_0 N I$$

Soit $B_{\text{int}} = cte = \frac{\mu_0 N I}{L}$ ou encore

$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_{\text{axe}}$ à l'intérieur du solénoïde, avec $n = \frac{N}{L}$ nombre de spires par unité de longueur.

Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

Le résultat mérite d'être mémorisé : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur du solénoïde

Allure des lignes de champ.

Exercice 8. Flux du champ créé par un fil infini

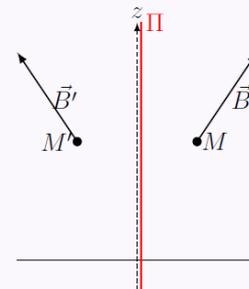
Champ créé par le fil infini : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{b_0}^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot a \, dr \vec{e}_\theta = \int_{b_0}^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a \, dr = + \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{b_0}\right)$$

Exercice 9. Champ à flux conservatif (corrigé J. Kieffer)

1. Les invariants par rotation permettent d'éliminer la dépendance en θ . Pour un point M hors de l'axe Oz le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan d'antisymétrie pour la spire donc le champ \vec{B} appartient à ce plan ce qui donne le résultat ... $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$

2. Un dessin valant mieux qu'un grand discours, faisons un dessin dans le plan contenant M et Oz ... Le plan Π étant un plan d'antisymétrie pour la spire, il constitue un champ de symétrie pour \vec{B} (qui est un pseudo vecteur). On a donc le champ qui se transforme de la manière ci-contre. On voit donc qu'on a



$$B_z(-r, z) = B_z(r, z) \quad \text{et} \quad B_r(-r, z) = -B_r(r, z)$$

donc B_z est une fonction paire et B_r une fonction impaire

En écrivant le développement limité en r des composantes, chaque développement ne contient donc que des termes paires (ou impaires) soit

$$B_z(r, z) = f_0(z) + f_2(z)r^2 + f_4(z)r^4$$

$$B_r(r, z) = g_1(z)r + g_3(z)r^3 + g_5(z)r^5$$

En faisant $r = 0$, on trouve bien entendu $f_0(z) = f(z)$...

2. On se restreint à l'ordre 1 donc on a $B_z \simeq f(z)$ et $B_r \simeq r g_1(z)$ en écrivant l'équation de Maxwell Thompson on trouve alors

$$\text{div } \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 2g_1 + f'(z) \Rightarrow g_1 = -\frac{f'}{2}$$

Il est à noter que ce développement perturbatif peut-être poursuivi pour trouver les ordres successifs. Ainsi à l'ordre 2, on a cette fois $B_z \simeq f(z) + r^2 f_2(z)$ et $B_r \simeq r g_1(z)$. En écrivant

Maxwell-Ampère, on trouve alors

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{sur } \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} = 0 \Rightarrow 2r f_2 + r g_1' = 0 \Rightarrow f_2 = -\frac{g_1'}{2} = \frac{f''}{4}$$

En écrivant successivement les termes d'ordre croissant et en alternant les deux équations, on peut ainsi trouver tout les termes ...

$$(n+1)g_n + f'_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad n f_n + g'_{n-1} = 0$$

EXERCICES

Modélisations de courants et cartes de champ magnétique

Exercice 10. Etude de cartes de champ 1

- 1) Cf. Equations de Maxwell : $\text{div } \vec{B} = 0$, les cartes a) et e) ne peuvent être des cartes de champs magnétostatiques.
 Pour la carte b), courants derrière les milieux de chacun des côtés, sortant de la figure pour le haut et le bas et rentrant dans la figure pour la droite et la gauche (cf. règle de ma main droite).
 Pour la carte c), courant s'enfonçant dans la figure, au niveau du milieu du côté du bas ;
 Carte d), courant s'enfonçant dans la figure, au niveau du milieu du côté de droite ;
- 2) Champ le plus intense là où les lignes de champ sont le plus serrées ; Courant sortant si la ligne de champ tourne dans le sens trigonométrique.

Exercice 11. Champ tournant 2 | ✖ 1

$$\vec{B}_1 = K i_1 \vec{u}_x \quad i_1 = I_0 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad i_2 = I_0 \cos(\omega t + \phi_2)$$

- 1) Pour exprimer le champ créé par la bobine 2 en O, on adapte l'expression du champ créé par la bobine 1 :

$$\vec{B}_2 = K i_2 \vec{u}_y .$$

- 2) **Champ magnétique total en O** : L'expression du champ magnétique total en O est obtenue en sommant vectoriellement les 2 champs.

$$\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = K i_1 \vec{u}_x + K i_2 \vec{u}_y = i_1 = K I_0 (\cos(\omega t + \phi_1) \vec{u}_x + \cos(\omega t + \phi_2) \vec{u}_y)$$

Pour que ce champ global soit tournant dans le sens trigonométrique par exemple, on peut poser

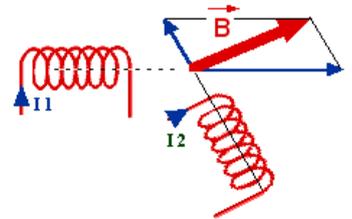
$$B_x = B_0 \cos \omega t \quad \text{et} \quad B_y = B_0 \sin \omega t = B_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), \text{ soit par identification}$$

$$\boxed{\phi_1 = 0 \text{ et } \phi_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ et } B_0 = K I_0}$$

Il faut donc que i_2 soit en quadrature retard par rapport à i_1 .

Ainsi l'angle que fait le champ magnétique total avec l'axe Ox est ωt .

Tout système aimanté de moment magnétique \vec{M} va s'aligner sur le champ et le suivre dans sa rotation. Il va donc tourner autour de l'axe Oz avec la vitesse angulaire ω qui est aussi la pulsation des courants alimentant les bobines.



Exercice 12. Pendule magnétostatique 1 ou 2 | ✖ 1

Etude de la tige OA, de masse m dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen.

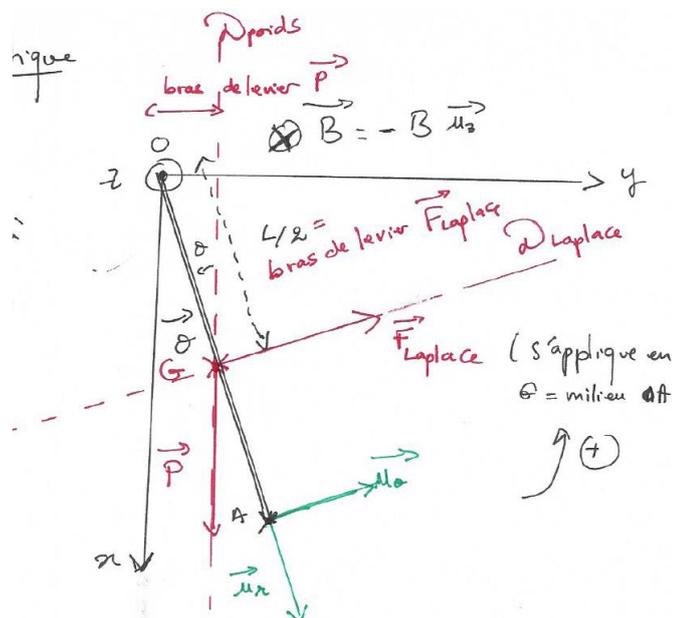
Base cylindrique d'étude ($\vec{u}_r = \frac{\vec{OA}}{L}, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_z$)

\vec{u}_α est perpendiculaire à la tige dans le plan de la figure et orienté dans le sens α croissant.

\vec{u}_z est perpendiculaire au plan de la figure et il vient vers « nous ».
 Ainsi $\vec{B} = -B \vec{u}_z$

La tige subit : son poids appliqué en G (milieu de la tige si elle est supposée homogène), la liaison pivot en O supposée idéale et la force de Laplace qui s'applique également en G : $\vec{F} = I \vec{OA} \wedge \vec{B}$

TMC scalaire appliqué à la tige selon l'axe fixe Oz dans un référentiel galiléen



$J\ddot{\alpha} = \mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{liaison}) + \mathcal{M}_z(\text{force de Laplace}) = 0$ à l'équilibre.

$\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0$ en supposant la liaison idéale.

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = (\overline{OG} \wedge \overline{P}). \overline{U}_z = \left[\frac{L}{2} \overline{u}_r \wedge (mg \cos \alpha \overline{u}_r - mg \sin \alpha \overline{u}_\alpha) \right]. \overline{U}_z = (-mg \frac{L}{2} \sin \alpha \overline{u}_\alpha). \overline{u}_z = -mg \frac{L}{2} \sin \alpha$$

Force de Laplace : $\vec{F}_{Lap} = I \overline{OA} \wedge \overline{B} = I L \overline{u}_r \wedge -B \overline{u}_z = -ILB (\overline{u}_r \wedge \overline{u}_z) = ILB \overline{u}_\alpha$

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_{Lap}) = [\overline{OG} \wedge \vec{F}_{Lap}]. \overline{u}_z = \left[\frac{L}{2} \overline{u}_r \wedge (ILB \overline{u}_\alpha) \right]. \overline{u}_z = \frac{IBL^2}{2} \overline{u}_z. \overline{u}_z = \frac{IBL^2}{2}$$

Ainsi l'angle d'inclinaison $\alpha_{\acute{e}q}$ du fil à l'équilibre est tel que $-mg \frac{L}{2} \sin \alpha_{\acute{e}q} + \frac{IBL^2}{2} = 0$

Donc $\boxed{\sin \alpha_{\acute{e}q} = \frac{ILB}{mg}}$

■ Calculs de champs magnétiques - Théorème d'Ampère

Exercice 13. Câble coaxial infini ⚠ IMPORTANT | 💡 2 | ✂ 2

1) $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS$, on obtient : $\vec{j}_{int} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z ; \vec{j}_{ext} = -\frac{I}{\pi (b_2^2 - b_1^2)} \vec{e}_z ;$

2) Les différentes caractéristiques sont similaires à celles du cylindre infini traversé par un courant volumique précédemment traité. On obtient donc à nouveau de la même manière $B(r) = \frac{\mu_0 I_{enlacé}}{2\pi r}$; seule l'intensité enlacée va varier selon les différents cas considérés.

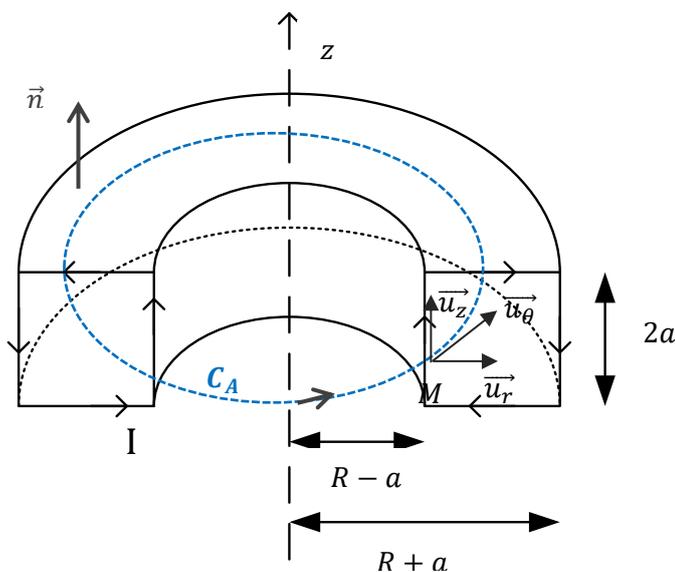
si $r \leq a$, situation correspondant au cylindre infini précédemment traité, $I_{enlacé} = j_{int} S = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$ soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{e}_\theta ;$

si $a \leq r \leq b_1$, alors $I_{enlacé} = j_{int} S = \frac{I}{\pi a^2} \pi a^2 = I$ soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta ;$

si $b_1 \leq r \leq b_2$, alors $I_{enlacé} = j_{int} S_{int} + j_{ext} S_{ext} = I - \frac{I}{\pi (b_2^2 - b_1^2)} (\pi r^2 - \pi b_1^2) = I \left(1 - \frac{(r^2 - b_1^2)}{(b_2^2 - b_1^2)} \right) = I \left(\frac{b_2^2 - r^2}{b_2^2 - b_1^2} \right)$ soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{b_2^2 - r^2}{b_2^2 - b_1^2} \vec{e}_\theta ;$

si $r \geq b_2$, alors $I_{enlacé} = 0$ soit $\vec{B} = \vec{0}$.

Exercice 14. Champ magnétostatique créé par une bobine torique 💡 2 ou 3 | ✂ 2



Coordonnées :

Axe du tore = axe de symétrie \Rightarrow choix des coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Symétries :

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courants D .

Or \vec{B} est perpendiculaire à ce plan

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta \quad (1)$$

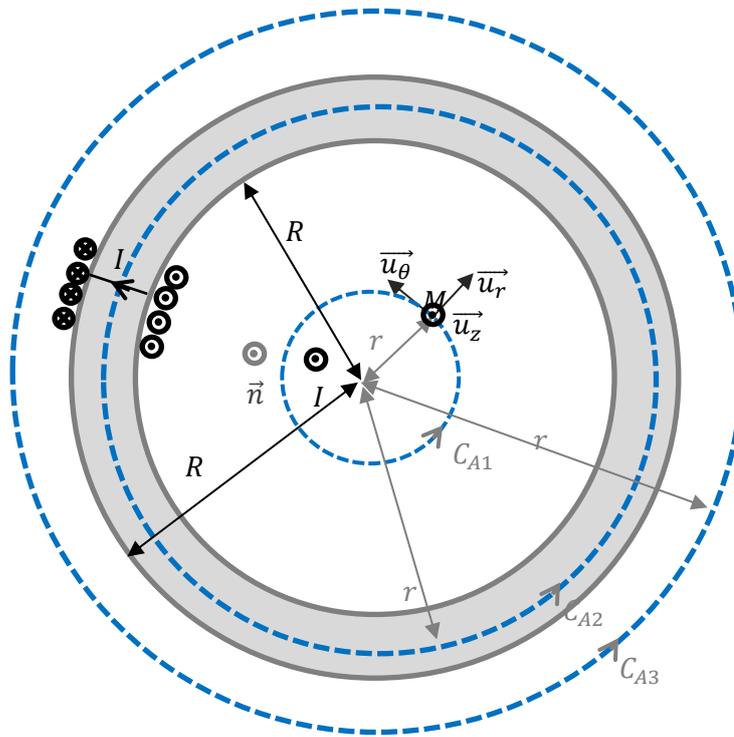
Invariances :

La distribution de courants D est invariante par rotation suivant θ :

$$I(r, \theta, z) = I(r, z) \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta \quad (2)$$

Contour d'Ampère C_A :

Puisque le champ est orthoradial, on choisit un cercle C_A **orienté**, confondu avec une ligne de champ, de rayon $r = OM$ passant par M .



Calcul de la circulation \mathcal{C} du champ magnétique :

$$\mathcal{C} = \oint_{C_A} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \stackrel{(1)}{=} \oint_{C_A} B \cdot d\ell \stackrel{(2)}{=} B \oint_{C_A} d\ell = B \cdot 2\pi r$$

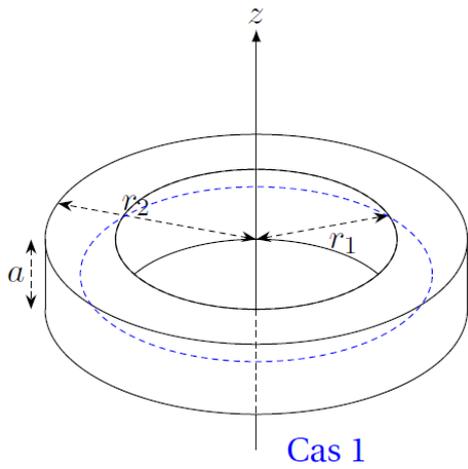
$\Sigma I_{\text{enlacé}}$:

pour $z \in]-\infty; -a[\cup]+a; +\infty[: \Sigma I_{\text{enlacé}} = 0$ (cf cas 2 schéma ci-dessous)

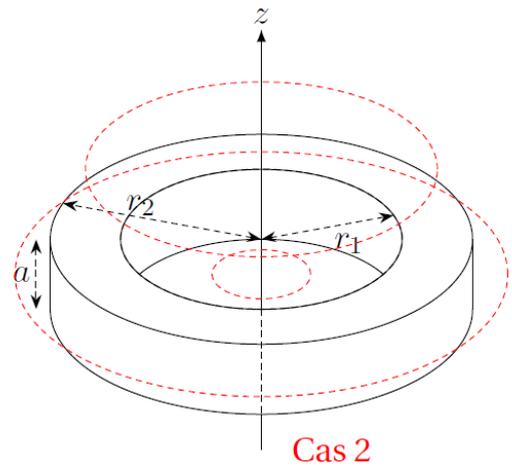
pour $z \in [-a; a]$

cf. schémas cas 1 et 2 ci-dessous

Cas 2 $r < R - a$	Cas 1 $R - a < r < R + a$	Cas 2 $r > R + a$
$\Sigma I_{\text{enlacé}} = 0$	$\Sigma I_{\text{enlacé}} = +N I$	$\Sigma I_{\text{enlacé}} = +N I - N I = 0$



Cas 1



Cas 2

Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétique \vec{B} sur une courbe fermée orientée C_A (appelée courbe d'Ampère) est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui traversent toute surface s'appuyant sur C_A , multipliée par la perméabilité du vide μ_0 .

$$\oint_{C_A} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

$r < R - a$	$R - a < r < R + a$	$r > R + a$
$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$	$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I$ $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$	$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ à l'intérieur, $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du tore.

Les lignes de champs sont des cercles d'axe Oz orientées ici dans le sens trigonométrique.

Exercice 15. Pince ampèremétrique



Superposition du champ \vec{B}_1 créé par le fil et du champ \vec{B}_2 créé par le tore : $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

Cf. applications de cours : fil : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$; tore : $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ à l'intérieur, $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur du tore.

Exercice 16. Cylindre parcouru par un courant inhomogène

1) $I = \iint \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = \int_0^R J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = J_0 \frac{\pi R^2}{2}$ soit $J_0 = \frac{2I}{\pi R^2}$

2) Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$; contour d'Ampère : cercle de rayon r , d'axe (Oz) , de surface associée dirigée selon \vec{e}_z (orienté dans le sens trigonométrique).

Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ soit $2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I$ si $r \geq R$ et

$$2\pi r B_\theta(r) = \frac{\mu_0 2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right) \quad \text{si } r \leq R$$

Soit $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ si $r \geq R$ et $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{2R^2}\right) \vec{e}_\theta$ si $r \leq R$

3) $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r}\right) \vec{e}_z = \mu_0 \frac{2I}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z = \mu_0 J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j} : \text{oK}$

Exercice 17. Cavité cylindrique

$r < R$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$ et $r > R$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta$

Fil infini : $I = j\pi R^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ (modélisation cohérente pour $r \gg R$)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{u}_z \wedge (\vec{O}_1 M - \vec{O}_2 M) = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{u}_z \wedge \vec{O}_1 O_2 = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{j} \wedge \vec{O}_1 O_2$$

Exercice 18. Modèle de Bean d'un supraconducteur

1. Soit M un point quelconque de l'espace. D'une part, le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant ; et d'autre part la couche conductrice est invariante par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z . Ainsi, $\vec{B}(M) = B_y(X) \vec{e}_y$.
2. Le plan $X = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Ainsi, en tout point de ce plan, \vec{B} doit lui être orthogonal, c'est-à-dire porté par \vec{e}_x , or nous avons établi dans la question précédente que $\vec{B}(M) = B_y(X) \vec{e}_y$. Ces deux résultats sont compatibles ssi $\vec{B} = \vec{0}$.
3. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$

Ainsi, à l'intérieur de la couche conductrice,

$$+ \frac{dB_y}{dX} \vec{e}_z = \mu_0 J_c \vec{e}_z$$

Par séparation des variables,

$$\int_{B_y(0)=0}^{B_y(X)} dB_y = \mu_0 J_c \int_0^X dX$$

$$\text{donc } \vec{B} \left(|X| \leq \frac{\delta}{2} \right) = \mu_0 J_c X \vec{e}_y.$$

À l'extérieur de la couche conductrice, la densité de courant est nulle, l'équation de Maxwell-Ampère implique donc que le champ est uniforme. La distribution de courant étant volumique, le champ est continu en tout point de l'espace, d'où

$$\vec{B} \left(X \leq -\frac{\delta}{2} \right) = -\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} \left(X \geq \frac{\delta}{2} \right) = +\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y.$$

4. D'après le principe de superposition, le champ total est la somme du champ extérieur et des deux champs créés par les deux couches conductrices, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{gauche}} + \vec{B}_{\text{droite}}$$

Le champ créé par la couche conductrice de gauche se calcule exactement comme celui créé par la couche conductrice de droite, si ce n'est que le courant est en sens opposé et qu'un signe \ominus apparaît donc dans toutes les expressions.

Ainsi, au coeur du supraconducteur,

$$\vec{0} = \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 (-J_c) \delta \vec{e}_y}_{\text{à droite de la couche de gauche}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y}_{\text{à gauche de la couche de droite}}$$

ce qui donne

$$B_0 - \mu_0 J_c \delta = 0 \quad \text{d'où } \delta = \frac{B_0}{\mu_0 J_c}$$

5. Le principe de superposition s'applique de la même façon en tout point de l'espace. À l'extérieur de l'échantillon, les champs créés par les deux couches sont opposés et se compensent. Par exemple, pour $x \geq a$,

$$\vec{B}(x \geq a) = \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 (-J_c) \delta \vec{e}_y}_{\text{à droite de la couche de gauche}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 J_c \delta \vec{e}_y}_{\text{à gauche de la couche de droite}} = \vec{B}_0$$

Il en est de même pour $x \leq a$. Enfin, dans les couches conductrices, le champ \vec{B}_0 et le champ créé par la deuxième couche sont uniformes, si bien que le champ varie linéairement. La continuité de \vec{B} en tout point d'une distribution volumique suffit à terminer le tracé sans qu'il ne soit nécessaire de le calculer exactement dans les deux couches. On en déduit le tracé de la figure 1.

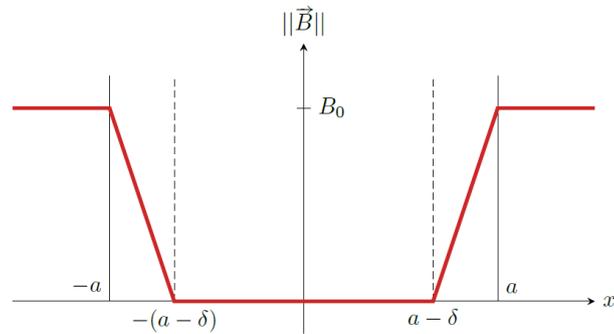


Figure 1 – Norme du champ magnétique dans l'échantillon.

Exercice 19. Cylindre chargé en rotation (corrigé J. Kieffer)

- 1) On a une distribution volumique de courant de la forme $\vec{j} = r\omega\rho\vec{e}_\theta$.
 Pour un point M donné, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie et il y a invariance par rotation et translation selon z donc $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$.
 On peut alors trouver le champ magnétique par un théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire de hauteur h et deux "segments" $r = 0$ et r

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = h(B(0) - B(r)) = \begin{cases} \mu_0 \frac{r^2}{2} \omega \rho h, & \text{pour } r < a \\ \mu_0 \frac{a^2}{2} \omega \rho h, & \text{pour } r > a \end{cases}$$

Si on "admet" que le champ extérieur est nul (en reconnaissant un pseudo solénoïde), on en déduit alors que $B(0) = \mu_0 \frac{a^2}{2} \omega \rho$ et donc

$$B = \begin{cases} \mu_0 \frac{a^2 - r^2}{2} \omega \rho, & \text{pour } r < a \\ 0, & \text{pour } r > a \end{cases}$$

On peut également appliquer l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{dB}{dr} \vec{e}_\theta = \mu_0 r \omega \rho \vec{e}_\theta \Rightarrow B = \mu_0 \frac{a^2 - r^2}{2} \omega \rho$$

En écrivant que la constante d'intégration permet d'avoir $B_{ext} = 0...$

On peut finalement superposer différents solénoïdes compris en r et $r + dr$ parcouru par un courant. Pour faire le lien avec la description "linéique" en considérant une hauteur h de cylindre le courant qui traverse vaut (en linéique et en volumique)

$$nih = j(r)drh \Rightarrow ni \sim j(r)dr$$

En utilisant le champ magnétique créé par un solénoïde et en sommant les champs dus aux différents solénoïdes (en ne comptant que ceux pour lesquels on est "à l'intérieur") on a alors

$$dB = \mu_0 ni = \mu_0 j(r)dr \Rightarrow B(r) = \int_r^a \mu_0 j(r)dr = \mu_0 \frac{a^2 - r^2}{2} \omega \rho$$

■ Flux du champ magnétique

Exercice 20. Champ magnétostatique uniforme 2 | ✖ 3

Soit $\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_x$

$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = B(y, z) \vec{e}_x$

$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{0} = -\frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_z + \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{B} = B \vec{e}_x, \text{ avec } B = cte$