

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Distribution de courant volumique



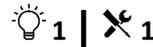
- 1) $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j_0 \cdot dS = j_0 \iint dS = j_0 S = j_0 \pi R^2$
- 2) Calcul du flux de \vec{j} pour le relier à I :

$$I = \iint (\alpha r^2 \vec{e}_z) \cdot d\vec{S} \vec{e}_z = \iint \alpha r^2 dr r d\theta = \alpha \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\alpha \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}}$$

- 3) En régime stationnaire \vec{j} à flux conservatif $\Leftrightarrow \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = Cte$ avec S : surface d'un tube de champ soit ici surface latérale du cylindre ; en s'appuyant sur un schéma en coordonnées cylindrique, on trouve : $j = \frac{I}{2\pi r h} = \frac{Cte}{r}$.

Exercice 2. Vitesse d'ensemble des électrons dans le cuivre



$\|\vec{j}\| = nev = \frac{I}{S}$ soit $\boxed{v = \frac{I}{Sne}}$ A.N. : $v = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} = 0,1 \text{ mm.s}^{-1}$

Exercice 3. modèle de Drude



1. PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E}$

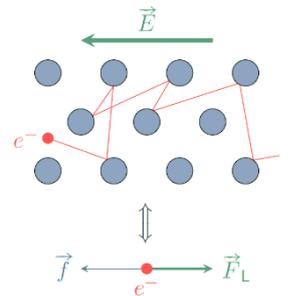
2. En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ soit $\vec{v}(t \rightarrow \infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m} \vec{E} = v_{\ell im} \vec{E}}$

résolution complète : $\vec{v} = \frac{q\tau_r}{m} \vec{E} + \vec{A} e^{-t/\tau_r}$

Initialement, la vitesse des charges est aléatoire (agitation thermique seule et l'absence de champ extérieur), ce qui correspond donc à une vitesse d'ensemble nulle :

$$\vec{v}(t=0) \stackrel{c.i.}{=} \vec{0} \stackrel{\text{expression à } t=0}{=} \frac{q\tau_r}{m} \vec{E} + \vec{A}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{q\tau_r}{m} \vec{E} (1 - e^{-t/\tau_r})}$$



3. **Hypothèse de régime permanent** : si la tension varie sur des durées $T \gg \tau$ (i.e. $f \ll 1/\tau = 10^{14} \text{ Hz}$) alors le régime transitoire est de durée négligeable et l'électron est constamment en régime permanent.

4. Cf cours : charge traversant $d\vec{S}$ pendant dt : $d^2q = nq\vec{v}_{\ell im} \cdot dt \cdot d\vec{S}$ intensité traversant $d\vec{S}$:

$dI = \frac{d^2q}{dt} = nq\vec{v}_{\ell im} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $\vec{j} = nq\vec{v}_{\ell im}$; **USI** (j) : $A.m^{-2}$, soit

$$\vec{j} = nq\vec{v}_{\ell im} = nq \frac{q\tau}{m} \vec{E} = \boxed{ne^2 \frac{\tau}{m} \vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est bien proportionnel au champ électrique

5. $\vec{j} = \sigma \vec{E} = ne^2 \frac{\tau}{m} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}$

6. Nombre de porteurs de charge par unité de volume = nombre d'atomes par unité de volume (chaque atome libérant un électron) : $n = n_a = \frac{N_{Cu}}{V} = \frac{N_A n_{Cu}}{V} = \frac{N_A m_{Cu}}{MV} = \frac{N_A}{M} \mu$ or $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} = \frac{N_A}{M} \mu \frac{q^2\tau}{m}$ soit

$$\tau = \frac{\sigma m M}{\mu N_A q^2}$$

A.N. $n = 8,54 \cdot 10^{28} \text{ e} \cdot \text{m}^{-3}$ $\tau = 2,47 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ le régime transitoire est extrêmement court (N.B. : ARQS et loi d'Ohm locale pour des fréquences de la tension inférieures à 10^{13} Hz).

7. On part de l'équation différentielle du mouvement que l'on écrit en notation complexe

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda \vec{v} - e \vec{E}$$

$$mj\omega \underline{\vec{v}} = -\lambda \underline{\vec{v}} - e \underline{\vec{E}}$$

Expression de la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e \underline{\vec{E}}}{mj\omega + \lambda} = \frac{-e \underline{\vec{E}}}{jm\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m} \underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau}$$

Expression du vecteur $\underline{\vec{j}}$:

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}} \stackrel{\text{loi d'Ohm locale}}{=} \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}}$$

Conductivité complexe $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1 + j\omega\tau}$$

7. On peut approximer la conductivité du métal à sa valeur statique jusqu'à des fréquences de l'ordre de $\frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz}$:

$$\underline{\gamma}(\omega) \approx \gamma(\omega = 0) = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Dans tout le domaine de l'ARQS (de fréquence $\lesssim \text{MHz}$), on utilisera donc cette conductivité statique. Cela est dû à la très faible inertie de l'électron qui réagit quasi-instantanément aux variations du champ électrique, et ceci jusqu'à de très hautes fréquences.

Exercice 4. Loi d'Ohm et résistance d'un conducteur



D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (hypothèse ARQS)

or par définition du potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, soit

$$\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}V \stackrel{\text{1D cartésiennes}}{=} -\gamma \frac{dV}{dz} \vec{e}_z$$

Intensité traversant le conducteur sur une section S :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{loi d'Ohm locale + définition V}}{=} - \iint -\gamma \frac{dV}{dz} \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{uniforme}}{=} -\gamma \frac{dV}{dz} \iint \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{section droite + S=cte}}{=} -\gamma \frac{dV}{dz} S$$

On intègre par une séparation des variables entre les extrémités des deux fils :

$$\int_{V(z=0)}^{V(z=\ell)} dV = -\frac{1}{\gamma S} I \int_0^\ell dz \Rightarrow V(z = \ell) - V(z = 0) = -U = -\frac{1}{\gamma S} I \ell \stackrel{\text{déf. de R}}{=} -RI$$

D'où

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\rho \ell}{S}$$

Remarque : on pouvait également noter que : $I = -\gamma \frac{dV}{dz} S = cte$ soit $\frac{dV}{dz} = cte = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{V(z=\ell) - V(z=0)}{\ell} = -\frac{U}{\ell}$ soit

$$I = -\gamma \frac{dV}{dz} S = \gamma \frac{U}{\ell} S = \frac{U}{R}$$

Exercice 5. De la forme locale à la forme globale de l'effet Joule 💡 1 | ✖ 1 ou 2

$$1. P = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot \mathcal{V} = jE\mathcal{V} = \frac{I U_{AB}}{S} \frac{\mathcal{V}}{\ell} = \frac{I U_{AB}}{S} S \ell = I \cdot U_{AB} = RI^2$$

On retrouve la loi de Joule macroscopique (exprimée en W) $\boxed{P = RI^2}$

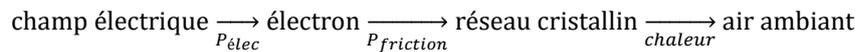
Conversion énergétique

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{q\vec{E} \cdot \vec{v}}_{P_{elec}} - \underbrace{\frac{m}{\tau} \vec{v} \cdot \vec{v}}_{P_{friction}} \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \underbrace{P_{elec}}_{>0} + \underbrace{P_{friction}}_{<0}$$

En régime permanent, dans un métal, $P_{elec} + P_{friction} = 0$ et $P_{elec} = -P_{friction} = P_{Joule}$. C'est la force de friction, résistante, qui dissipe l'énergie fournie par le champ électrique à la matière.

Le champ communique aux porteurs de charges une vitesse moyenne qui augmente avec le champ électrique, ceux-ci transfèrent alors plus d'énergie au réseau durant les collisions.



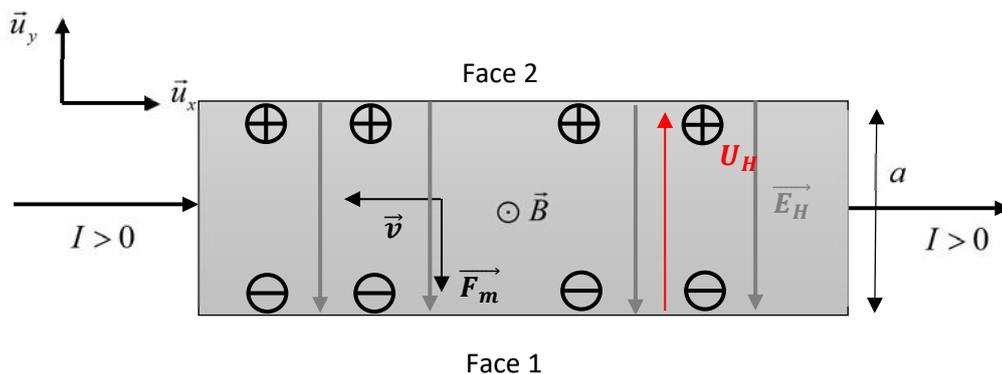
Exercice 6. Effet Hall – Teslamètre à effet Hall (d'après CCINP TPC 2021) ⚠ IMPORTANT | 💡 2 | ✖ 2

1) Force de Lorentz : $\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$.

Les électrons se déplacent dans le sens opposé de l'intensité, donc \vec{v} vers la gauche, $q < 0$ et en utilisant la règle de la main droite, on trouve le sens de \vec{F}_m . On peut également exprimer cette force par le calcul :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -e \times (-v\vec{u}_x) \wedge B\vec{u}_z = evB(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = evB(-\vec{u}_y) = -evB\vec{u}_y$$

Les électrons sont donc déviés par le champ magnétique vers le bas (de la face 2 vers la face 1).



2) Sous l'action de la force de Lorentz \vec{F}_m , les électrons vont se concentrer sur une face 1 du parallélépipède, en faisant apparaître sur la face opposée des charges positives correspondant aux ions du matériau prisonniers du réseau cristallin sur la face 2. Cette séparation des charges s'accompagne de la création d'un champ électrique \vec{E}_H , tel que $\vec{E}_H = \pm E_H \vec{u}_y$. De plus, le champ E_H étant défini positif, une particule de charge positive va subir une force dirigée selon \vec{E}_H , or une charge positive va être repoussée par les charges positives et attirée par les charges négatives, et va donc subir une force dirigée selon $-\vec{u}_y$. On a donc $\vec{E}_H = -E_H \vec{u}_y$

- Allure des lignes de champ électrique : lignes de direction \vec{u}_y orthogonales à I

3) • **Système** : {électron}, de masse m .

• **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen

• Bilan des forces : Poids négligeable

$$\text{Force de Lorentz } \vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Force électrique } \vec{F} = q\vec{E}_H$$

$$\Rightarrow \text{force totale } \boxed{\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}_H}$$

Les lignes de courant restent parallèles à la direction Ox , ce qui signifie que les électrons n'ont pas de mouvement donc pas d'accélération selon \vec{u}_y .

$$j_y = 0 \Rightarrow v_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système électron : $m\vec{a} = \vec{f}$

Coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$ et

$$\vec{f} = f_x\vec{u}_x + f_y\vec{u}_y + f_z\vec{u}_z = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}_H = qvB\vec{u}_y - qE_H\vec{u}_y$$

Projection selon \vec{u}_y avec $a_y = 0$:

$$\Rightarrow f_y = 0 = qvB - qE_H$$

$$\Rightarrow E_H = vB$$

Soit avec $\vec{j} = -n_v e \vec{v} \Rightarrow E_H = \frac{j}{n_v e} B$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = -\frac{j}{n_v e} B \vec{u}_y}$$

4) • $\vec{E}_H = -\overrightarrow{\text{grad}} V_H$ donc \vec{E}_H est dans le sens des potentiels décroissants d'où la polarité de U_H représentée sur la figure 3.

• $U_H = \int_{\text{face 1}}^{\text{face 2}} -\vec{E}_H \cdot \vec{d\ell}$ et on suppose que \vec{E}_H est uniforme $\Rightarrow U_H = E_H \cdot a$

$$\boxed{U_H = \frac{j}{n_v e} B \cdot a}$$

5) $I = j \cdot S = j \cdot ab \Rightarrow U_H = \frac{j}{n_v e ab} Ba = \frac{j}{n_v e b} B = R_H I$ avec

$$\boxed{R_H = \frac{B}{n_v e b}} \quad CQFD$$

6) On obtient donc une résistance qui est proportionnelle au champ magnétique B et inversement proportionnelle à la densité volumique n_v des porteurs de charges.

L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semi-conducteurs.

Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

$$AN : \underline{U_H} = R_H I = \frac{B}{n_v e b} I = \frac{50 \cdot 10^{-6} \times 1}{2 \cdot 10^{29} \times 2 \cdot 10^{-19} \times 10^{-4}} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6} = \underline{1,25 \cdot 10^{-11} V} \approx 10^{-11} V$$

Valeur beaucoup trop faible pour être mesurable avec les voltmètres usuels.

$$U_H = \frac{k}{n_v} \text{ et } U_{Hsc} = \frac{k}{n_v sc} \Rightarrow U_{Hsc} = U_H \frac{n_v}{n_v sc}$$

$$AN : \underline{U_{Hsc}} \approx 10^{-11} \times \frac{2 \cdot 10^{29}}{8 \cdot 10^{24}} \approx \frac{1}{4} \times 10^{-6} \approx \underline{25 \cdot 10^{-8} V}$$

Valeur plus acceptable pour être mesurable avec les voltmètres usuels. On utilise donc des semi-conducteurs pour des sondes à effet Hall permettant la mesure de champ magnétique.

EXERCICES

Exercice 7. Mouvement de porteurs 1 ou 2 | ✖ 1

On a $i = \frac{dq}{dt}$ soit $Q = eN = \int idt = I \Delta t$ $N = \frac{I \Delta t}{e} = 6,25 \cdot 10^{19} e^-$; $n = \frac{N_A \mu}{M} = 8,49 \cdot 10^{28} m^{-3}$; $L = \frac{I \Delta t}{sne} = 0,294 mm$.

Exercice 8. Expression du vecteur densité de courant en régime stationnaire 1 | ✖ 2

En régime stationnaire \vec{j} à flux conservatif $\Leftrightarrow \text{div } \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 j_r}{\partial r} \right) = 0 \Leftrightarrow j = \frac{Cte}{r^2}$

Exercice 9. Charge d'une sphère (E. Thibierge) 1 | ✖ 2

- La charge totale de la sphère à un instant donné vaut $Q(t) = 4\pi a^2 \sigma(t)$. Entre t et $t + dt$, les transferts de charge sont liés au courant électrique : une charge entrante $\delta q_e = I dt$ se dépose sur la sphère.

Conservation de la charge :

$$Q(t + dt) = Q(t) + \delta q_e = Q(t) + I dt$$

Soit

$$dQ = Idt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = I = 4\pi a^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

« L'équation différentielle » vérifiée par σ est donc

$$\boxed{\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{I}{4\pi a^2}}$$

En supposant la sphère complètement déchargée à l'instant initial et en intégrant par rapport au temps :

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{I}{4\pi a^2} t}$$

- En négligeant l'influence du fil comme le sous-entend l'énoncé, la distribution de charge est à symétrie sphérique.

Par étude des symétries et invariances, on a donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

Surface de Gauss : sphère de centre O le centre de la sphère étudiée, de rayon r quelconque passant par le point M étudié.

Flux de \vec{E} à travers la surface de Gauss : $\oint_{\Sigma_G} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$

Charge intérieure : disjonction des cas : $r \leq a$: $Q_{int} = 0$, $r \geq a$: $Q_{int} = 4\pi a^2 \sigma = 4\pi a^2 \frac{I}{4\pi a^2} t = It$

Théorème de Gauss : $\oint_{\Sigma_G} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

disjonction des cas : $r \leq a$: $E(r) = 0$, $r \geq a$: $E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{a^2 \sigma}{r^2 \epsilon_0} = \frac{It}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

On en déduit le potentiel électrostatique à l'aide de sa relation de définition : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$; il est donc constant à l'intérieur de la sphère ; à l'extérieur :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{a^2 \sigma}{r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$$

Soit

$$V(r) = \frac{a^2 \sigma}{r \epsilon_0} + cte$$

En prenant une origine des potentiels à l'infini (distribution de dimension finie) : $V(\rightarrow +\infty) = 0 = 0 + cte$

$$V(r) = \frac{a^2 \sigma}{r \epsilon_0}$$

A la surface de la sphère,

$$V_s = V(r = a) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0}$$

3. Bilan de conservation de la charge :

$$Q(t + dt) = Q(t) + \delta q_e = Q(t) + i dt$$

Soit

$$dQ = i dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = i = 4\pi a^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Or d'après la loi d'Ohm, $i = \frac{U}{R}$ en orientant la tension U en convention récepteur, soit, avec $R = \frac{1}{\gamma S}$:

$$U = V_0 - V_s = Ri(t) = V_0 - \frac{a\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\gamma S} i(t) \Rightarrow i(t) = \gamma S \frac{V_0 - \frac{a\sigma(t)}{\epsilon_0}}{\ell}$$

Dans l'équation bilan de conservation de la charge :

$$4\pi a^2 \frac{d\sigma}{dt} = i = \gamma S \frac{V_0 - \frac{a\sigma(t)}{\epsilon_0}}{\ell}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\gamma S}{4\pi\epsilon_0 a \ell} \sigma(t) = \frac{\gamma S}{4\pi a^2} \frac{V_0}{\ell}$$

$$\sigma(t) = Ae^{-t/\tau} + \sigma_\infty = Ae^{-t/\tau} + \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

Condition initiale : charge initialement nulle, soit $\sigma(t=0) \stackrel{C.I.}{=} 0 \stackrel{C.I.}{=} A + \sigma_\infty$ expr à $t=0$

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Exercice 10. Temps de relaxation



- a. Loi d'ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; équation de conservation de la charge : $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
- b. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\gamma \vec{E}) = -\gamma \text{div } \vec{E} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho$
- c. $\rho(M, t) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$: fonction exponentiellement décroissante de constante de temps caractéristique τ .
- e. $\tau = 10^{-18}$ s au bout de quelques τ , $\rho(M, t) \rightarrow 0$ la densité volumique de charges est devenue nulle et si le conducteur est chargé, les charges mobiles ont forcément migré vers la surface.

Exercice 11. Gravure ionique

1. Système : ion de masse m et de charge q étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) : Force de Lorentz électrique, dérivant d'une énergie potentielle $E_{p_e} = qV = eV(x)$, poids négligé. Le système est donc conservatif

Théorème de l'énergie mécanique entre un instant quelconque et l'instant initial :

$$\Delta E_m = W_{nc} = 0$$

$$E_m = cte = E_m(t=0) \stackrel{C.I.}{=} 0 \stackrel{BAME}{=} \frac{1}{2} mv^2 + eV(x)$$

$$v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2e|V(x)|}{m}}$$

Comme $V_1 < V_2 < V_0$, $v_1 = v(x_1) > v_2 = v(x_2) > v_0 = v(x_0)$: le cation est donc accéléré entre la grille 0 et la grille 1 puis ralenti entre la grille 1 et la grille 2.

2. La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant \vec{j} ne dépend que de x . En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\text{div } \vec{j} = 0 = \frac{dj}{dx} \quad \text{soit} \quad j = \text{cte} = j_0 \quad \boxed{\vec{j} = j_0 \vec{e}_x}$$

3. Equation de Poisson simplifiée dans le cas à 1D cartésienne :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{d^2V}{dx^2} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0$$

De plus, tous les cations ayant les mêmes caractéristiques, on a

$$\vec{j} = j_0 \vec{e}_x = nq\vec{v} = n(x)ev(x)\vec{e}_x \underset{TEM}{=} \frac{n(x)e}{\rho(x)} \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} \vec{e}_x = \rho(x) \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} \vec{e}_x$$

D'où

$$\rho(x) = j_0 \sqrt{-\frac{m}{2eV(x)}}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{donne} \quad \boxed{\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{j_0}{\epsilon_0} \sqrt{-\frac{m}{2eV(x)}} = 0}$$

4. En identifiant la solution donnée par l'énoncé en $x = x_1$, on obtient

$$V(x_1) = V_1 = -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{j_0}{\epsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}$$

Soit

$$V_1^3 = -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^4 \left(\frac{j_0}{\epsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2e} \quad \text{soit} \quad \frac{j_0}{\epsilon_0} = \left(\frac{2}{3x_1}\right)^2 \sqrt{-\frac{2e}{m} V_1^3}$$

$$\boxed{j_0 = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0}{x_1^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} |V_1|^{3/2}}$$

5. La charge électrique totale Q_{tot} atteignant le substrat pendant Δt est reliée d'une part au nombre de cations, et d'autre part à l'intensité du faisceau,

$$Q_{tot} = Ne = I\Delta t = j_0 S \Delta t$$

$$N = \frac{j_0 S \Delta t}{e} = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0}{x_1^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} |V_1|^{3/2} \frac{S \Delta t}{e} = \boxed{k |V_1|^{3/2} \frac{S \Delta t}{e}} = N$$

En approximant le potentiel au niveau du substrat à celui de la grille 2 très proche, on déduit de la question 1 que la vitesse des ions lorsqu'ils atteignent le substrat vaut

$$\boxed{v_s = \sqrt{\frac{2e|V_2|}{m}}}$$

Ainsi, le dispositif envisagé permet bien de contrôler le nombre de cations via la grille 1 et leur vitesse par l'intermédiaire de la grille 2.

Exercice 12. Prise de Terre



1. Courants stationnaires (cf. conservation de la charge) : $\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = Cte = I$

avec S : demi-sphère de rayon r on trouve : $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$.

2. $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ soit $\frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi\sigma r^2}$ et $V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$ avec un potentiel nul à l'infini.

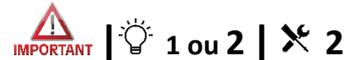
3. $V\left(d + \frac{a}{2}\right) = -\frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \frac{1}{d + \frac{a}{2}}$ et $V\left(d - \frac{a}{2}\right) = -\frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \frac{1}{d - \frac{a}{2}}$

4. Différence de potentiel (tension) entre les deux pieds à une distance D du point O (distance moyenne que l'on pourra supposer correspondre à la distance du point se situant entre les deux pieds) :

$U_p(D) = V\left(D + \frac{a}{2}\right) - V\left(D - \frac{a}{2}\right) = \frac{I}{2\pi\sigma} \cdot \frac{a}{D^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \sim \frac{Ia}{2\pi\sigma D^2}$: la tension augmente avec a appelé le pas, et diminue avec la distance D . L'existence de cette tension entre les deux pieds, alors que le corps peut être modélisé par une résistance, va impliquer la circulation d'un courant qui devient dangereux au-delà d'une valeur seuil I_{max} .

$$U_p(D_m) = RI_{max} = \frac{Ia}{2\pi\sigma D_m^2}, \text{ soit } D_m = \sqrt{\frac{aI}{2\pi\sigma RI_{max}}} \approx 110 \text{ m.}$$

Exercice 13. Résistance d'une colonne cylindrique d'électrolyte



1) Par définition : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \iint j(r) \cdot dS = j(r)S$, d'où

$$j_r(r) = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r h}$$

2) Loi d'Ohm locale :

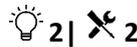
$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r h \sigma} \vec{e}_r$$

3) Expression de la tension entre les électrodes :

$$U_{12} = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi r h \sigma} dr = \frac{I}{2\pi h \sigma} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$R \stackrel{\text{déf. } R}{=} \frac{U_{12}}{I} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi h \sigma}$$

Exercice 14. Résistance de l'atmosphère terrestre



1) symétrie du problème : sphérique (invariance par rotation selon θ et φ) d'où $V(M) = V(r)$, soit

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ et selon la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{dV}{dr} \vec{e}_r$; or

$$i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \iint j(r) \cdot dS = j(r)S = -\sigma \frac{dV}{dr} 4\pi r^2$$

et

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{i}{4\pi\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = U = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \stackrel{\text{déf. } R}{=} Ri$$

soit

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

2) a) $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \vec{S}$ et $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{dV}{dz} \vec{e}_z : \vec{E}$ donc \vec{j} dirigés dans le sens des potentiels décroissants, soit $\vec{j} = -|j| \vec{e}_z$

Avec une intensité $I > 0 : \vec{j} = -\frac{I}{S} \vec{e}_z$

b) $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma_0 e^{z/a} \vec{E} = -\frac{I}{S} \vec{e}_z$ soit $\vec{E} = -\frac{I}{\sigma_0 S} e^{-z/a} \vec{e}_z$

c) Au sol, $z = 0, \vec{E}_0 = -\frac{I}{\sigma_0 S} \vec{e}_z$ soit $\sigma_0 = -\frac{I}{E_0 S}$ A.N. : $\sigma_0 = 2,95 \cdot 10^{-14} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

d) $\vec{E} = -\frac{I}{\sigma_0 S} e^{-z/a} \vec{e}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$ soit $\int_{V_0}^{V(z)} dV = \frac{I}{\sigma_0 S} \int_0^z e^{-z/a} dz = \frac{I}{\sigma_0 S} [-ae^{-z/a}]_0^z = V(z) - V_0$

$$V(z) - V_0 = \frac{Ia}{\sigma_0 S} (1 - e^{-z/a})$$

A.N. pour $z = 1,80 \text{ m} : V(z) \approx 180 \text{ V}$.

e) $V(H) - V_0 = \frac{Ia}{\sigma_0 S} (1 - e^{-H/a}) = 400\,000 \text{ V} = R_{atm} I$ $R_{atm} = \frac{a}{\sigma_0 S} (1 - e^{-H/a}) = 267 \Omega$

Exercice 15. Magnétorésistance (d'après ATS) 3 | 2

1. Définition de la densité de courant \vec{j} dans le cas général : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Dans le cas où on a un matériau avec N électrons par unité de volume, animés d'une vitesse $\vec{v} : \vec{j} = -N e \vec{v}$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron de masse m , dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Le poids étant négligé, les seules forces qui s'appliquent à l'électron sont la force de Coulomb $\vec{F} = -e \vec{E}$ et la force provenant des interactions entre les électrons et les ions fixes $\vec{F} = -\lambda \vec{v} : m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \lambda \vec{v}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda \vec{v} = -e \vec{E}$$

3. En régime permanent, $\vec{v} = \overline{ct\vec{e}} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ soit $\lambda \vec{v} = -e \vec{E}$ avec $\vec{v} = -\frac{j}{Ne}$

$$-\frac{\lambda \vec{j}}{Ne} = -e \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{j} = \frac{Ne^2}{\lambda} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{Ne^2}{\lambda}$$

La loi d'ohm est vérifiée : \vec{j} est colinéaire à \vec{E} .

4. Si les électrons sont aussi soumis à un champ \vec{B} , ils subissent une force $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \lambda \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

En régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et $-e \vec{E} + \lambda \frac{\vec{j}}{Ne} + \frac{\vec{j}}{N} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ soit $-\frac{Ne^2}{\lambda} \vec{E} + \vec{j} + \frac{Ne}{\lambda} \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} - \frac{Ne}{\lambda} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

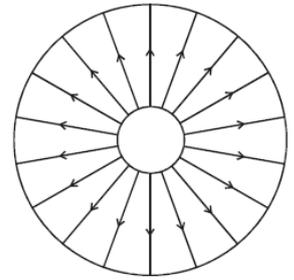
\vec{j} n'est plus colinéaire à \vec{E} : la loi d'ohm n'est pas vérifiée.

5. Sens et direction de \vec{E} en un point P du matériau :

Invariance de la distribution de charges : par rotation de θ autour de $(Oz) \rightarrow \vec{E}$ indépendant de θ et par translation de z selon $(Oz) \rightarrow \vec{E}$ indépendant de z

Symétrie de la distribution de charges : Plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie donc \vec{E} appartient à leur intersection (M, \vec{u}_r) : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Les lignes de champ sont radiales. Par ailleurs, elles sont dirigées vers les potentiels décroissants : de l'intérieur vers l'extérieur.



6. Lignes de courant \vec{j} : En régime permanent, les lignes de courant sont telles que la somme des trois forces (de Coulomb, d'interaction avec les ions fixes, magnétique) soit nulle :

$$-e \vec{E} + \lambda \frac{\vec{j}}{N e} + \frac{\vec{j}}{N} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

On projette sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -e E + \frac{\lambda}{N e} j_r + \frac{1}{N} j_r & \wedge & 0 & = & 0 \\ j_\theta + j_\theta & & 0 & & 0 \\ j_z + j_z & & B & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -e E + \frac{\lambda}{N e} j_r + \frac{1}{N} j_\theta B & = & 0 & (1) \\ j_\theta - j_r B & & 0 & \Rightarrow & j_\theta = \frac{e}{\lambda} j_r B \\ j_z & & 0 & \Rightarrow & j_z = 0 \end{array}$$

$$(1): -e E + \frac{\lambda}{N e} j_r + \frac{e}{N \lambda} j_r B^2 = 0 \quad \text{soit} \quad j_r \left(\frac{\lambda}{N e} + \frac{e}{N \lambda} B^2 \right) = e E$$

$$j_r = \frac{e E}{\frac{\lambda}{N e} + \frac{e}{N \lambda} B^2} \quad \text{or} \quad \sigma = \frac{N e^2}{\lambda}$$

$$\boxed{j_r = \frac{\sigma E}{1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2} \quad \text{et} \quad j_\theta = \frac{\sigma E}{\frac{\lambda}{e B} + \frac{e}{\lambda} B}}$$

Les lignes de courant sont des segments portés par \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

7. Détermination de R : La résistance du matériau est égale à : $R = \frac{U}{I}$.

❶ Détermination de I : I correspond au flux de \vec{j} à travers la surface latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon r tel que $d\vec{S} = r h d\theta \vec{u}_r$.

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2 \pi r h j_r = \frac{2 \pi r h \sigma E}{1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2}$$

❷ La tension U est obtenue à partir de la relation champ-potential : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. D'après ce qui précède :

$$E = \frac{I \left(1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2\right)}{2 \pi r h \sigma} \quad \text{et} \quad \vec{E} \text{ est porté par } \vec{u}_r$$

$$U = V_2 - V_1 = \int dV = - \int E dr = - \frac{I \left(1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2\right)}{2 \pi h \sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$U = \frac{I \left(1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2\right)}{2 \pi h \sigma} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

On en déduit R :

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1 + \left(\frac{e}{\lambda} B\right)^2}{2 \pi h \sigma} \ln \frac{R_1}{R_2}}$$

Remarque : la loi R proportionnel à $1 + (\mu B)^2$ proposée par ce modèle simpliste est effectivement vérifiée par les magnétorésistances.

EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Exercice 16. Vitesse d'agitation thermique et vitesse moyenne des électrons libres

$$v_{th} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \gg v_{moy} = \frac{j}{ne} = \frac{I}{sne} = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Exercice 17. Conduction dans un semi-conducteur

- 1) $[\mu] = A \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$
- 2) $\vec{v}_n = -\mu_n \vec{E}$ et $\vec{v}_p = \mu_p \vec{E}$
- 3) $\vec{j} = -ne\vec{v}_n + pe\vec{v}_p$
- 4) $\rho = \frac{1}{e(n\mu_n + p\mu_p)}$
- 5) $\mu_n = 1,23 \cdot 10^{-1} A \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\mu_p = 4,10 \cdot 10^{-2} A \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$

Exercice 18. Etude de la conduction électrolytique dans un électrolyte (d'après ATS)

Solution :

1. Un porteur de charge parcourt une distance $v dt$ pendant un temps dt .

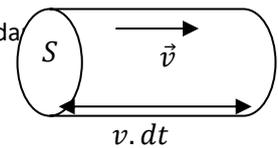
Les porteurs de charge traversant la section dS , dans le sens positif, pendant dt , sont situés dans le volume : $d\tau = dS \cdot h = \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$

Charge électrique d^2q qui traverse dS entre t et $t + dt$:

$$d^2q = e n d\tau = e n \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$$

Charge électrique dq qui traverse S entre t et $t + dt$:

$$dq = \iint_S e n \vec{dS} \cdot \vec{v} dt$$



2. Expression de I :

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S e n \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad \text{avec } \boxed{\vec{j} = n e \vec{v}} \quad (j \text{ en } A \cdot \text{m}^{-2})$$

3. $I_{max} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = j \cdot S = 100 A$

4. En régime permanent ; $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, d'où $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$e\vec{E} - \frac{m_p}{\tau} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{e\tau}{m_p} \vec{E}}$$

5. $\vec{E} = \frac{E_2 - E_1}{d} \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \frac{e\tau}{m_p} \frac{E_2 - E_1}{d} \vec{u}$

$$I = j \cdot S = n e v S = n e S \left(\frac{e\tau}{m_p} \frac{E_2 - E_1}{d} \right) = \frac{n e^2 \tau S}{m_p d} (E_2 - E_1) \quad \text{et } U = E_2 - E_1 \quad \text{d'où :}$$

$$R = \frac{U}{I} = \boxed{\frac{m_p d}{n e^2 \tau S} = R}$$

6. $R = \frac{U}{I} = \frac{0,1}{100} = \underline{1 \text{ m}\Omega}$

$$R = \frac{\rho d}{S} \quad \text{avec } S = 100 \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 \quad \text{et } d = 100 \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ m}$$

$$\rho = \frac{RS}{d} = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = \underline{0,1 \Omega \cdot \text{m}}$$

Exercice 19. Résistance d'un câble coaxial



a) Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et par définition de \vec{j} : $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = j S = \sigma E S$; $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$ d'où $U = \Delta V = EL$;

$$R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\sigma ES} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho L}{S}.$$

$$b) R_l = \frac{1}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma \pi (R_1^2 + R_2^2 - R_3^2)} \quad R_l = 5.10^{-4} \Omega.m^{-1}$$

Exercice 20. Noyau radioactif β^-



- Chaque désintégration émet un électron, par conséquent l'activité (nombre de désintégrations par seconde) correspond également au nombre N d'électrons par seconde ; pour accéder à l'intensité sortant du point O, il faut déterminer la charge Q émise par seconde, avec $Q = -eN$: intensité sortante : $I = \frac{Q}{\Delta t} = -\frac{eN}{\Delta t} = -3,0.10^{-14} A$.
- La source étant supposée quasi ponctuelle, symétrie sphérique du problème, avec $\vec{j}(r) = -j(r) \vec{e}_r$ tel que

$$I = \iint \vec{j}(r) \cdot \vec{dS} = \iint -j(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \iint -j(r) \cdot dS = -j(r)S = -4\pi r^2 j(r) \quad \text{d'où} \quad j(r) = -\frac{I}{4\pi r^2}$$
 A.N. : $j = 2,4.10^{-13} A.m^{-2}$.

Exercice 21. Accident de pêche

- Le courant dans une ligne haute tension oscille à la fréquence de 50 Hz, soit une période de 20 ms. Or pour se propager sur une longueur $L = 10 m$, une onde électromagnétique met une durée $L/c = 3.10^{-8} s$, négligeable devant la période d'oscillation, ce qui justifie de travailler dans l'ARQS.
- Par intégration (long calcul !), la résistance électrique de l'échantillon vaut

$$R_c = \frac{L}{2\pi a e} \ln\left(\frac{a}{e}\right) = 5,9.10^5 \Omega$$

- Le pêcheur tient la canne à pêche dans sa main, la résistance de la canne et celle du pêcheur sont donc montées en série. En pratique, à notre niveau d'approximation, la résistance du pêcheur est négligeable devant celle de la canne et on a donc

$$I = \frac{U_{max}}{R_c} = 0,15 A$$

C'est un courant extrêmement élevé par rapport à ce que peut supporter le corps : le seuil de fibrillation cardiaque irréversible est de 75 mA, le pêcheur risque de ne pas s'en remettre.

- Modélisons le pêcheur par un cylindre uniforme de hauteur 2 m et de diamètre $d = 30 cm$, dans lequel le courant se répartit de façon uniforme avec une densité volumique de courant

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2}$$

Loi d'Ohm locale : $E = \frac{j}{\sigma} = 2.10^{-6} V.m^{-1}$

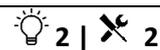
On peut ensuite calculer le champ magnétique à l'intérieur du corps, voir EM3, et pour $r < d/2$ on a

$$B(r) = \mu_0 \frac{2r}{\pi d^2} I \quad B_{max} = B\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\mu_0}{\pi d} I = 2.10^{-7} T$$

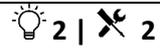
Exercice 22. Décharge d'une sphère chargée

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \epsilon_0/\gamma$$

Exercice 23. Approche probabiliste du modèle de Drude (J. Le Berre)



- $P(t) = \exp(-t/\tau)$
- $dp(t) = \exp(-t/\tau) \cdot \frac{dt}{\tau}$
- On effectue un bilan de la quantité de mouvement $\vec{Q}(t)$ de N_0 électrons : $\vec{Q}(t + dt) = \vec{Q}(t) + N_0 \vec{F} \cdot dt - N_0 \frac{dt}{\tau} \vec{q}(t)$, le terme $\vec{F} \cdot dt$ correspond à la variation de qdmvt due à la force \vec{F} auquel il faut retrancher la quantité de mouvement des électrons qui ont subi un choc entre t et $t + dt$, soit $N_0 \frac{dt}{\tau}$. Donc $\frac{1}{N_0} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{q}}{\tau} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$. Tout se passe comme si les électrons étaient soumis à une force de frottements fluides $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

Exercice 24. Expérience de Tolman et Stewart (1916) (J. Le Berre)

1. $j = nq a \omega e^{-t/\tau}$

2. $i = js$

3. $\frac{Q}{\gamma a S \omega} = \frac{m}{q}$