COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°8 – semaine Pronote 12 : 18 au 22 Novembre 2024

Au programme des exercices

→ **Chapitre EM1 parties 1 et 2 : Electrostatique :** Distribution de charges, Champ $\vec{E}$, théorème de Gauss de l'électrostatique et de la gravitation, potentiel électrostatique, équations de Maxwell relatives au champ électrostatique et équations de Poisson et Laplace, cartes de champ et équipotentielles, modélisation électrostatique d'un condensateur.

→ **Chapitre EM2 : Conduction électrique :** Vecteur densité de courant, équations de conservation de la charge, globale et locale, Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale, forme intégrale de la loi d'Ohm, résistance d'un conducteur cylindrique. Attention ! l'effet Joule à l'échelle mésoscopique n'est pas encore au programme

Questions de cours

1. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

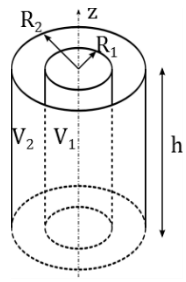
5. ❤ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

6. ❤ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

7. ** Etablir l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme par intégration directe de l'équation de Maxwell-Gauss. On admettra par ailleurs la continuité du champ à la surface de la boule.

   Donnée : Divergence en coordonnées sphériques : $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial (a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}$

8. ❤️ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.



9. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.

Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

10. ** Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature d'un condensateur plan.

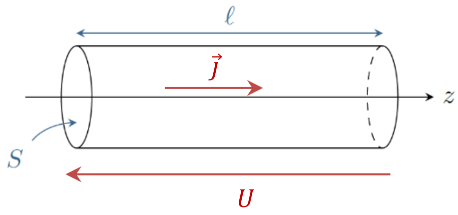
11. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges : $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

12. ❤️ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

13. ❤️ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\,\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

14. ❤️ Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z = 0) - V(z = \ell)$.



Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

Questions de cours avec éléments de réponses

Pour les calculs de champ électrostatique ou gravitationnel, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances de la distribution, conséquences sur le champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
4) *choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)*
5) *Calcul de la charge intérieure ou de la masse intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss, la disjonction de cas sur la charge / masse intérieure se répercutant sur $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

Distribution	**Sphère chargée uniformément en volume (ρ)**
Champ électrostatique	$r \leq R :\ \vec{E} = \dfrac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$

1. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R :\ \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

1ère méthode : $V = \int -\vec{E}\,.\overrightarrow{d\ell} = \int -E\ \vec{u_r}\,.\overrightarrow{d\ell} = -\int\ E\ \ dr + cte$

2ème méthode : $\vec{E} = E\ \vec{u_r} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int\ E\ \ dr + cte$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\displaystyle\int\ E_{int}\,dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.\,dr$ $V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = -\displaystyle\int\ E_{ext}\,dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.\,dr$ $V_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 –Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}+K_1=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow K_1=\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}(2+1)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$r<R$	$r>R$
$\boxed{V_{int}=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$	$\boxed{V_{ext}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$

4 – Cohérence $[V]=\frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}\ldots$

$r<R$	$r>R$
$[V_{int}]=\frac{[\rho]L^2}{[\varepsilon_0]}=\frac{[charge]L^2}{[\varepsilon_0]L^3}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$	$[V_{ext}]=\frac{[\rho]L^3}{[\varepsilon_0]L}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$
Homogène - cohérent	

5. ❤ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z>0:\ \vec{E}=\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z<0:\vec{E}=-\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z=0$.

1 – Variable d'intégration

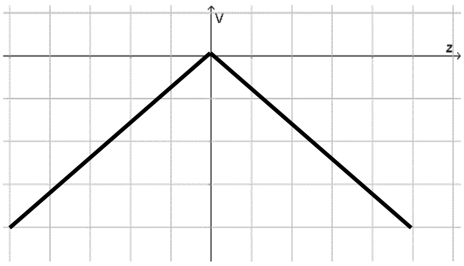
$$V=\int -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}+K=\int -E\ \overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{d\ell}+K=-\int\ E\ \ dz+K=-\int \varepsilon\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ dz+K=-\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}+K$$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty)=O$. On prend l'origine en O.

$$V(0)=0=0+K\Rightarrow K=0$$

$$\boxed{V=-\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}}$$



4 – Cohérence $[V]=\frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}\ldots$: $\quad [V]=\frac{[\sigma]L}{[\varepsilon_0]}=\frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$ *Cohérent*

5 – Graphe $\boldsymbol{V(r)}$

6. ❤ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12}\ =\ V_1$- V_2 la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F}=q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad \text{soit } \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

7. ** Etablir l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée avec une densité volumique de charge ρ uniforme par intégration directe de l'équation de Maxwell-Gauss. On admettra par ailleurs la continuité du champ à la surface de la boule.

Donnée : Divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}$$

D'après les études de symétries et d'invariances de la distribution de charges, on peut montrer que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ soit $E_r = E(r)$, et $E_\theta = E_\varphi = 0$

Pour À l'extérieur de la boule chargée la densité volumique de charges est nulle, soit d'après l'équation de Maxwell-Gauss (M.G.) :

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{or avec } E_r = E(r), \text{et } E_\theta = E_\varphi = 0, \text{ on a}$$

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\,sin\theta}\left(\frac{\partial(E_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\right)_{\varphi,r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta} \underbrace{=}_{E_\theta=E_\varphi=0} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \underbrace{=}_{M.G.} 0$$

$$\text{donc } \frac{d\left(r^2 E(r)\right)}{dr} = 0 \qquad \text{soit } r^2 E(r) = cte = K_1 \text{ et } \qquad E(r > R) = \frac{K_1}{r^2}$$

À l'intérieur : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E(r))}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{d(r^2E(r))}{dr} = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow r^2E(r) = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + K_2$$

Par symétrie, on sait que $E(0) = 0$ donc $K_2 = 0$.

$$\boxed{E(r < R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

Finalement, par continuité du champ en $r = R$, $\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{K_1}{R^2}$ soit $K_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$

$$\boxed{E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

8. ❤ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.

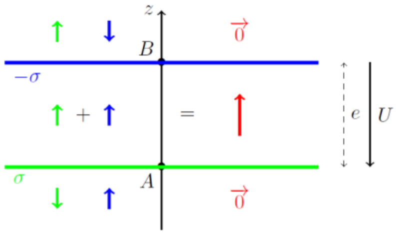
Expression à connaître, ou redonnée par l'examinateur : Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ et $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

Champ crée par l'armature 1 :

$$\overrightarrow{E_1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ z < 0 \end{vmatrix}$$

Champ crée par l'armature 2 :

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ z > e \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ z < e \end{vmatrix}$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{0} & si\ z > e\ ou\ z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} & si\ 0 < z < e \end{vmatrix}$$

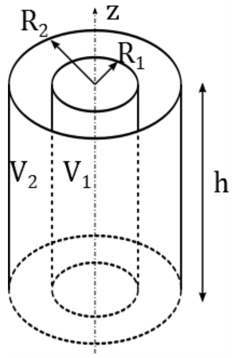
Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$*, d'après les symétries, V ne dépend que de z :* $-\overrightarrow{grad}\,V = -\dfrac{dV}{dz}\,\overrightarrow{u_z}$

$$V = -\int E.dz + cte = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.dz + cte = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ *soit* $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma\,S\,\varepsilon_0}{\sigma\,e} = \frac{\varepsilon_0\,S}{e}$

9. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Par application du théorème de Gauss entre les armatures du condensateur (détailler les étapes)

symétries et invariances : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$*, surface de Gauss cylindre de rayon r de hauteur h,*

flux $\Phi = \oint\!\!\oint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = 2\pi r h E(r)$ *charge intérieure* Q*, d'où* $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r$ *entre les armatures*

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\,ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ *soit* $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Validation : $[C] = [\varepsilon_0]\,L$ *et* $C > 0$

Capacité linéique *ou capacité par unité de longueur* $\Gamma = \frac{C}{h}$ *:* $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

10. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges : $\begin{cases} r \le R :\ \vec{E} = \frac{\rho\,r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \ge R :\ \vec{E} = \frac{\rho\,R^3}{3\,\varepsilon_0\,r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \iiint_{\substack{tout\\ l'espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\substack{volume\ mésoscopique\\ écorce\ d'épaisseur\ dr}} = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho\,r}{3\,\varepsilon_0}\right)^2}_{E(r\le R)} 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho\,R^3}{3\,\varepsilon_0\,r^2}\right)^2}_{E(r\ge R)} 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{\text{stockée}} = 2\pi\varepsilon_0\left(\frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^R r^4 dr + \int_R^{+\infty}\frac{R^6}{r^2}dr\right] = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left(\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \left[-\frac{R^6}{r}\right]_R^{+\infty}\right) = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left(\frac{R^5}{5} + R^5\right) = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5$$

En introduisant la charge totale de la sphère : $Q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$*, on trouve*

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5 = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}}$$

11. ❤ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

Système : tranche de section S et d'épaisseur dx

Bilan de charges (grandeur conservative) : $\mathbf{d^2 Q = \delta^2 q_{échangée}}$

$\delta Q(t)$ *à l'instant t :* $\delta \mathrm{Q}(t) = \rho(x,t)d\tau = \rho(x,t)\, S\, dx$

$\delta Q(t+dt)$ *à l'instant $t+dt$:* $\delta \mathrm{Q}(t+\mathrm{dt}) = \rho(x, t+\mathrm{dt})\, S\, dx$

Expression de la variation de charge $\mathrm{d}^2 Q = \delta Q(t+dt) - \delta Q(t) = \big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\big) S\, \mathrm{dx} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt\ \ S\, dx$

Expression de la charge échangée :

$$\delta^2 q_{échangée} = \delta q_{entrant} - \delta q_{sortant} = (i(x,t) - i(x+dx,t))\, dt = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt$$

Vecteur densité de courant $\vec{j}$ uniforme sur une section de conducteur : $\vec{j} = \vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\,\vec{e}_x$

Intensité traversant une section du conducteur : $i(x,t) = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_x(x,t)S$ D'où $\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dx$

Finalement $\delta^2 q_{échangée} = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dxdt$

En identifiant les deux expressions obtenues : $S\,\mathrm{dx}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x \mathrm{dt} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \iff \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$

Généralisation : $\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0}$

12. ❤ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ *soit* $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ *soit* $\vec{v}(t\to\infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \overrightarrow{v_{\ell im}}}$

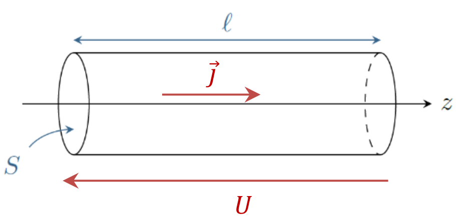
Charge traversant $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ pendant dt : $\mathrm{d}^2 q = nq\overrightarrow{v_{\ell im}}.\mathrm{dt}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

intensité traversant $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$: $\mathrm{d}I = \frac{d^2 q}{dt} = nq\overrightarrow{v_{\ell im}}.\overrightarrow{dS} = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ *soit*

$$\vec{j} = nq\overrightarrow{v_{\ell im}} = nq\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \boxed{ne^2\frac{\tau}{m}\vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) : $\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}$.

13. ❤ Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

Loi d'ohm locale : $\vec{j}(z) = \gamma\vec{E}$ *donc* $\vec{j}(z) = j(z)\,\overrightarrow{u_z}$; $I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j.\,dS = j(z)S = \gamma E(z)S$;

Or $dV = -\vec{E}.\,d\overrightarrow{OM}$ avec $U = \int_{V2}^{V1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = -\int_{M2}^{M1} \vec{E}.\,d\overrightarrow{OM} = +\int_{M1}^{M2} \vec{E}.\,d\overrightarrow{OM} = EL$;

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma\, S}$