COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°9 – semaine Pronote 13 : 25 au 30 Novembre 2024

Au programme des exercices

→ **Chapitre EM2 : Conduction électrique :** Vecteur densité de courant, équations de conservation de la charge, globale et locale, Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale, forme intégrale de la loi d'Ohm, résistance d'un conducteur cylindrique.

→ **Chapitre EM3 : Magnétostatique : Théorème d'Ampère (pas encore d'exploitation des équations de Maxwell)**

Questions de cours

1. ❤️ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

2. ** Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature d'un condensateur plan.

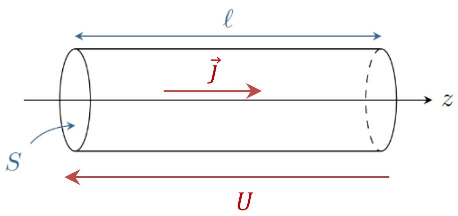
3. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges : $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

4. ❤️ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

5. ❤️ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

6. ❤️ Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz)du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



a) Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

b) Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique puis la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

7. Considérons une particule chargée de masse m et de charge q pénétrant à l'instant $t = 0$ dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$. En admettant que le mouvement est circulaire, déterminer les caractéristiques de la trajectoire : rayon et pulsation.

8. ** Reprendre la question précédente sans admettre que la trajectoire est circulaire.

9. ❤️ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

10. ❤️ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1$- V_2 la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad soit\ \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad soit \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

2. ** Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature d'un condensateur plan.

Il y a invariance de la distribution de charges par translation selon x et y ; on a donc selon le principe de Curie V qui ne dépend que de z

Equation de Laplace : $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$ soit en intégrant par rapport à z : $V(z) = Az + B$

$$U = V_A - V_B = V(z=0) - V(z=e)$$

En prenant $V(z=0) = 0$, on a donc $V(z=e) = -U$

Conditions aux limites : $V(z=0) \underbrace{=}_{\substack{formule\\ en\ z=0}} B = 0$ et $V(z=e) \underbrace{=}_{\substack{formule\\ en\ z=}} Ae = -U$

$$V(z) = Az + B = -\frac{U}{e}z$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{u_z} = \frac{U}{e}\overrightarrow{u_z}$$

Remarque : on pouvait se contenter de déterminer $\frac{dV}{dz}$, avec d'après $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$,

$$\frac{dV}{dz} = A = cte = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{V(z=e) - V(z=0)}{e-0} = -\frac{U}{e}$$

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{u_z} = \frac{U}{e}\overrightarrow{u_z}$$

Loi de Coulomb : Au voisinage immédiat du conducteur, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{ext}}$ soit ici en se plaçant au niveau de la plaque chargée positivement, qu'on peut choisir comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$:

$$\vec{E}(z=0) = E_0\vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z = \frac{Q}{S\varepsilon_0}\vec{u}_z = \frac{U}{e}\overrightarrow{u_z}$$

Avec par définition $C = \frac{Q}{U} = \frac{S\,\varepsilon_0}{e} = \frac{\varepsilon_0\,S}{e}$

3. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges : $\begin{cases} r \le R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \ge R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

$$\mathcal{E}_{stockée} = \iiint_{\substack{tout\\ l'espace}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\substack{volume\ mésoscopique\\ écorce\ d'épaisseur\ dr}} = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{stockée} = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\right)^2}_{E(r\le R)} 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\right)^2}_{E(r\ge R)} 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{E}_{stockée} = 2\pi\varepsilon_0\left(\frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^R r^4 dr + \int_R^{+\infty}\frac{R^6}{r^2}dr\right] = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left(\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \left[-\frac{R^6}{r}\right]_R^{+\infty}\right) = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left(\frac{R^5}{5} + R^5\right) = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5$$

En introduisant la charge totale de la sphère : $Q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, *on trouve*

$$\boxed{\mathcal{E}_{stockée} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5 = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}}$$

4. ❤ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

Système : tranche de section S *et d'épaisseur* dx

Bilan de charges (grandeur conservative) : $\boldsymbol{d^2Q = \delta^2 q_{échangée}}$

$\delta Q(t)$ *à l'instant t :* $\delta Q(t) = \rho(x,t)d\tau = \rho(x,t)\, S\, dx$

$\delta Q(t+dt)$ *à l'instant t + dt :* $\delta Q(t+dt) = \rho(x,t+dt)\, S\, dx$

Expression de la variation de charge $d^2Q = \delta Q(t+dt) - \delta Q(t) = \big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\big)S\, dx = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_x dt\;\; S\, dx$

Expression de la charge échangée :

$$\delta^2 q_{échangée} = \delta q_{entrant} - \delta q_{sortant} = (i(x,t) - i(x+dx,t))\, dt = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt$$

Vecteur densité de courant $\vec{j}$ *uniforme sur une section de conducteur :* $\vec{j} = \vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\,\vec{e}_x$

Intensité traversant une section du conducteur : $i(x,t) = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S} = j_x(x,t)S$ D'où $\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dx$

Finalement $\delta^2 q_{échangée} = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\, dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dxdt$

En identifiant les deux expressions obtenues : $S\, dx\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_x dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\, dx\, dt \iff \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$

Généralisation : $\boldsymbol{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0}$

5. ❤ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\,\vec{v}$ *soit* $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ *soit* $\vec{v}(t \to \infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \overrightarrow{v_{\ell im}}}$

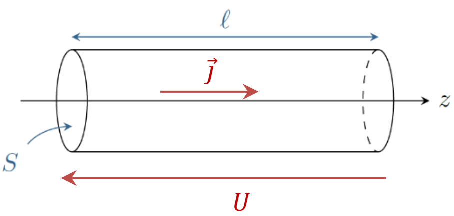
Charge traversant $\overrightarrow{dS}$ *pendant* dt *:* $d^2q = nq\overrightarrow{v_{\ell im}}.dt.\overrightarrow{dS}.$

intensité traversant $\overrightarrow{dS}$ *:* $dI = \frac{d^2q}{dt} = nq\overrightarrow{v_{\ell im}}.\overrightarrow{dS} = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ *soit*

$$\vec{j} = nq\overrightarrow{v_{\ell im}} = nq\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \boxed{ne^2\frac{\tau}{m}\vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) : $\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}.$

6. ❤ Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



a) Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

b) Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique puis la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

Loi d'ohm locale : $\vec{j}(z) = \gamma\vec{E}$ *donc* $\vec{j}(z) = j(z)\,\overrightarrow{u_z}$; $I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j.dS = j(z)S = \gamma E(z)S$;

Or $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$ avec

$$U = \int_{V2}^{V1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = -\int_{M2}^{M1}\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = +\int_{M1}^{M2}\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = EL$$

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma\,S}$

puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge :

$$\boldsymbol{p \underbrace{=}_{\text{déf}} \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}}$$

Dans les milieux ohmiques, afin de maintenir le courant dans le conducteur, le champ électrique $\vec{E}$ *doit fournir de l'énergie aux charges pour compenser les pertes dues aux forces de friction.*

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ *(hypothèse ARQS)*

$$p_{Joule} = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} = \gamma\|\vec{E}\|^2 > 0$$

$$.P = \iiint \vec{j}.\vec{E}\,d\tau = \vec{j}.\vec{E}.\mathcal{V} = jE.\mathcal{V} = \frac{I}{S}\frac{U_{AB}}{\ell}\mathcal{V} = \frac{I}{S}\frac{U_{AB}}{\ell}S\ell = I.U_{AB} = RI^2$$

On retrouve la loi de Joule macroscopique (exprimée en W) $\boxed{\boldsymbol{P = RI^2}}$

7. Considérons une particule chargée de masse m et de charge q pénétrant à l'instant $t = 0$ dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$. En admettant que le mouvement est circulaire, déterminer les caractéristiques de la trajectoire : rayon et pulsation.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule : $m\vec{a} = \vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

Etude cinématique : choix des coordonnées polaires, soit pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad \vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \underbrace{-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

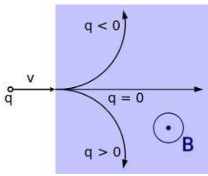
Si la vitesse est constante (mouvement circulaire uniforme) : $v = v_0 = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} = \underbrace{-\frac{{v_0}^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N}$$

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_r}$: $-m\frac{{v_0}^2}{R} = qv_0B$ soit

$$\boxed{R = \left|\frac{mv_0}{qB}\right|}$$

rayon de la trajectoire circulaire. De plus, $\omega = \frac{v_0}{R} = -\frac{qB}{m}$.



Il s'agit d'une grandeur algébrique : si $q > 0, \omega < 0$: rotation dans le sens horaire, si $q < 0, \omega > 0$: rotation dans le sens trigonométrique

pulsation cyclotron à laquelle est parcourue la trajectoire :

$$\boxed{\omega_c = |\omega| = \left|\frac{qB}{m}\right|}$$

8. ** Reprendre la question précédente sans admettre que la trajectoire est circulaire.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule : $m\vec{a} = \vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

En choisissant des coordonnées cartésiennes, et en projetant sur les vecteurs de la base d'étude, on obtient :

$m\ddot{x} = q\dot{y}B$; $\quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B$; $\quad m\ddot{z} = 0$

La 3ème équation différentielle s'intègre directement en 2 temps et compte tenu des conditions initiales :

$\dot{z}\,(t = 0) = 0$ et $z\,(t = 0) = 0$, on obtient $\boldsymbol{z\,(t) = 0}$.

Le **mouvement a donc lieu dans le plan** (xOy).

On pose $u = x + iy$, soit $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

En exploitant les équations (1) et (2) issues de la projection du PFD :

$\ddot{x} = \frac{q\dot{y}B}{m}$ (1); $\quad \ddot{y} = -\frac{q\dot{x}B}{m}$ (2) :

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} = \frac{q\dot{y}B}{m} - i\frac{q\dot{x}B}{m} = -i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} + i\frac{qB}{m}\dot{u} = 0$$

En posant $\tau = \frac{m}{qB}$: $\ddot{u} + i\frac{1}{\tau}\dot{u} = 0$ soit

$$\dot{u}(t) = Ae^{-\frac{it}{\tau}}$$

Pour déterminer la constante d'intégration :

Condition initiale de l'énoncé : $\dot{u}(t = 0) = \dot{x}(t = 0) + i\dot{y}(t = 0) = v_0 \underbrace{=}_{\substack{expression \\ \grave{a}\, t=0}} A$, soit

$$\dot{u}(t) = v_0e^{-\frac{it}{\tau}} = v_0(\cos(-t/\tau) + i\sin(-t/\tau))$$

En posant $\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{qB}{m}$:

$$\dot{u}(t) = v_0(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = v_0(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) = \dot{x} + i\dot{y}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\dot{x}(t) = v_0\cos(\omega t) \qquad \dot{y}(t) = -v_0\sin(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, et en exploitant ls conditions initiales : $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + x_0 \underbrace{=}_{\substack{conditions\\ itnitiales}} \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) + y_0 \underbrace{=}_{\substack{conditions\\ itnitiales}} \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

Trajectoire : cercle de centre Ω (0 , $-\frac{v_0}{\omega}$, 0), de rayon $R = \left|\frac{v_0}{\omega}\right| = \boxed{\left|\frac{m\,v_0}{q\,B}\right| = R}$ parcouru à vitesse constante v_0.

9. ❤️ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Choix des coordonnées cylindriques

Eude des symétries et invariances (à détailler soigneusement !) : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r *passant par le point M étudié (attention ! l'orienter !) ;*

calcul de la circulation :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r)\vec{e}_\theta.r\,d\theta\ \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé : si $r \geq a$, $I_{enlacé} = I$;

si $r \leq a$: $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.\overrightarrow{dS} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$

On a alors $I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z.\pi r^2\vec{e}_z = \frac{Ir^2}{a^2}$

théorème d'Ampère : $\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \mu_0\, I_{enlacé}$

si $r \leq a$*, alors* $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\vec{e}_\theta$ *; si* $r \geq a$*, alors* $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

10. ❤️ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z = B(r)\vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur h telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe r_i et r_j :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation : $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \big(B(r_1) - B(r_2)\big)L$ et $I_{enlacé} = 0$: conclusion : champ intérieur uniforme

Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ; $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$ et $I_{enlacé} = \mathrm{nLI}$: conclusion : $\vec{B} = \mu_0 n\, I\, \vec{e}_{axe}$ à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.