TD CHAPITRE THM.1 : TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME STATIONNAIRE

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. La loi de Fourier est une loi vectorielle, elle peut être projetée dans un second temps.
2. Les lignes de champ de densité de flux thermique ont toujours le sens des températures décroissantes.
3. L'ordre de grandeur de la conductivité thermique doit être connu pour l'air, les matériaux de construction, les métaux.
4. Vous devez être capables de reprendre toute l'analogie entre conduction thermique et conduction électrique en régime stationnaire.
5. Lors de l'utilisation de la loi de Newton de la convection, réfléchissez toujours bien aux **signes** et aux **dimensions**.
6. Vous devez être capable de faire un bilan enthalpique sur un petit tronçon de conducteur comme dans le cours, éventuellement en ajoutant des échanges latéraux et/ou une source.
7. Il faut apprendre à faire un bilan d'énergie dans le cas d'une conduction radiale en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Données pour l'ensemble du TD : On donne l'opérateur gradient

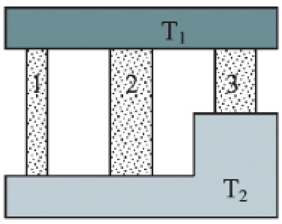
en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{z,r} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e}_z$

en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$

A SAVOIR FAIRE

Exercice 1. Flux thermiques *(O. Alloschery)* 2 | 1

Deux thermostats de températures T_1 et T_2 sont reliés par 3 barres de cuivre de longueurs $L_1 = L_2 = 2L_3$ et de sections $S_3 = S_2 = 4S_1$, calorifugées sur les parois latérales. Que peut-on dire des flux thermiques ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 traversant chacune des barres ?



(a) $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ (b) $\phi_3 < \phi_2 < \phi_1$

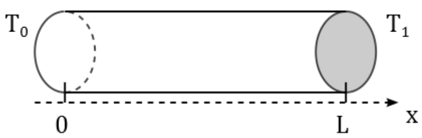
(c) $\phi_2 < \phi_3 < \phi_1$ (d) aucune de ces réponses

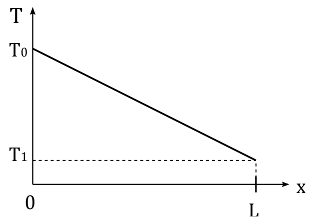
Si la barre 1 est remplacée par une barre en bois traversée par un flux ϕ_1', comparer ϕ_1 et ϕ'_1

Exercice 2. Perte d'énergie thermique 1 | 1

Calculer la perte d'énergie thermique au travers d'un mur en briques de 8 cm d'épaisseur, 4 m de hauteur et de 2 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 33°C et de 23°C.
On donne, pour les briques du mur : $\lambda = 0{,}69\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

Exercice 3. Exploitation des conditions aux limites IMPORTANT | 1 | 1





Etablir l'équation donnant $T(x)$ en fonction des données ci-dessus, ainsi que l'expression de la densité de flux thermique associée.

Exercice 4. Résistances en série et en parallèle 2 | 1

1) Montrer que deux résistances thermiques $(R_{th})_1$ et $(R_{th})_2$ **en série** équivalent à une résistance thermique unique dont on déterminera la valeur.
2) Montrer que deux résistances thermiques $(R_{th})_1$ et $(R_{th})_2$ **en parallèle** équivalent à une résistance thermique unique dont on déterminera la valeur.

Exercice 5. Sensation de chaud et de froid *(O. Alloschery)* IMPORTANT | 2 | 2

Lorsqu'on touche des objets portés à la même température mais de constitution différente, la température ressentie n'est pas la même ; ainsi, un observateur posant sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.

On propose ici une modélisation très simplifiée de ce phénomène, appelé « effusivité ».

Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$.

On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2.

On se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$.

1) Établir l'expression de $T(x)$ dans les deux cylindres en fonction de x, des longueurs L_1 et L_2 et des températures T_1, T_c et T_2.

2) Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données. Cette température est la température ressentie par la personne qui touche le matériau.

3) Retrouver ce résultat par association de résistances.

4) Que devient cette température en considérant $L_1 = L_2$?

5) Application : Calculer T_c pour un contact main-bois puis pour un contact main-acier ($L_1 = L_2$) ; Commenter.

Données : main : $T_1 = 37°C$ $\lambda_1 = 10\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ bois : $T_2 = 20°C$ $\lambda_2 = 1\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$
acier : $T_2 = 20°C$ $\lambda'_2 = 100\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$

Exercice 6. Modélisation électrique d'un problème thermique 2 | 1

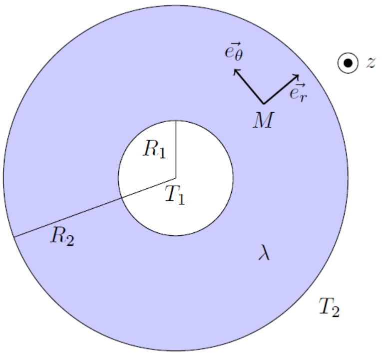
Etablir un schéma électrique équivalent d'un point de vue thermique au système de la photo.

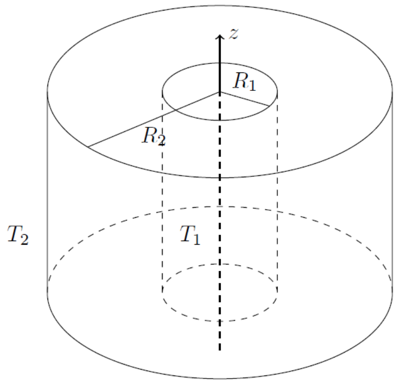
Exercice 7. Association de résistances thermiques (d'après Mines-Pont) IMPORTANT | 2 | 1

1) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ.
2) Les faces de ce matériau sont maintenues à $T_1 = 273\ K$ et $T_2 = 293\ K$. Calculer le flux thermique qui traverse ce matériau. Dans quel sens se fait ce transfert thermique ?
A.N. $S = 2\ \mathrm{m}^2$; $e = 10\ \mathrm{cm}$; $\lambda = 0{,}9\ \mathrm{SI}$.
3) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant $\lambda' = 0{,}03\ \mathrm{SI}$. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?
4) Il faut en réalité tenir compte de l'existence de phénomènes de convection du côté extérieur du mur, en contact avec l'air à la température $T_{air} < T_1$. Exprimer les flux en présence ou en absence de matériau isolant. Conclure.

Exercice 8. Régime stationnaire en géométrie cylindrique IMPORTANT | 1 | 2

On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h, faite dans un matériau de conductivité λ. On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r.



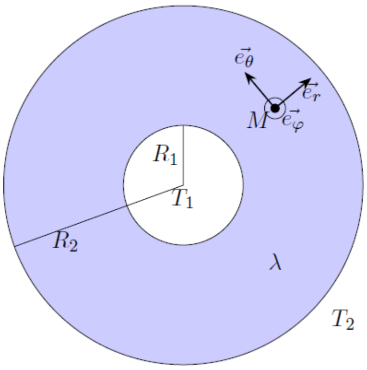


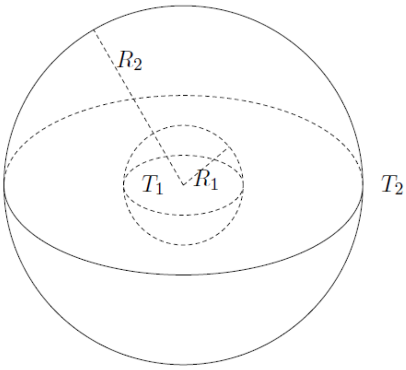
On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

1) Etablir L'expression du flux thermique puis celle du profil de température au sein de la canalisation.
2) Etablir l'expression de sa résistance thermique.

Exercice 9. Régime stationnaire en géométrie sphérique IMPORTANT | 1 | 2

On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ. On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r.





On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.

1) Etablir L'expression du flux thermique puis celle du profil de température au sein de la sphère.

2) Etablir l'expression de sa résistance thermique.

Exercice 10. Température dans un barreau et effet Joule IMPORTANT | 2 | 2

On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S, repéré par l'axe (Ox). On supposera que le problème ne dépend que de x. Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1. De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I. On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le barreau.

2) En déduire le profil de température à l'intérieur du barreau. Montrer que la température est maximale en un point intérieur au barreau.

Exercice 11. Ailette de refroidissement *(E. Thibierge)* IMPORTANT | 2 ou 3 | 2 ou 3

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.
On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit $d\varphi\,(x) = h(T(x) - T_0)\,\mathrm{d}S$.

Figure 1 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

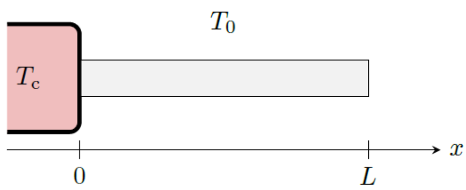


Figure 2 – Schéma de l'ailette étudiée.

Hypothèses de travail :

- le régime est stationnaire et la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1) Montrer que la température vérifie l'équation différentielle : $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2) Résoudre cette équation différentielle.

3) Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

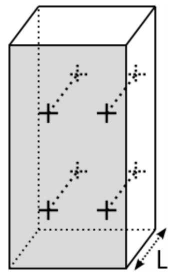
4) On observe sur la figure 1 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

Exercices incontournables

Régime stationnaire - Loi de Fourier, résistances thermiques

Exercice 12. Pont thermique ***(A. Leuridan)*** **2 | 1**

Un mur isolant d'épaisseur L est constitué d'un matériau homogène de conductivité thermique $\lambda_1 = 0{,}04\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$ et de tirants d'acier qui le traversent de part en part (conductivité thermique de l'acier : $\lambda_2 = 43\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$). La surface des tirants représente 0,2 % de la surface totale du mur.



1) Etablir l'expression du flux de chaleur traversant une surface S de ce mur en fonction des températures intérieure et extérieure.

2) Calculer le rapport $\frac{\phi_{tirants}}{\phi_{total}}$; commenter.

3) Retrouver ce résultat en introduisant des résistances thermiques.

Exercice 13. Isolation d'un mur [oral banque PT] ***(E. Thibierge)*** IMPORTANT **| 2 | 1**

Le secteur du bâtiment représente 44% de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31 %). Chaque année, le secteur du bâtiment émet plus de 123 millions de tonnes de CO_2, près du quart du total national, ce qui en fait l'un des domaines clé dans la lutte contre le réchauffement climatique et la transition énergétique. Pour rendre le bâtiment plus économe en énergie, il faut rénover massivement l'existant et développer des normes plus strictes en termes de consommation d'énergie pour les bâtiments neufs. C'est l'objet de la politique de l'énergie dans les bâtiments.

(Extrait du site internet du Ministère de la Transition Écologique et Solidaire)

On s'intéresse à un mur de béton de surface S = 25 m^2 et d'épaisseur e = 15 cm. Le béton a pour conductivité thermique λ = 0,92 W· m^{-1}·K^{-1}. Il règne à l'extérieur de l'habitation une température de 4 °C et à l'intérieur une température de 19 °C.

1) Déterminer et tracer l'allure du profil de température $T(x)$ dans le mur en régime permanent.

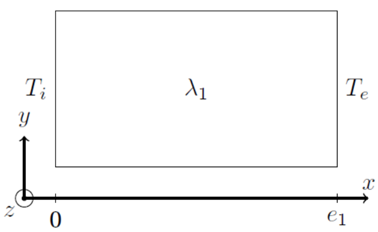
2) On superpose au mur une épaisseur e' de polystyrène expansé de conductivité λ' = 0,036 W· m^{-1}·K^{-1}. Déterminer l'épaisseur e' nécessaire pour diviser la consommation en chauffage de l'habitation par 10.

3) Déterminer et tracer l'allure du nouveau profil de température.

4) Dans ce mur se trouve une fenêtre en double vitrage de 2 m^2 de conductivité thermique surfacique g_{fen} = 2,8 W· m^{-2}·K^{-1}. Calculer le flux total au travers du mur.

Exercice 14. Du simple au double vitrage ***(CCP 2016, oral ATS 2021)*** IMPORTANT **| 2 | 1**

On considère une pièce séparée de l'extérieur par une épaisseur de verre de conductivité λ. La température intérieure de la pièce est T_i et la température extérieure T_e. On se place en régime stationnaire dans toute la suite.



1) On considère un simple vitrage de verre d'épaisseur e et de surface S. On suppose que la face intérieure de la vitre est à la température T_i et la face extérieure à la température T_e.

   a) Déterminer le flux ϕ_1 qui traverse la vitre en fonction de λ, S, e, T_i et T_e.

   b) Faire l'application numérique de ce flux.

2) On considère un double vitrage avec une épaisseur e de verre, puis une épaisseur e d'air, et enfin une épaisseur e de verre.

a) Déterminer et estimer le flux ϕ_2 qui traverse le double vitrage.

b) Exprimer $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ et représenter l'évolution de la température dans le double vitrage.

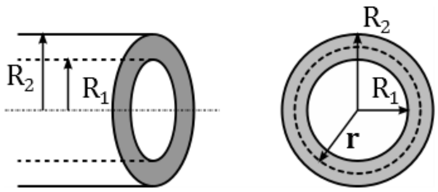
3) Il faut en réalité tenir compte d'une résistance supplémentaire due à l'interface verre-air. Le flux thermique est alors donné par $\phi = hS(T_{paroi} - T_{air})$. Exprimer cette résistance.

Que vaut alors le rapport $\frac{\phi_2}{\phi_1}$?

Données :
λ_{air} = 0,025 W·m^{-1}·K^{-1}, λ = 1,2 W·m^{-1}·K^{-1}, T_e = 270 K, T_i = 292 K, e = 3 mm, S = 2 m^2, h = 10 W·m^{-2}· K^{-1}.

Exercice 15. Pertes autour d'un tuyau d'eau chaude *(oral ATS)* IMPORTANT 2 | 3

Un tuyau de cuivre de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2, de conductibilité thermique λ et de longueur L grande devant son diamètre conduit de l'eau chaude à la température $\theta_1 = 80°C$. L'air ambiant est à $\theta_2 = 20°C$.



On cherche à évaluer Φ, puissance thermique perdue vers l'extérieur en régime stationnaire.

a. Exprimer la puissance thermique traversant le cylindre de rayon r compris entre R_1 et R_2 (de longueur L) en fonction de j_Q, r et L. En déduire l'équation différentielle liant T, r, λ et Φ.

b. Déterminer la puissance thermique perdue vers l'extérieur.

c. Application numérique.

Données : $\lambda = 384 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$; $R_1 = 10$ mm ; $R_2 = 12$ mm ; $\ln(1{,}2) = 0{,}18$.

Exercice 16. Isolation d'une conduite ***(d'après CCINP PO 2021)*** 2 | 1

On considère une conduite en acier qui contient de la vapeur sous pression à la température T_i qu'on cherche à isoler de l'extérieur à la température T_e avec une couche d'amiante.

On donne :

— $h_i \approx 1{,}2 \times 10^4 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ le coefficient conducto-convectif entre la vapeur et la conduite

— $h_e \approx 1{,}2 \times 10^1 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ le coefficient conducto-convectif entre l'isolant et l'air extérieur

— $\lambda_c \approx 4 \times 10^2 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ la conductivité de l'acier

— $\lambda_i \approx 2 \times 10^{-1} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ la conductivité de l'isolant (de l'amiante en l'occurrence).

— $R_1 = 95$ mm le rayon intérieur de la conduite

— $e = 5$ mm l'épaisseur de la conduite

Est-il vrai qu'en terme d'isolation plus l'épaisseur d'isolant est grande, mieux c'est? Si tel n'est pas le cas, quelle est l'épaisseur x d'isolant optimale?

Régime stationnaire avec terme de source ou de convection dans le bilan d'enthalpie

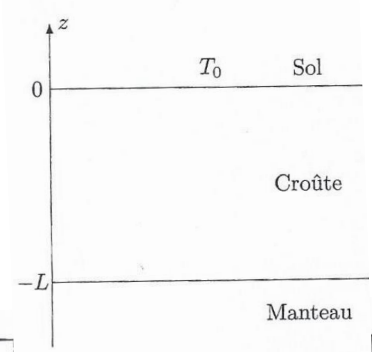
Exercice 17. Survie dans un igloo *(A. Leuridan)* IMPORTANT | 2 | 1

Évaluer l'épaisseur e de glace nécessaire pour que dans un igloo cubique de côté $a = 1$ m, quatre esquimaux puissent maintenir, par la puissance thermique $P = 4 \times 50 = 200\ W$ qu'ils dégagent, une température intérieure $T_i = +10°C$ alors que la température extérieure est $T_e = -10°C$.

Les déperditions au niveau du sol sont supposées négligeables.

On donne la conductivité de la neige compactée : $\lambda = 0{,}5\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

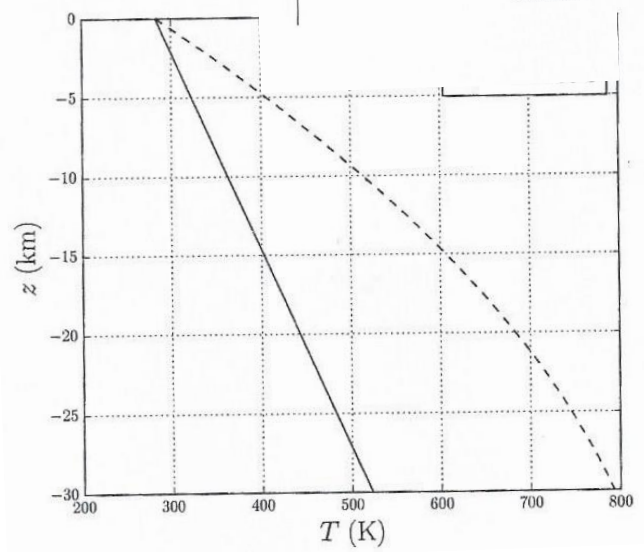
Exercice 18. Chauffage par le sous-sol *(D'après Dunod - J'assure BCPST 2)* 2 | 2



La croûte continentale terrestre est considérée comme une couche homogène d'épaisseur $L = 30$ km et de conductivité thermique $\lambda = 2{,}5$ $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$. Nous nous ramenons à une situation à une variable d'espace z en géométrie cartésienne en considérant que la croûte est comprise entre les plans $z = 0$ et $z = -L$ (cf. fig. ci-contre) : la température $T(M)$ en un point M de cet espace ne dépend alors que de sa côte z car nous nous limitons à l'étude des régimes stationnaires.

Nous supposons que la température en $z = 0$ est imposée : $T(0) = T_0 = 283$ K.

Le manteau situé sous la croûte ($z < -L$) fournit à celle-ci en $z = -L$ une puissance thermique par unité de surface notée ϕ_m et supposée constante. Les éléments radioactifs de la croûte libèrent par ailleurs une puissance thermique volumique (par unité de volume) p supposée uniforme.



La figure de droite montre deux profils de température (courbes a et b) simulés avec la même valeur de flux ϕ_m et des valeurs différentes de p notées p_1 et p_2.

a. On commence par négliger dans cette question la présence de radioactivité; on a donc $p = p_1 = 0$.

  1. En étudiant les échanges d'énergie sur un volume de matière adapté aux symétries du problème, établir une équation différentielle vérifiée par $T(z)$.

  2. Préciser les conditions aux limites imposées en $z = -L$ puis déterminer l'expression de $T(z)$ notamment en fonction de ϕ_m.

  3. Identifier la courbe (a ou b) associée à cette expression de $T(z)$ et en déduire le flux géothermique par unité de surface au niveau du sol ($z = 0$).

b. L'influence de la radioactivité est maintenant prise en compte ($p = p_2 \neq 0$) et nous nous intéressons à la courbe qui ne convenait pas dans la question précédente.

  1. A l'aide d'un nouveau bilan, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$.

  2. Comment voit-on sur le tracé des courbes a et b que la condition aux limites en $z = -L$ est inchangée ? Déterminer l'expression de $T(z)$.

  3. A partir d'une exploitation graphique, proposer une estimation de p_2.

  4. Déterminer le flux géothermique par unité de surface au niveau du sol et conclure.

Exercice 19. Fusible *(A. Leuridan)* IMPORTANT | 2 ou 3 | 2

Un fusible est constitué d'un fil cylindrique en plomb de rayon r et de longueur L, de conductivité thermique λ et de conductivité électrique σ, traversé par un courant d'intensité I. Le fil est enfermé dans une capsule remplie d'un isolant thermique.

Ses deux extrémités sont serties dans des plots métalliques massifs qui sont à une température T_0 constante (ambiante). On se placera dans le cadre d'un régime stationnaire.

1) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le fil.

2) Etablir l'expression de l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une constante positive α à exprimer en fonction de σ, λ, I et r.

3) Donner l'expression de la température le long du fil.

4) Déterminer le diamètre du fil pour qu'il fonde pour une intensité égale à 5 A.

A.N. : $\lambda\ (Pb) = 34\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$; $\sigma = 4{,}5.10^6\ \mathrm{S.m^{-1}}$; $L = 5\ \mathrm{cm}$; $T_0 = 25\ °C$; $T_{fusion} = 328°C$

Exercice 20. Température d'un mammifère *(d'après TPE)* IMPORTANT | 2 | 2 ou 3

Un mammifère est modélisé par une sphère de rayon R. A l'intérieur de son corps, il produit une puissance thermique volumique φ_0. Ce mammifère vit dans un fluide de conductivité thermique λ qui peut être de l'air ou de l'eau. La température de ce milieu fluide loin de la sphère est $T_0 = 283\ K$.

On se place en régime stationnaire, et on suppose le courant thermique radial à l'intérieur du mammifère,

$$\overrightarrow{J_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{u_r}$$

1) Exprimer le vecteur densité de flux thermique $j_{th}(R)$ entre le mammifère et le fluide environnant en fonction de φ_0 et R.

2) Montrer que pour $r > R, 4\pi r^2 j_{th}(r) = A = cte$. Expliciter A.

3) En déduire l'expression de la température $T(r)$ dans le fluide à l'extérieur de l'animal.

4) Déterminer la température cutanée du mammifère T_c.

5) On donne $\lambda_{air} = 5\ USI$ et $\lambda_{eau} = 500\ USI$. Calculer la puissance volumique φ_0 pour un mammifère de rayon $R = 25\ cm$ et de température cutanée $T_c = 303\ K$. Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins alors qu'il existe des petits mammifères terrestres ?

Exercice 21. Température dans un réacteur piston *(E. Thibierge)* 2 ou 3 | 2 ou 3

Un réacteur piston est un type de réacteur chimique cylindrique sans agitation, dans lequel les réactifs sont injectés d'un côté, les produits récupérés de l'autre, et l'écoulement suffisamment lent pour que les différentes tranches de fluide ne se mélangent pas. Ce type de réacteur est par exemple utilisé pour réaliser en flux continu une réaction à la cinétique lente.

Étudions un tel réacteur de rayon a, voir figure 2, dans lequel a lieu une réaction exothermique libérant une puissance volumique α.

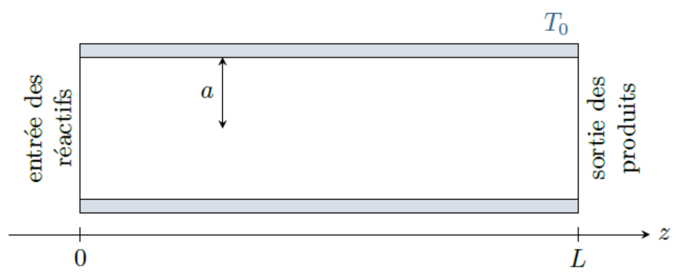


Figure 2 – **Schéma du réacteur piston étudié.**

La conductivité thermique λ du milieu réactionnel est supposée indépendante de l'avancement de la réaction. Le réacteur est refroidi par un écoulement d'eau à température uniforme T_0 tout autour du réacteur, le flux thermique surfacique échangé à l'abscisse z entre le réacteur et le système de refroidissement étant donné par la loi de Newton :

$$\varphi(z) = h(T(z) - T_0).$$

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z)$ en régime permanent.

2 - Identifier une longueur caractéristique ℓ de l'évolution de la température dans le réacteur.

3 - Résoudre cette équation, sachant que les réactifs sont introduits à la température T_0 et en notant T_S leur température de sortie.

Régimes quasi stationnaires

Exercice 22. Armoire électrique *(Oral ATS, 2022)* 2 | 2

On considère l'intérieur d'un tableau (d'une armoire) électrique refroidie par convection forcée.

• la puissance thermique générée au sein de l'armoire par effet Joule est $P_1 = P_{thermique} = 1{,}0\ kW$;

• la résistance thermique des parois du tableau est $R_{th} = 0\ {,}1\ K/W$;

• La capacite thermique de du système est $C = 1{,}0\ kJ\ /K$.

On considère, pour les deux premières questions, que la température de la pièce dans laquelle se trouve le tableau électrique est constante et vaut $T_{pièce} = 20°C$.

1. Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de la température du système et la mettre sous forme canonique.

2. Calculer la puissance thermique évacuée par convection naturelle puis en déduire celle à évacuer en convection forcée.

3. En déduire le débit d'air à envoyer sachant que sa température variait de 30°C entre l'entrée et la sortie de l'armoire.

La température à l'intérieur est de $50°C$, $\rho_{air} = 1\ \mathrm{kg/m^3}$, $c_p(air) = 1{,}0\ \mathrm{kJ.K^{-1}.kg^{-1}}$.

Exercice 23. Évolution de la température d'une pièce avec pertes thermiques 2 | 2

On cherche à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques, supposées suffisamment lentes pour que le régime soit quasi-stationnaire. On considère alors :

• la résistance thermique R_{th} des murs et parois diverses qui séparent la pièce de l'extérieur ;

• la capacité thermique C de la pièce (pour l'essentiel celle de l'air et du mobilier contenu dans la pièce) : cette grandeur va servir à évaluer les modifications de température de la pièce pour un apport donné d'énergie thermique.

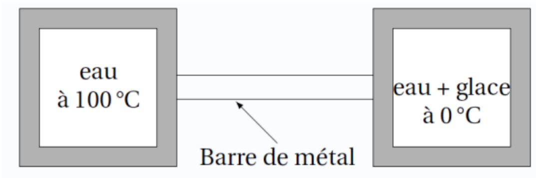
On note T_0 la température extérieure supposée constante.

a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la pièce. Quelle analogie électrique peut-on proposer ?

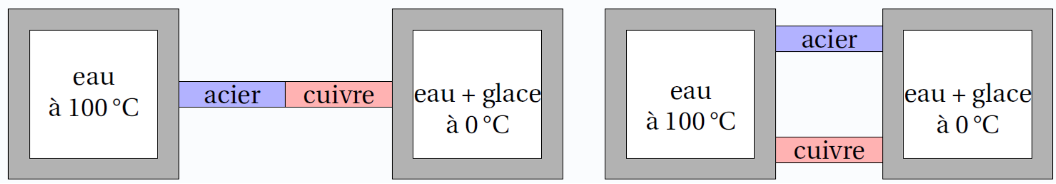
b. On ajoute maintenant un radiateur électrique de puissance P dans la pièce. Comment représenter le circuit électrique équivalent ? Que devient l'équation différentielle ?

Exercice 24. ARQS : Association de résistances et fonte de glace *(J. Kieffer)*

On considère le dispositif schématisé sur la figure suivante :



Les parois sont adiabatiques. Si la barre de métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes, tandis que si elle est en acier, elle fond en 40 minutes. En combien de temps la glace fond-elle dans les deux configurations représentées ci-dessous ?

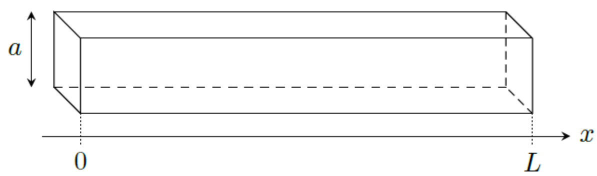


■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 25. Flux thermiques et densités de flux thermique *(E. Thibierge)* 1 | 1

1) On considère une barre à section carrée de côté a.

On impose $T(x=0) > T(x=L)$, et le régime stationnaire est supposé atteint. On suppose la température uniforme dans toute section de la barre mais dépendant de $x, T = T(x)$.



1.a -Justifier que $\overrightarrow{j_{th}} = j_x(x)\overrightarrow{e_x}$. Quel est le sens de $\overrightarrow{j_{th}}$? Le signe de j_x ?

1.b -Prévoir le signe du flux thermique $\Phi_e(x=0)$ entrant dans la barre par la face située en $x = 0$. L'exprimer en fonction de j_x.

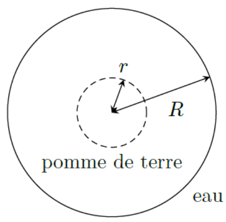
1.c -Mêmes questions pour le flux thermique sortant de la barre par cette même face $\Phi_s(x=0)$.

1.d -Mêmes questions pour le flux thermique entrant dans la barre par la face située en $x = L$.

1.e -Mêmes questions pour le flux thermique sortant de la barre par cette même face.

1.f -Comment les réponses aux questions précédentes sont-elles modifiées si $T(x=0) < T(x=L)$?

2 -Considérons à présent une pomme de terre, modélisée par une sphère isotrope de rayon R, en train de cuire dans de l'eau bouillante.



2.a -Indiquer le sens réel du vecteur densité de courant thermique. L'exprimer dans la base adéquate, en précisant le signe de la composante.

2.b -Prévoir le sens du flux thermique à l'interface entre la pomme de terre et l'eau. L'exprimer.

Exercice 26. Fabrication d'un four *(O. Alloschery)* 2 | 1

Le site http://sitepasite.free.fr/poterie/four.html décrit la fabrication d'un four électrique destiné à la cuisson de céramique. Celui-ci est branché sur le secteur (tension 230 V). La description donnée sur le site est la suivante :

Constitution : Les parois du four sont constituées de :
- 1,5 mm de tôle INOX
- 30 mm de laine de roche
- 60 mm de silicate de calcium
- 64 mm de fibre céramique

Dimensions intérieures du four :

300 mm × 300 mm × 300 mm.

Résistances électriques : 3 résistances sont couplées en série : deux résistances de 6,5 Ohm pour les côtés et une résistance de 2 Ohm pour le bas du four.

Données :

Matériau	Prix (∈/dm^{-3})	Masse vol. (kg/m^{-3})	Temp. maximale		λ (W/m/K)
Tôle inox	25	7800	300		30
Laine de roche HT	0,2		200	550	0,10
Silicate de calcium	2		250	1000	0,17
Fibre céramique	1,3		130 (comprimé)	1300	0,5

c. Calculer la résistance thermique du four R_{th}. On considérera que l'intérieur du four possède une température homogène. On donne le coefficient conducto-convectif de l'air : $h = 10$ W·K^{-1}·m^{-2}.

d. Pourquoi utiliser plusieurs résistances électriques et non une seule ?

e. Déterminer la température intérieure du four en régime stationnaire.

f. Le concepteur du four indique que la température atteinte est de 1280°C. Commentaires.

g. Pourquoi utiliser plusieurs isolants et non un seul ? Quelle est la température de la face extérieure de la tôle inox ?

Régimes stationnaires avec sources

Exercice 27. Igloo hémisphérique *(A. Leuridan)* 2 ou 3 | 2 ou 3

Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid ($\theta_{ext} = -10°C$). Les murs sont d'épaisseur $e = 50$ cm et chaque explorateur dégage une puissance de $P = 50$ W. L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique $\lambda = 0{,}5\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$.

Les déperditions au niveau du sol sont supposées négligeables.

1. Exprimer la puissance thermique traversant la demi-sphère de rayon r comprise entre R et $R + e$ en fonction du vecteur densité de flux thermique j_Q et de r. Cette puissance dépend-elle de r ?

2. En déduire l'équation différentielle liant T, r, λ et P.

3. Intégrer l'équation différentielle et déterminer la température à l'intérieur de l'igloo. Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ?

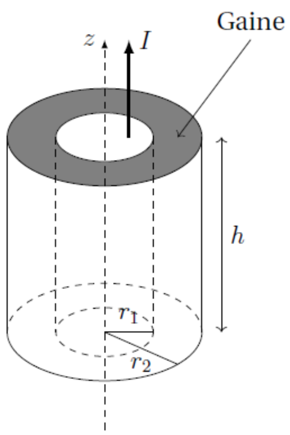
4. Application numérique : $R = 1$ m.

Exercice 28. Température dans un câble électrique *(d'après Mines Pont – J. Kieffer)* 2 ou 3 | 2

Un cylindre métallique de rayon r_1, de conductivité électrique γ et thermique K, est parcouru par un courant permanent total I, régulièrement réparti dans sa section. Une gaine en forme de couche cylindrique de rayon r_1 et $r_2 > r_1$ entoure le conducteur électrique. Sa conductivité thermique est λ. La température sur sa face extérieure est constante et notée T_2. Le régime est permanent.

1) Comment s'écrit la résistance électrique ? Quelle est la puissance totale dissipée par effet Joule ?

2) Exprimer de deux façons différentes le vecteur densité de flux thermique dans la gaine $\vec{j_Q}$. Exprimer la température T pour $r_1 < r < r_2$.



3) Exprimer la puissance Joule dissipée dans un cylindre de rayon $r < r_1$.

4) Exprimer la densité de flux thermique pour $r < r_1$. Tracer l'allure des fonctions $j_Q(r)$ et $T(r)$.

On notera T_0 la température sur l'axe du système.

Exercice 29. Fusible (Version 2) *(D'après ENSAM, J. Kieffer)* 2 | 3

Un fusible est modélisé par un cylindre de longueur L et de rayon R, de conductivités électrique σ et thermique λ. Un courant électrique d'intensité I le parcourt, la densité de courant électrique j est supposée uniforme dans une section et le flux thermique est radial (effets de bord négligés).

1) Donner la loi de Fourier. Interpréter le signe -. Exprimer la puissance thermique transférée en r.

2) Établir l'expression : $\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$

3) La température en surface est T_0. Déterminer $T(r)$. Où la température est-elle la plus grande ?

4) Soit T_f la température de fusion du fusible. Si le fusible fond pour une intensité I_n, déterminer l'évolution du rayon R_n en fonction de I_n.

5) De façon plus réaliste, le comportement en surface est gouverné par un flux conducto-convectif où h est une constante telle que $Rh \ll \lambda$: $\phi(R) = 2\pi RLh[T(R) - T_0]$. Déterminer la nouvelle valeur de R_n avec I_n.

Régimes stationnaires complexes

Exercice 30. Résolution de problème – Le projet « IceDream » *(A.L. Dautel)* 3 | 2

Extraits de la page web disponible à l'adresse https://www.3ds.com/fr/icedream *Firme Dassault*

Remorquer un iceberg pour avoir de l'eau potable

Le projet *icedream* est l'idée de l'ingénieur français Georges Mougin qui développe et affine son concept révolutionnaire depuis plus de 40 ans : remorquer des icebergs et les exploiter pour produire de l'eau douce !

Les fondamentaux du projet pilote sont donc les suivants : un iceberg d'environ 10 millions de tonnes, un remorqueur qui met 140 jours à relier Terre-Neuve et les Iles Canaries.

Estimer la proportion de l'iceberg qui fond par jour.

Photomontage (Uwe Kils)

Données

Enthalpie de fusion de la glace : $L_{fus} = 333\ kJ.kg^{-1}$

Puissance thermique P_{th} échangée par un système à la température T en contact sur une surface S avec un fluide à la température T_{fluide} dans le modèle conducto-convectif de Newton :

$$P_{th} = h\left(T_{fluide} - T\right)S$$

- coefficient de transfert thermique de l'air : $h \approx 5\ W.m^{-2}.K^{-1}$
- coefficient de transfert thermique de l'eau : $h \approx 10^2\ W.m^{-2}.K^{-1}$