TD THM.1 : TRANSFERTS THERMIQUES EN REGIME STATIONNAIRE - CORRIGES

Exercice 1. Flux thermiques *(O. Alloschery)*

Le gradient de température augmente lorsque la longueur de la barre diminue, donc j_Q augmente, donc le flux thermique augmente. De plus, le flux est proportionnel à la surface, donc il augmente avec la section de la barre : $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$

Enfin, le vecteur densité de lux augmente lorsque la conductivité du matériau augment (loi de Fourier), et le métal est une bien meilleur conducteur thermique que le bois. On a donc $\phi_1' < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3$

Exercice 2. Perte calorifique

Attention ! il s'agit ici d'évaluer un ordre de grandeur et non d'effectuer une mise en équation rigoureuse

$$\Phi = P_{th} = \left| \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right| = \left| \iint_{\Sigma} \lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(T) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right| \approx \lambda \frac{\Delta\theta}{e} S = \lambda \frac{\Delta\theta}{e} \ell h = 0{,}69\ kW$$

Exercice 3. Exploitation des conditions aux limites

On a montré $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{j_{Qx}}{\lambda} = cte = A$, soit $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$; $T(x) = Ax + B$

C.L. : $T(0) = T_0 = B$ et $T(L) = T_1 = AL + B = AL + T_0$ soit $A = \frac{T_1 - T_0}{L}$

Remarque : on pouvait également exploiter $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = cte = A = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_1 - T_0}{L}$

Finalement, $T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0$

Exercice 4. Résistances en série ou en parallèle

1) Résistances en série : $\Delta T_{tot} = \Delta T_1 + \Delta T_2 = R_1\Phi + R_2\Phi = (R_1 + R_2)\Phi = R_{éq}\Phi$

$$\boxed{R_{éq} = R_1 + R_2}$$

2) Résistances en parallèle : $\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} = \frac{\Delta T}{R_{éq}}$

$$\boxed{\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Exercice 5. Sensation de chaud et de froid

1) En régime stationnaire flux constant donc variation linéaire de la température : $T_i(x) = A_i x + \mathrm{B}_i$

Remarque : Attention ! ce ne sont pas les mêmes coefficients a priori ! les conductivités étant différentes, le gradient de température n'est pas le même.

A l'aide des C.L. en $x = 0$ et $x = -L_1$ dans le cylindre 1, puis en $x = 0$ et $x = L_2$ dans le cylindre 2, on trouve :

Cylindre 1 : $T_1(x) = -\frac{T_1 - T_c}{L_1} x + T_c$; cylindre 2 : $T_2(x) = -\frac{T_c - T_2}{L_2} x + T_c$.

2) Continuité du flux, donc, les sections étant identiques, de $j_{qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ (d'après la loi de Fourier) :

$j_{qx1}(x < 0) = j_{qx2}(x > 0)$, soit $\lambda_1 \frac{dT}{dx_{\mathbf{1}}} = \lambda_2 \frac{dT}{dx_{\mathbf{2}}} \Leftrightarrow \lambda_1 \boldsymbol{A_1} = \lambda_2 \boldsymbol{A_2} \Leftrightarrow \lambda_1 \frac{T_1 - T_c}{L_1} = \lambda_2 \frac{T_c - T_2}{L_2}$ d'où

$\left(\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}\right) T_c = \frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2$ soit $T_c = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$

$$\boxed{T_c = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

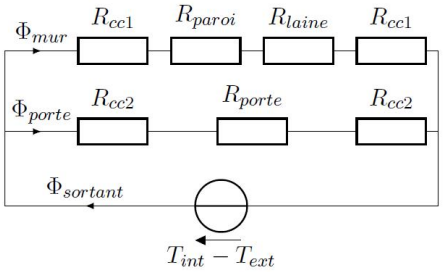
3) On pouvait retrouver ce résultat à l'aide des résistances thermiques en série : $\Phi = \frac{T_1 - T_c}{R_1} = \frac{T_c - T_2}{R_2}$ avec $R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S}$

(on pouvait même utiliser un pont diviseur de température ! $T_1 - T_c = \frac{R_1}{R_1+R_2}(T_1 - T_2)$)

4) $T_c = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ $A.N.$: Contact main-bois $T_c = 35{,}5°C$; Contact main-acier $T_c = 21{,}5°C$

Physiologiquement, l'observateur ressent au niveau du contact la température intermédiaire T_c, ce qui justifie que le bois lui paraît plus chaud que l'acier.

Exercice 6. Modélisation électrique d'un problème thermique



Exercice 7. Association de résistances thermiques

a) En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = \Phi$, avec $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ soit $j_{Qx} = cte$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ soit en cartésiennes à 1D : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underbrace{=}_{j_{Qx}=cte} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$\Phi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

b) $\Phi_1 = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) = 360\ W$

c) Avec $\Phi_1 = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ_1 par 10, il faut multiplier la résistance thermique R_{th} par 10. Association série : $(R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10 R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e\ \frac{\lambda'}{\lambda} = 3\ cm$

d) Conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_1 - T_{air})$ d'où $R_{cc} = (T_1 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/hS$

Association série : $R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc}$, soit $\Phi'_1 = \frac{\Delta T}{R_{tot,1}} = \frac{\Delta T}{\frac{e}{\lambda S} + R_{cc}}$ et $\Phi'_2 = \frac{\Delta T}{R_{tot,2}} = \frac{\Delta T}{10\frac{e}{\lambda S} + R_{cc}}$

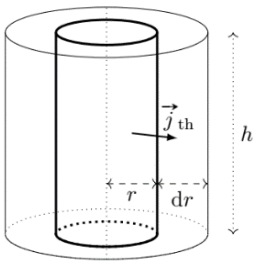
On a donc $\frac{\Phi'_2}{\Phi'_1} = \frac{\frac{e}{\lambda S} + R_{cc}}{10\frac{e}{\lambda S} + R_{cc}} \neq \frac{1}{10}$, voire si $R_{th,tot} \ll R_{cc}$ $\frac{\Phi'_2}{\Phi'_1} \approx 1$: on surestime beaucoup l'effet de l'isolation

---

Exercice 8. Régime stationnaire en géométrie cylindrique

1) On se place en coordonnées cylindriques en régime stationnaire et on suppose donc que $T(M,t) = T(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}, \cancel{t}) = T(r)$. Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ (« épaisseur du bocal ») et de hauteur h, tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr}\vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :

$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r)\,\vec{e}_r dS \vec{e}_r = j_Q(r) \iint_{S_r} dS = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 2\pi r h \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h = \phi$$

Par séparation des variables :

$$dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\frac{dr}{r}$$

En intégrant entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r}$$

$$T(r) - T_1 = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = T_2 - T_1$$

D'où

$$-\frac{\phi}{2\pi h\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$:

$$T(r) - T_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

$$\boxed{T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}$$

Remarque : on peut également prendre une primitive :

$$\int dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\int\frac{dr}{r}$$

Soit

$$T(r) = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\ln(r) + K$$

Il faut alors exploiter une seconde condition aux limites pour déterminer K, soit ici $T(R_1) = T_1$

Remarque 2 : à partir (notamment) de l'expression $-\frac{\phi}{2\pi h\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$, on peut déterminer $j_Q(r)$ avec $\phi = j_Q(r)2\pi rh$

soit

$$j_Q(r) = \frac{\phi}{2\pi rh} = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\frac{2\pi h\lambda}{2\pi rh} = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\frac{\lambda}{r}$$

Remarque : on pouvait également calculer $j_Q(r) = -\lambda\frac{dT}{dr}$

En intégrant entre R_1 et R_2 :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h\lambda}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On définit alors **la résistance thermique en géométrie cylindrique**

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi h\lambda}}$$

Remarque : si l'épaisseur du cylindre $e = R_2 - R_1$ est faible devant R_1, alors

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \ln(1 + e/R_1) \sim e/R_1$$

$$T_1 - T_2 \sim \frac{e\phi_{1\to 2}}{2\pi hR_1\lambda} \quad \Rightarrow \quad R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} \sim \frac{e}{2\pi hR_1\lambda}$$

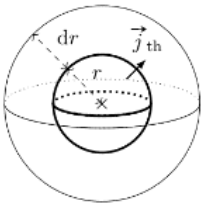
On retrouve alors l'expression en symétrie cartésien $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$.

Exercice 9. Régime stationnaire en géométrie sphérique

Choix des coordonnées sphériques ; on suppose, en se plaçant en régime stationnaire et par la même analyse des symétries que dans les exemples précédents, que $T(M,t) = T(r,\theta,\varphi,t) = T(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi},\cancel{t}) = T(r)$.

Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe\\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\overrightarrow{J_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda\frac{dT}{dr}\,\vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q(M,t)$ est radial et en régime stationnaire sa norme ne dépend que de r.

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r)\,\vec{e}_r dS\vec{e}_r = j_Q(r)\iint_{S_r} dS = j_Q(r)S_r = j_Q(r)4\pi r^2 \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2 = \text{constante}$$

Le flux traversant la surface sphérique de rayon R_1 est le même que celui traversant la surface sphérique de rayon R_2, ou que toute sphère de rayon $R_1 < r < R_2$.

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2\lambda}$$

Par séparation des variables :

$$dT = -\frac{\phi}{4\pi\lambda}\frac{dr}{r^2}$$

En intégrant entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = T_2 - T_1$$

D'où

$$\frac{\phi}{4\pi\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$:

$$T(r) - T_1 = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\boxed{T(r) = (T_2 - T_1)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1}$$

Détermination de la résistance thermique :

En intégrant entre R_1 et R_1 :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Il en résulte qu'entre deux sphères de rayons R_1 et R_2, la variation de température vaut

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

On définit alors **la résistance thermique en géométrie sphérique**

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Remarque : si l'épaisseur de la sphère $e = R_2 - R_1$est faible devant R_1, alors

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \sim e/{R_1}^2$$

$$T_1 - T_2 \sim \frac{\varphi e}{4\pi {R_1}^2 \lambda} \Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\varphi_{1\to 2}} \sim \frac{e}{4\pi {R_1}^2 \lambda}$$

Exercice 10. Température dans un barreau et effet Joule

1) Puissance dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_{Joule} = RI^2 = \frac{\ell}{\sigma S} I^2$

Puissance volumique dissipée par effet Joule :

$$p_J = \frac{\mathcal{P}_{Joule}}{V} = \frac{RI^2}{S\ell} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

Ou encore directement, si seule la puissance volumique est demandée :

$$p_J = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

2) Bilan issu du premier principe sur une tranche de largeur dx et de section S :

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{reçu,total} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \delta^2 Q_{entrant} + \delta^2 Q_{sortant} + \delta^2 Q_{Joule}$$

Avec $\delta^2 Q_{Joule} = p_J S dx dt = \frac{I^2}{\sigma S^2} S dx dt = \frac{I^2}{\sigma S} dx dt$

Remarque : on pouvait également écrire pour le système considéré : $dR = \frac{dx}{\sigma \pi r^2}$; $dP_J = \frac{dx}{\sigma S} I^2$;

$$\frac{\delta^2 Q_{reçu,total}}{dt} = 0 = \Phi(x) - \Phi(x+dx) + \frac{dx}{\sigma S} I^2 = -\frac{d\Phi}{\mathrm{dx}} dx + \frac{dx}{\sigma S} I^2 = 0 \iff \frac{d\Phi}{\mathrm{dx}} = \frac{I^2}{\sigma S} \qquad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(x) = j_{th}(x) S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$$

Soit

$$\frac{d\Phi}{\mathrm{dx}} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$$

Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie :

$$\frac{d\Phi}{\mathrm{dx}} = \frac{I^2}{\sigma S} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$$

Soit

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\sigma \kappa S^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}x^2 + Ax + \mathrm{B}$$

En exploitant les conditions aux limites :

$T(x=0) \underbrace{=}_{\text{C.L. énoncé}} T_0 \underbrace{=}_{\text{formule en } x=0} B$

$T(l) \underbrace{=}_{\text{C.L. énoncé}} T_1 \underbrace{=}_{\text{formule en } x=l} -\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}l^2 + Al + T_0$

soit $A = \frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}l + \frac{T_1 - T_0}{l}$;

$$T(x) = -\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}l + \frac{T_1 - T_0}{l}\right)x + T_0$$

$$\boxed{T(x) = \frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}(l-x)x + \frac{T_1 - T_0}{l}x + T_0 = \frac{1}{2}\frac{I^2}{\sigma\kappa S^2}(l-x)x + \frac{T_1 - T_0}{l}x + T_0}$$

Température maximale si

$$\frac{dT(x_M)}{dx} = 0 = -\frac{p_J}{\kappa}x_{\mathrm{M}} + A$$

Soit

$$x_M = \frac{A\kappa}{p_J} = \left(\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}l + \frac{T_1 - T_0}{l}\right)\frac{\kappa}{p_J}$$

$$\boxed{x_M = \frac{l}{2} + \left(\frac{T_1 - T_0}{l}\right)\frac{\kappa}{p_J} = \frac{l}{2} + \left(\frac{T_1 - T_0}{l}\right)\frac{\sigma\kappa S^2}{I^2}}$$

Remarque : si $T_1 = T_0$, $x_M = \frac{l}{2}$.

Remarque 2 : en exploitant la forme locale de l'équation de diffusion en régime stationnaire : $\mathrm{div}(\vec{j}_{th}) = \tau(M) = p_J$ avec

$$\mathrm{div}(\vec{j}_{th}) = \frac{dj_{th}}{dx} = -\kappa\frac{d^2T}{dx^2}$$

on trouvait directement

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa} = -\frac{I^2}{\sigma\kappa S^2}$$

Exercice 11. Ailette de refroidissement *(E. Thibierge)*

Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, la température ne dépend que de x : $T(x)$ soit $\overrightarrow{j_{th}} = j_x(x)\overrightarrow{e_x}$.

1) Sur la tranche entre x et $x + \mathrm{d}x$, 1er principe en régime stationnaire :

$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x+\mathrm{d}x) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$ soit

$$\delta Q = \Big(\big(j_x(x) - j_x(x+\mathrm{d}x)\big)ab - 2h(T(x) - T_0)ab\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t = -\left(\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a+b)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a+b)$ avec d'après la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}$, soit $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab}(T(x) - T_0)$

Avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}}$:

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0}$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

2) $T(x) = T_0 + Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$

La température ne pouvant tendre vers +∞ quand x tend vers +∞, $B = 0$.

C.L. : $T(x=0) = T_0 + A = T_c$ soit $\boxed{T(x) = T_0 + (T_c - T_0)e^{-x/\delta}}$

3) Puissance totale dissipée par l'ailette (convection): $\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} d\varphi(x)$ soit

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} h(T_c - T_0)e^{-\frac{x}{\delta}} 2(a+b)dx = 2h(T_c - T_0)(\mathrm{a+b})\sqrt{\frac{ab\lambda}{2h(a+b)}}$$

$$\boxed{\sqrt{2h(a+b)ab\lambda}(T_c - T_0) = \mathcal{P}}$$

3) En négligeant la surface vide entre les ailettes, les deux dispositions proposées par l'énoncé occupent environ la même surface, soit :

pour N^2 ailettes : $\mathcal{P}_{tot} = N^2\mathcal{P} = (T_c - T_0)N^2\sqrt{2h(a+b)ab\lambda}$

pour une seule grande ailette : $\mathcal{P'}_{tot} = (T_c - T_0)\sqrt{2h(Na+Nb)NaNb\lambda} = N\sqrt{N}\mathcal{P}$, d'où $\boxed{\frac{\mathcal{P}_{tot}}{\mathcal{P'}_{tot}} = \sqrt{N}}$.

EXERCICES

Exercice 12. Pont thermique *(A. Leuridan)*

Bilan direct avec $\Phi_i = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_{Qx}S$ et selon la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}$, avec en régime stationnaire Φ_i donc j_{Qx} et $\frac{dT}{dx}$ constants, soit $\Phi_i = j_{Qx}S = -\lambda\frac{dT}{dx}S = -\lambda_i\frac{T_{ext}-T_{int}}{L} = \lambda_i\frac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{L}}$

Résistances en parallèle avec $R_i = \frac{L}{\lambda_i S}$:

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{R_{th}}} = \Delta\mathrm{T}\left(\frac{1}{\mathrm{R_{th1}}} + \frac{1}{\mathrm{R_{th2}}}\right) = \frac{1}{L}\,\Delta T\,(S_1\lambda_1 + S_2\lambda_2) = \frac{S}{L}\,\Delta T\left(\frac{99{,}8}{100}\lambda_1 + \frac{0{,}2}{100}\lambda_2\right)$;

$\frac{\Phi}{\Phi_1} \approx 3$: Φ multipliée par un facteur d'environ 3 du fait de la présence des tirants d'acier !

Exercice 13. Isolation d'un mur [oral banque PT] *(E. Thibierge)*

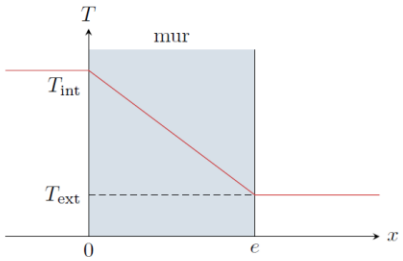
1) Cf. cours.

2) En régime stationnaire, le flux thermique est conservatif : *soit* $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = \Phi$, avec $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_{Qx}S$ soit $j_{Qx} = cte$ et selon la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}$.

On a donc $\frac{dT}{dx} = A = cte$ et en intégrant $T(x) = Ax + B$.

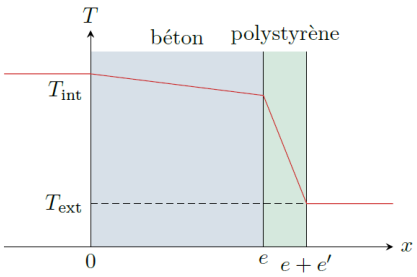
Conditions aux limites : $T(x=0) \underbrace{=}_{C.L.} T_{int} \underbrace{=}_{eq.en\ x=0} 0 + B$ soit $B = T_{int}$, et $T(x=e) \underbrace{=}_{C.L.} T_{ext} \underbrace{=}_{eq.en\ x=0} Ae + T_{int}$ soit

$$\boxed{T(x) = \frac{T_{ext} - T_{int}}{e}\,x + T_{int}}$$

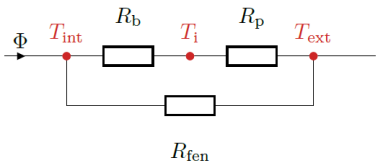


En introduisant des résistances thermiques : $\boxed{R_{tot} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}}$

$\mathbf{10}\,\frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = \mathbf{9}e\,\frac{\lambda'}{\lambda} = \mathbf{5{,}3\ cm}$ (recommandations actuelles pour les bâtiments basse consommation : 18 cm de polystyrène expansé.



Résistances en série : on peut utiliser un pont diviseur de température pour déterminer la température à l'interface entre le béton et le polystyrène : $\boxed{T_i = T_{int} - \frac{R_b}{R_b+R_p}(T_{int} - T_{ext}) = 17{,}5\ °C}$ (la plus grand différence de température se retrouve bien aux bornes de la résistance la plus élevée).

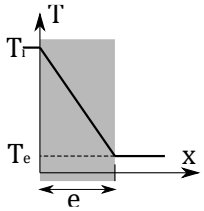


Fenêtre et murs soumis à la même différence de température, ils sont donc montés en parallèle. Résistance thermique de l'ensemble : $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_b+R_p} + \frac{1}{R_{fen}} = \frac{1}{R_b+R_p} + g_{fen}S_{fen}$ soit $\boxed{\boldsymbol{\Phi = \frac{T_{int}-T_{ext}}{R_{tot}} = 295\ W}}$ (en considérant 23 m² de mur)

Exercice 14. Du simple au double vitrage *(CCP 2016)*

1) En orientant $\overrightarrow{u_x}$ dans le sens pièce-extérieur, on compte positivement le flux dans ce sens. On choisit l'origine sur la face de la vitre côté pièce.

En régime stationnaire, le flux thermique est conservatif : *soit* $\boldsymbol{\Phi(x) = \Phi(x+dx) = \Phi}$, avec $\boldsymbol{\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_{Qx}S}$ soit $\boldsymbol{j_{Qx} = cte}$ et selon la loi de Fourier : $\boldsymbol{j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}}$.



On a donc $\frac{dT}{dx} = A = cte$ et $T(x) = Ax + B$.
Conditions aux limites : $T(x=0) \underbrace{=}_{C.L.} T_i \underbrace{=}_{eq.en\ x=0} 0 + B$ soit $B = T_i$, et $T(x=e) \underbrace{=}_{C.L.} T_e \underbrace{=}_{eq.en\ x=0} Ae + T_i$

soit

$$T(x) = \frac{T_e - T_i}{e}\,x + T_i$$

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_{Qx}S = -\lambda\frac{T_e - T_i}{e}S = \lambda\frac{T_i - T_e}{e}S$$

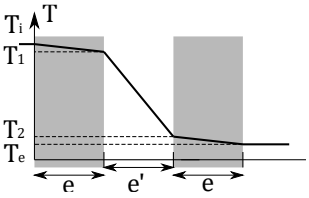
Ou alors directement : $R_1 = \frac{T_i - T_e}{\Phi_1} = \frac{e}{\lambda S} = 1{,}25.10^{-3} K.W^{-1}$

Vérification : $\Phi > 0$ si $T_i > T_e$: cohérent avec le choix d'orientation de $\overrightarrow{u_x}$.

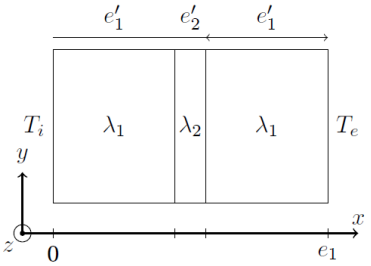
A.N. : $\Phi_1 = 18\ kW$: bien trop élevé !! cela correspondrait à la chaleur d'une dizaine de radiateurs électriques d'appoint ! modèle insuffisant : cf. convection.

2) Avec double vitrage, association série de 3 résistances thermiques : $R_{tot,2} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e}{\lambda_{air} S} + \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_i - T_e}{\boldsymbol{\Phi_2}}$

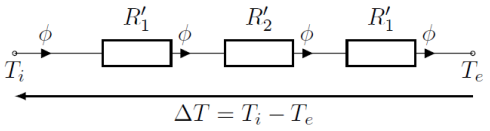
A.N. : $\Phi_2 = 350\ W$. $\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 51$!! Double vitrage extrêmement efficace !! En réalité très largement surestimé car on a négligé les phénomènes de convection.



Remarque : pour des résistances en série, plus la résistance est élevée, plus le gradient de température associé est élevé (le flux étant constant avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R} = cte$). On peut donc établir le profil de température ci-contre.



On peut établir l'expression des températures de « contact » T_1 ou T_2 sur la courbe ci-dessus en exploitant la conservation du flux thermique : $\Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{tot,2}} = \frac{T_i - T_1}{R'_1} = \frac{T_i - T_1}{R_{verre}}$.



On a alors $T_i - T_1 = \frac{R_{verre}}{R_{tot,2}}(T_i - T_e)$: on reconnait une formule de type « pont diviseur », ce qui est cohérent, les résistances étant en série.

3) On néglige les phénomènes de convection à l'intérieur de la lame d'air entre les vitres du double vitrage, trop mince pour permettre l'existence de boucles de convection, et on tient compte de la convection entre la vitre et l'air (de la pièce ou extérieur) à l'aide de résistances R_c qui viennent s'ajouter en série avant et après les résistances des modèles précédents. A l'aide de la loi de Newton, on a $R_c = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{1}{hS}$

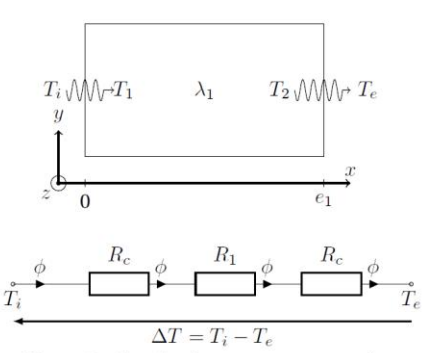


Figure 3 : Simple vitrage avec convection

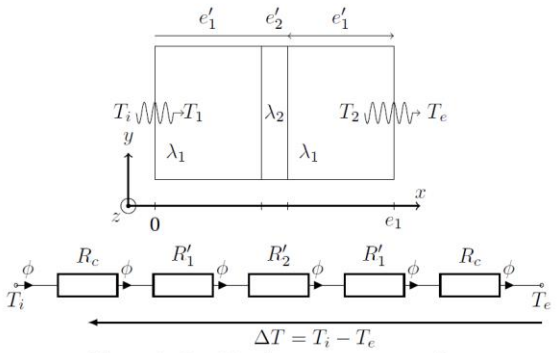


Figure 4 : Double vitrage avec convection

Simple vitrage + convection : $R'_{tot,1} = 2R_c + R_{verre} = \frac{2}{hS} + \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_i - T_e}{\Phi'_1} = 0{,}101\ K.W^{-1}$

A.N. : $\Phi'_1 = 217\ W \ll \Phi_1$!! le premier modèle était dans ce cas totalement inadapté

Remarque : on peut calculer la température à la surface de la vitre extérieure à l'aide d'une formule de type « pont diviseur » (ou en exploitant la conservation du flux). On obtient alors $T'_e = 270{,}3\ K \neq T_e$: l'écart est faible mais e tenant compte du phénomène de convection on montre que la température de la vitre en contact avec l'air extérieur n'est pas à la température extérieure, alors qu'on est dans l'hypothèse d'un régime stationnaire.

Double vitrage + convection : $R'_{tot,2} = 2R_c + 2R_{verre} + R_{air} = \frac{2}{hS} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{e}{\lambda_{air} S} + \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_i - T_e}{\Phi'_2} = 0{,}1625\ K.W^{-1}$

A.N. : $\Phi'_2 = 135\ W$; On a $\frac{\Phi'_1}{\Phi'_2} \approx \mathbf{1{,}5}$

Exercice 15. Pertes autour d'un tuyau d'eau chaude *(A. Leuridan)*

Flux radial à travers un cylindre de rayon r : $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_Q S = cte$ *avec* $S = 2\pi hr$ et selon la loi de Fourier :

$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dr}$. *Soit* $\Phi = -\lambda 2\pi hr \frac{dT}{dr} = \Phi_0 = cte$ d'où en séparant les variables : $dT = -\Phi_0 2\pi h\lambda \frac{dr}{r}$

En intégrant entre les rayons intérieur et extérieur : $\Phi = \frac{\lambda\, 2\pi L\, (\theta_1 - \theta_2)}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$; $\frac{\Phi}{L} \approx 1{,}2.10^5\ W.m^{-1}$

Exercice 16. Isolation d'une conduite *(corrigé J. Kieffer)*

Version "simple" qui suppose que $x \ll R_i$ ce qui permet d'approximer la couche d'isolant dans le cas 1D, on a alors

$$R_{is} = \frac{x}{\lambda_i 2\pi(R+e)l}$$

Par ailleurs, pour une loi conducto-convectif type Newton, on a

$$\phi = hS(T - T') \Rightarrow R_{cc} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{1}{hS}$$

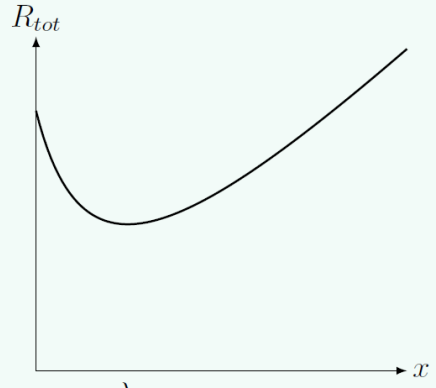
D'où la résistance totale

$$R_{tot} = \frac{1}{h_i 2\pi Rl} + \frac{e}{\lambda_C 2\pi)Rl} + \frac{x}{\lambda_i 2\pi(R+e)l} + \frac{1}{h_e 2\pi(R+e+x)l}$$

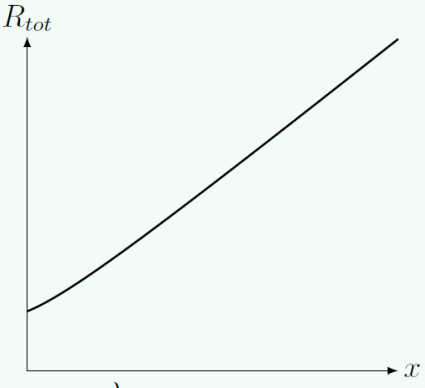
La minimisation de R_{tot} par rapport à x donne

$$\frac{\mathrm{d}R_{tot}}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{1}{\lambda_i 2\pi Rl} - \frac{1}{h_e 2\pi(R+e+x)^2 l} \Rightarrow \lambda_i 2\pi(R+e)l = h_e 2\pi(R+e+x)^2 l \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\lambda_i(R+e)}{h_e}} - (R+e)$$

On a donc le x optimal qui existe (*i.e.* qui est positif) si $\frac{\lambda_i}{h_e(R+e)} > 1$. Sinon la fonction R_{tot} est strictement croissante ...
Bien entendu, il convient de vérifier que l'hypothèse de départ $x \ll R$ est valable (sans valeurs numériques difficile de conclure).
NB : dans le cas $\frac{\lambda_i}{h_s(R+e)} < 1$, il vaut mieux ne pas isoler du tout!



Cas $\frac{\lambda_i}{h_e(R+e)} > 1$



Cas $\frac{\lambda_i}{h_e(R+e)} < 1$

Résolution en géométrie cylindrique (sans les valeurs numériques du sujet je ne peux pas vérifier que mon hypothèse est vérifiée ...)
La question revient à se poser la question de l'optimisation de la résistance thermique. Il faut donc retrouver l'expression d'une résistance thermique pour une couche cylindrique comprise entre R et R' (avec T et T' les températures au bord). Cf cours ... on est en stationnaire sans terme source donc à flux conservatif ...

$$\phi = 2\pi r l j_Q = -2\pi r l \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \text{cste} \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{\phi}{2\pi l \lambda}\frac{1}{r} \quad \text{par intégration} \int_R^{R'} \Rightarrow T - T' = \frac{\phi}{2\pi l \lambda} \ln\left(\frac{R'}{R}\right)$$

D'où la résistance thermique (en cylindrique)

$$R_{th} = \frac{T - T'}{\phi} = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln\left(\frac{R'}{R}\right)$$

On en déduit alors la résistance totale du système

$$R_{tot} = \frac{1}{h_i 2\pi R l} + \frac{1}{2\pi\lambda_c l} \ln\left(\frac{R+e}{R}\right) + \frac{1}{2\pi\lambda_i l} \ln\left(\frac{R+e+x}{R+e}\right) + \frac{1}{h_e 2\pi(R+e+x)l}$$

Il reste alors à dériver ...

$$\frac{\mathrm{d}R_{tot}}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{1}{2\pi\lambda_i l}\frac{1}{R+e+x} - \frac{1}{h_e 2\pi (R+e+x)^2 l} \Rightarrow 2\pi\lambda_i = h_e 2\pi(R+e+x)$$

$$x_M = \frac{\lambda_i}{h_e} - (R+e)$$

On retrouve un résultat différent ... Mais on se retrouve toujours à faire intervenir le facteur $\frac{\lambda_i}{h_e(R+e)}$ qui doit être supérieur à 1 pour avoir $x > 0$... Ce qui me chagrine c'est qu'il ne me parait pas évident de passer du résultat cylindrique à celui 1D avec un DL ...
Dans tous les cas, si la problématique est celle de la meilleure isolation, on voit qu'en augmentant assez x on augmente R_{tot} (puisqu'on a un minimum ...). Mais si $\frac{\lambda_i}{h_e(R+e)} > 1$, il faut faire attention car on commence par diminuer R_{tot} ...

Exercice 17. Survie dans un igloo *(A. Leuridan)*

Il faut $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{T_i - T_e}{R_{tot}} < P$ *avec pour une face du cube :* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda a^2}$; de plus, l'igloo correspond à l'association parallèle des 4 côtés et du toit de l'igloo, soit $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{5}{R_{th}} = \frac{5\lambda a^2}{e}$ *et* $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{5\lambda a^2}{e}(T_i - T_e) < P$

$e > \frac{\lambda\, 5a^2}{P}(T_i - T_e) = 25\ cm$

Exercice 18. Chauffage par le sous-sol *(D'après J'assure BCPST 2)*

1) a) Considérons une tranche d'épaisseur dz comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, de surface S dans le plan (Oxy).
En régime stationnaire, d'après le premier principe, flux entrant = flux sortant, soit, avec S constante :

$j_{th} \underbrace{=}_{\substack{\text{Loi de} \\ \text{Fourier}}} -\lambda \frac{dT}{dz} = cte$ et $\frac{d^2T}{dz^2} = 0$.

a) En intégrant deux fois, $T(z) = Az + B$. Conditions aux limites : $T(z=0) = T_0$, et continuité du flux thermique en $z = -L$: $j_{th}(z=-L) = -\lambda \frac{dT}{dz}\Big|_{z=-L} = \Phi_m$, d'où $\boxed{T(z) = -\frac{\Phi_m}{\lambda} z + T_0}$

b) Température variant linéairement avec z : **courbe a.** Pente $\boldsymbol{p = -\frac{\Phi_m}{\lambda}}$; graphiquement $\boldsymbol{\Phi_m = 0,023\ \mathrm{W.m^{-2}}}$.

c) $j_{th}(z=0) = \Phi_m / S$

2) Premier principe en régime stationnaire : $0 = \delta Q_{th} + \delta Q_{rad} = j_{th}(z) S dt - j_{th}(z+dz) S dt + p_2 S dz dt$

D'où $\frac{d j_{th}(z)}{dz} = p_2$ et avec $j_{th} \underbrace{=}_{\substack{Loi\ de \\ Fourier}} -\lambda \frac{dT}{dz}$, $\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{p_2}{\lambda}$.

On voit sur le tracé des courbes a et b que les pentes des deux courbes sont les mêmes en $z = -L$: condition aux limites inchangée.

En intégrant $\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{p_2}{\lambda}$, $T(z) = -\frac{p_2}{2\lambda} z^2 + Az + B$; soit avec les conditions aux limites :

$T(z=0) = T_0 = B$, $\quad j_{th}(z=-L) = -\lambda \frac{dT}{dz}\Big|_{z=-L} = \Phi_m$, $\quad$ d'où $\boxed{T(z) = -\frac{p_2}{2\lambda} z^2 - \frac{\Phi_m + p_2 L}{\lambda} z + T_0}$

On a donc $T(z=-L) = -\frac{p_2}{2\lambda} L^2 - \frac{\Phi_m + p_2 L}{\lambda} L + T_0$ d'où $p_2 = 2\lambda \frac{T(-L) - T_0 - \Phi_m L/\lambda}{L^2}$.

Graphiquement, $T(z=-L) = 790\ K$, d'où $p_2 = 1{,}3.10^{-6}\ \mathrm{W.m^{-3}}$.

Flux géothermique par unité de surface au niveau du sol :

$$j_{th}(z=0) = -\lambda \frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = \Phi_m + p_2 L = 0{,}062 \mathrm{W.m^{-2}} > \Phi_m,$$

Le dégagement d'énergie par les éléments radioactifs contribue de manière non négligeable au réchauffement du sol.

Exercice 19. Fusible

$dR = \frac{dx}{\sigma \pi r^2}$; $dP_J = \frac{dx}{\sigma \pi r^2} I^2$;

à l'aide du premier principe :

$\frac{\delta Q}{dt} = 0 = \Phi(x) - \Phi(x+dx) + \frac{dx}{\sigma \pi r^2} I^2 = \lambda \frac{d^2T}{dx^2} \pi r^2 + \frac{dx}{\sigma \pi r^2} I^2$ d'où $a = \frac{I^2}{\lambda \sigma (\pi r^2)^2}$;

En intégrant deux fois par rapport à x :

$$T(x) = -½\, ax^2 + bx + T_0$$

avec la 2ème C.L. : $T(L) = -½\, aL^2 + bL + T_0 = T_0 = T(x=0)$

soit $b = ½\, aL$ d'où $b = \frac{I^2 L}{2\lambda \sigma (\pi r^2)^2}$;

Température maximale en $x_0 = \frac{b}{a} = \frac{L}{2}$ et $T_{max} = T_{fusion} \Rightarrow$

$$\boxed{2r = \left(\frac{2\, I^2 L^2}{\lambda \sigma \pi^2 \left(T_{fusion} - T_0 \right)} \right)^{1/4}}$$

A.N. : $2r = 0{,}7\ mm$.

Exercice 20. Température d'un mammifère *(E. Thibierge)*

1) Système : mammifère

Bilan issu du premier principe sur l'ensemble du mammifère étudié en régime stationnaire pendant une durée dt :

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta Q_{reçu,total} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \underbrace{\delta Q_{entrant}}_{=0} - \delta Q_{sortant} + \delta Q_{prod} = \left(-\phi + \frac{4}{3} \pi R^3 \varphi_0 \right) dt$$

soit $\phi = \frac{4}{3} \pi R^3 \varphi_0$ avec ϕ flux sortant du mammifère en R

Par définition,

$$\phi = \iint \overrightarrow{j_{th}}(R).\overrightarrow{dS} = 4\pi R^2 j_{th}(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \varphi_0$$

D'où

$$\boxed{j_{th}(R) = \frac{R\varphi_0}{3}}$$

2) Système : coquille sphérique (écorce d'orange) d'épaisseur dr comprise entre les rayons $r > R$ et $r + dr$

Bilan enthalpique pendant une durée dt en régime stationnaire :

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta Q_{reçu,total} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant} = \big(\phi(r) - \phi(r+dr)\big)\, dt$$

soit avec un DL : $\frac{d\phi(r)}{dr} = 0 = \frac{d}{dr}\big(j_{th}(r) 4\pi r^2\big)$, d'où

$$j_{th}(r)4\pi r^2 = cte = A \underbrace{=}_{\substack{C.L.:continuité \\ du\ flux}} \phi(R) = j_{th}(R)4\pi R^2 = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0 = A}$$

3) Loi de Fourier :

$$j_{th}(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

Par séparation des variables :

$$dT = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0}{4\pi\lambda r^2}\, dr = -\frac{R^3\varphi_0}{3\lambda}\,\frac{dr}{r^2}$$

Intégration entre r quelconque et $r \to +\infty$ tel que $T(r \to +\infty) = T_0$ (température du fluide loin du mammifère) :

$$\int_{T(r)}^{T_0} dT = -\frac{R^3\varphi_0}{3\lambda} \int_r^{+\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$T_0 - T(r) = \frac{R^3\varphi_0}{3\lambda}\left(0 - \frac{1}{r}\right)$$

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{R^3\varphi_0}{3\lambda r}}$$

4) Température cutanée :

$$\boxed{T_c = T(R) = \frac{R^2\varphi_0}{3\lambda}}$$

5) En exploitant la question précédente :

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{3\lambda}{R^2}(T_c - T_0)}$$

A.N. : $\varphi_{0,eau} = 480.10^3\ \mathrm{W.m^{-3}}$ $\varphi_{0,air} = 4{,}8.10^3\ \mathrm{W.m^{-3}}$

Pour maintenir un organisme de même rayon à température constante, il faut une puissance volumique 1 000 fois plus grande dans l'eau que dans l'air, mais cette puissance diminue lorsque la taille du mammifère augmente.

Exercice 21. Réacteur piston

1 - Procédons à un bilan d'enthalpie pour la tranche mésoscopique de réacteur comprise entre z et $z + dz$ pendant une durée infinitésimale dt.

$$dH \underbrace{=}_{isobare} \delta Q \underbrace{=}_{stationnaire} 0$$

Or $\delta Q = \delta Q_{entrant} + \delta Q_{produit} - \delta Q_{sortant}$

Entrées : Par conduction en z : $\delta Q_{entrant} = \delta Q_e = \Phi(z)dt = j_z(z) S\, dt = j_z(z)\, \pi a^2\, dt$

Production : $\delta Q_{prod} = \mathcal{P}_{prod}(z)dt = \alpha\, dV\, dt = \alpha\, \pi a^2\, dz\, dt$

Sorties : Par conduction en $z+dz$: $\delta Q_{s,cond} = \Phi(z+dz)dt = j_z(z+dz)S\,dt = j_z(z+dz)\,\pi a^2\,dt$

Par convection au niveau de la surface latérale :

$$\delta Q_{s,conv} = \varphi_{s,conv}(x)S_{lat}dt = h(T\,(z) - T_0)S_{lat}dt = h(T\,(z) - T_0)2\pi a\,dzdt$$

Finalement :

$$dH = j_z(z)\,\pi a^2\,dt - j_z(z + dz)\,\pi a^2\,dt + \alpha\,\pi a^2\,dz\,dt - \varphi(z)\,2\pi a\,dz\,dt = 0\,.$$

Ainsi,

$$\Big(\big(j_z(z) - j_z(z + dz)\big)\,\pi a^2 + \alpha\,\pi a^2\,dz - \varphi(z)2\pi a\,dz\Big)\,dt = 0$$

Avec $j_z(z) - j_z(z + dz) = -\big(j_z(z + dz) - j_z(z)\big) = -\frac{dj_z(z)}{dz}dz$, soit

$$\left[\left(-\frac{dj_z(z)}{dz} + \alpha\right)\pi a^2 - \varphi(z)2\pi a\right]dzdt = 0$$

Qui se simplifie en

$$\left(\alpha - \frac{dj_z(z)}{dz}\right)a = 2\varphi(z) = 2h(T\,(z) - T_0)$$

Loi de Fourier : $\vec{j}_z = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{T}$ soit en cartésiennes à 1D : $j_z = -\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}$ d'où

$$\frac{dj_z(z)}{dz} = -\lambda\frac{\mathrm{d^2T}}{\mathrm{dz^2}}$$

Soit

$$\left(\alpha - \frac{dj_z(z)}{dz}\right)a = 2h(T\,(z) - T_0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\alpha + \lambda\frac{\mathrm{d^2T}}{\mathrm{dz^2}}\right)a = 2h(T(z) - T_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d^2T}}{\mathrm{dz^2}} - \frac{2h}{\lambda a}\,T = -\frac{2h}{\lambda a}\,T_0 - \frac{\alpha}{\lambda}}$$

1) Par analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, on identifie une longueur caractéristique ℓ telle que

$$\frac{\mathrm{d^2T}}{\mathrm{dz^2}} - \frac{T}{\ell^2} = -\frac{T_0}{\ell^2} - \frac{\alpha}{\lambda}$$

On a donc par identification $\boxed{\ell = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}$ longueur caractéristique du système.

2) Equation caractéristique : $r^2 - \frac{1}{\ell^2} = 0$ soit $\Delta = \frac{4}{\ell^2}$ et $r = \pm\frac{1}{\ell}$

On a donc pour la solution particulière : $T_p(z) = Ae^{-z/\ell} + Be^{+z/\ell}$

$$T(z) = Ae^{-z/\ell} + Be^{+z/\ell} + T_0 + \frac{\alpha a}{2h}$$

Conditions aux limites :

$$T(z=0) \underbrace{=}_{\substack{formule\\ en\ z=0}} A + B + T_0 + \frac{\alpha a}{2h} \underbrace{=}_{C.L.en\ z=0} T_0$$

$$T(z=L) \underbrace{=}_{\substack{formule\\ en\ z=0}} Ae^{-L/\ell} + Be^{+L/\ell} + T_0 + \frac{\alpha a}{2h} \underbrace{=}_{C.L.en\ z=0} T_s$$

Il suffit ensuite de résoudre le système de deux équations à deux inconnues en posant $T_0 + \frac{\alpha a}{2h} = T_{ref}$

$$T_s e^{+\frac{L}{\ell}} = A + Be^{+\frac{2L}{\ell}} + T_{ref}e^{+\frac{L}{\ell}}$$

$$T_0 = A + B + T_{ref}$$

Soit en soustrayant :

$$T_s e^{+\frac{L}{\ell}} - T_0 = B\left(e^{+\frac{2L}{\ell}} - 1\right) + T_{ref}\left(e^{+\frac{L}{\ell}} - 1\right)$$

$$B = \frac{T_s e^{+\frac{L}{\ell}} - T_0 - T_{ref}\left(e^{+\frac{L}{\ell}} - 1\right)}{e^{+\frac{2L}{\ell}} - 1}$$

Et

$$A = T_0 - T_{ref} - B = T_0 - T_{ref} - \frac{T_s e^{+\frac{L}{\ell}} - T_0 - T_{ref}\left(e^{+\frac{L}{\ell}} - 1\right)}{e^{+\frac{2L}{\ell}} - 1}$$

Exercice 22. Armoire électrique

1er ppe monobare :

$dH = \sum \delta Q$ avec $dH = CdT$ et $\delta Q = P_1.dt - \phi_{th}.dt$ avec $\phi_{th} = \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}}$

$dH = CdT = \left(P_1 - \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}}\right)dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_{th}C}T = \frac{1}{R_{th}C}T_{pièce} + \frac{P_1}{C}$;

De la forme $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$, avec par identification :

$$T_\infty = T_{pièce} + P_1 R_{th} = 20 + 100 = 120\ °C\ ;\quad \tau = R_{th}C = 100\ s$$

Il faut ajouter au bilan thermodynamique le terme de convection forcée :

$$\delta Q_{cc,perdue} = \phi_{cc}dt = h\left(T - T_{pièce}\right)Sdt$$

$$dH = CdT = P_1.dt - \phi_{th}.dt - \phi_{cc}dt = \left(P_1 - \frac{T - T_{pièce}}{R_{th}} - h\left(T - T_{pièce}\right)S\right)dt$$

$$\frac{dT}{dt} + \left(\frac{1}{R_{th}C} + \frac{hS}{C}\right)T = \left(\frac{1}{R_{th}C} + \frac{hS}{C}\right)T_{pièce} + \frac{P_1}{C}$$

On se place en régime stationnaire, au bout de quelques τ. Puissance thermique évacuée via la conduction :

$$\phi_{th} = \frac{T_{int} - T_{pièce}}{R_{th}} = \frac{50 - 20}{0{,}1} = 300\ W$$

4) Puissance à évacuer en convection forcée : $P_{conv} = P_1 - \phi_{th} = 700\ W$

Ou alors

Si la température est constante, on est en régime stationnaire, d'où :

$$CdT = P_1.dt - \phi_{th}.dt - \phi_{cc}dt \underbrace{=}_{stationnaire} 0$$

Soit $P_1. - \phi_{th}. = \phi_{cc} = 700\ W$

5) Système : air brassé par le ventilateur. On considère que la puissance évacuée par convection correspond à la puissance reçue par l'air ventilé : $P_{vent} = P_{conv}$

$$P_{vent} = \rho_{air} D_v\, c_{air}\, \Delta T \quad avec\ \ \Delta T = 30°C$$

$$D_v = \frac{P_{conv}}{\rho_{air}\, c_{air}\, \Delta T} = \frac{700}{1 \times 10^3 \times 30} = 2{,}3.10^{-2} m^3.s^{-1} = 23\ L.s^{-1}$$

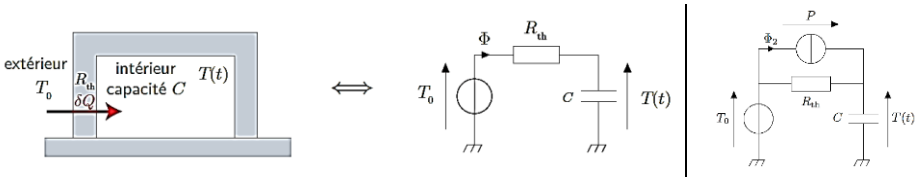
Exercice 23. Évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques *(A. Leuridan)*

1) Bilan d'enthalpie sur la pièce entre t et $t + dt$: $dH = \delta Q$ soit

$$CdT = \Phi_{entrant}dt = \frac{T_{ext} - T_{int}}{R_{th}}dt = \frac{T_0 - T(t)}{R_{th}}dt = CdT$$

$R_{th}C\frac{dT}{dt} + T = T_0$;

$R_{th}C\frac{dT}{dt} + T = T_0 + R_{th}P$;



Exercice 24. ARQS : Association de résistances et fonte de glace *(corrigé J. Kieffer)*

Si on fait la mise en équation du système, en supposant le régime quasi-stationnaire, on peut utiliser la notion de résistance thermique et on a alors en faisant un sur l'eau chaude

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\phi = -\frac{1}{R_{th}}(T - T_0) \Rightarrow R_{th}C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \theta = 0$$

avec $\theta = T - T_0$.
Pour l'eau froide, tant que la glace n'a pas fondu, on reste à $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$ et on a donc par un bilan enthalpique

$$L_{fus}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \phi = \frac{1}{R}(T - T_0) = \frac{\theta}{R_{th}} = C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow L_{fus}\Delta m = C\Delta\theta$$

Il faut donc la même variation de température de l'eau chaude quelque soit les barres (ce qui est logique et aurait pu se trouver par un bilan sur l'ensemble du système ...).
Comme le temps caractéristique est $R_{th}C$ le temps de fonte est donc proportionnelle à R_{th}.
Lorsque les deux barres donc associées en série, on a $\tau_{tot} = \tau_1 + \tau_2$ donc il faudra 1 heure pour fondre.
Lorsque les deux barres donc associées en parallèle, on a $\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$ donc il faudra $40/3 \simeq 13$ min pour fondre.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 25. Flux thermique et densité de flux thermique

Exercice 26. Fabrication d'un four *(O. Alloschery)*

1. Notons S = 300 mm × 300 mm = 0,09 m^2. Indiçons d'un 1 les grandeurs relatives à l'inox, d'un 2 celles relatives à la laine de roche, d'un 3 celles relatives au silicate de calcium et d'un 4 celles relatives à la fibre céramique.

Chaque paroi du four est la mise en série des 4 épaisseurs de matériau : $R_{d1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S}$

Application numérique : R_{d1} = 8,7 K ·W^{-1}

À cette résistance due à la diffusion, il faut ajouter la contribution de l'air. À l'intérieur, l'énoncé nous indique que la température est uniforme : il n'y a donc pas de convection. À l'extérieur, la plaque d'inox est chaude et on ne peut donc pas négliger la convection dans l'air. Il faut alors ajouter en série, à chaque paroi, la résistance $R_{cc\,1} = \frac{1}{hS}$

La résistance totale d'une paroi est donc $R_1 = R_{d1} + R_{cc1}$ = 9,8 K ·W^{-1}

Puis le four est la mise en parallèle des 6 parois qui le constituent : $R_{th} = R_1/6$ = 1,5 K ·W^{-1}

2. L'utilisation de plusieurs résistances électrique permet une meilleure distribution de l'énergie thermique dans le four : elle sera ainsi plus uniforme.

3. La résistance électrique totale est $R = 2 \times 6{,}5 + 2 = 15\ \Omega$. La puissance dissipée par effet Joule par les résistances est $\mathcal{P} = \frac{U^2}{R}$

En régime stationnaire, cette puissance sort intégralement par les parois du four : $\Phi = \mathcal{P}$.

Donc $\Delta T = R_{th}\,\Phi = R_{th}\frac{U^2}{R} = 5{,}3 \times 10^3$ K.

La température ambiante étant de l'ordre de 20°C, la température intérieure du four est donc de l'ordre de 5 000 K.

4. La température obtenue est très surestimée ! On peut y voir plusieurs explications :

• Nous n'avons pas pris en compte la diffusion dans les coins du four. Cela contribue à surestimer (légèrement) la température intérieure, car en réalité les pertes thermiques sont plus importantes.

• La conductivité thermique du métal est très importante par rapport à celles des matériaux isolants.

Ainsi, la température du métal est quasiment uniforme, et il serait donc plus juste de prendre comme surface d'échange conducto-convectif la surface extérieure du four. La résistance thermique du four serait alors $R_{th} = R_{d1}/6$

$+\frac{1}{hS_{ext}}$, ce qui donne une valeur de résistance thermique légèrement plus faible, et donc une température intérieure légèrement plus faible.

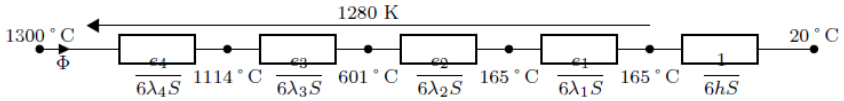
• Mais surtout, il est extrêmement difficile de fabriquer une isolation thermique parfaite. Les découpes des isolants doivent parfaitement s'emboîter, sans quoi l'air intérieur peut pénétrer jusqu'aux couches d'isolant plus profondes, limitant alors grandement l'intérêt des premières couches d'isolant. On doit alors ajouter en parallèle de chaque couche d'isolant des résistances de fuite de faible valeur, qui abaissent considérablement la température intérieure. C'est probablement ici la cause principale de la différence trouvée.

Pour limiter cet effet, on dispose toujours les différentes couches d'isolant en décalant les découpes.

Ainsi les résistances de fuite ne sont à placer qu'en parallèle d'une seule couche à chaque fois, et non de plusieurs. On tâche aussi dans la mesure du possible de calfeutrer les éventuels trous de découpe avec une pâte réfractaire ou de la fibre.

• Enfin, étant issu d'internet, on ne sait pas comment la mesure de température intérieure a été effectuée, et on ne connaît pas les incertitudes... Il faudrait vérifier que la technique de mesure est adaptée à de telles températures (ce qui n'a rien d'évident !)

5. On utilise plusieurs isolants car ils n'ont pas tous la même température d'utilisation. Ceux qui résistent aux températures les plus élevées isolent moins bien et sont plus cher. Il est donc préférable de superposer des couches de différents isolants. On peut calculer avec la formule du pont diviseur de tension la température au niveau de chaque couche :



On constate donc que les matériaux sont utilisés légèrement en dehors de leur plage d'utilisation : le parois internes du silicate de calcium et de la laine de roche sont un peu trop chaude. Il en résultera probablement une usure plus rapide des matériaux.

La température extérieure de la plaque d'acier est donc de 165°C : il vaut mieux éviter de poser la main dessus...

Exercice 27. Igloo hémisphérique ** *(Oral)*

Etude des symétries : Coordonnées sphériques, avec $\vec{j}_{th} = j(r)\vec{e}_r$. Puissance thermique traversant la demi-sphère de rayon r : $\phi_{th} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r^2 j(r)$ dirigé de l'intérieur (température élevée) vers l'extérieur (température faible).
En régime stationnaire, flux conservatif, $\phi_{th} = cte$. Loi de Fourier en coordonnées sphériques : $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$, soit
$\phi_{th} = -2\pi\lambda r^2 \frac{dT}{dr} = 4P$ soit $\int_{\theta_{int}}^{\theta_{ext}} dT = -\int_R^{R+e} \frac{4P}{2\pi\lambda r^2} dr$;

$$\boldsymbol{\theta_{int} = \theta_{ext} + \frac{P}{2\lambda\pi} \frac{e}{R(R+e)} = 11°C}$$

Exercice 28. Température dans un câble électrique *(J. Kieffer)*

1) Cf. cours :

$$R_{el} = \frac{h}{\gamma\pi r_1^2} \quad \text{et} \quad P_J = R_{el} I^2$$

2) Dans la gaine, pas de problème, on est en stationnaire sans terme source donc on est à flux conservatif et le flux est connu puisque c'est la puissance dissipée par effet Joule, qu'il faut évacuer

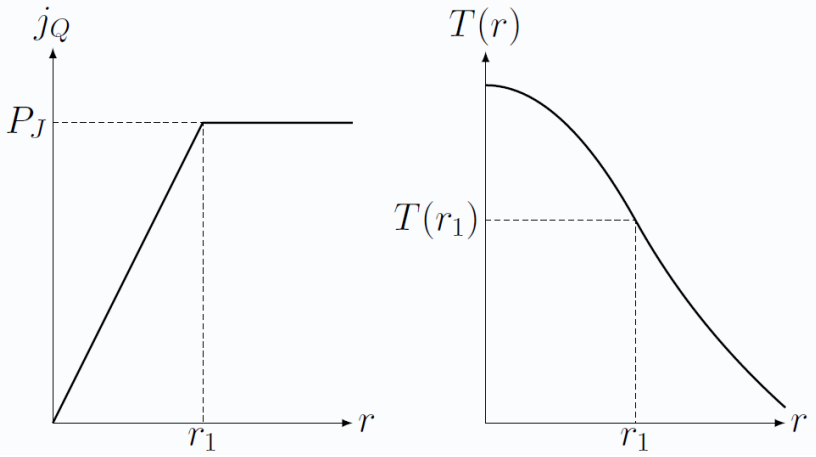
$$\phi_{th} = \text{cste} = P_J = 2\pi r h j_Q(r) \Rightarrow j_Q = \frac{P_J}{2\pi r h} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \int_{r_2}^{r} \Rightarrow T(r) - T(r_2) = -\frac{P_J}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

3) L'erreur "classique" consiste à recalculer la résistance électrique sur le cylindre de rayon r mais ceci serait erroné car le courant I reste sur toute la surface, on a alors (on peut par exemple passer par la puissance volumique dissipée par effet Joule en cas de doute ...)

$$P(r) = P_J \frac{r^2}{r^1}$$

4) On est en stationnaire donc la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre de rayon r doit être évacuée de ce cylindre donc

$$\phi(r) = P(r) = P_J \frac{r^2}{r_1^2} = 2\pi r h j_Q(r) \Rightarrow j_Q = \frac{P_J}{2\pi h}\frac{r}{r_1^2} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \int_0^r \Rightarrow T(r) - T(0) = -\frac{P_J}{4\pi\lambda h r_1^2} r^2$$



Exercice 29. Fusible, version 2 *(J. Kieffer)*

1) La loi de Fourier s'écrit (en cylindrique)

$$\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r} \Rightarrow \phi = 2\pi r L j_Q(r)$$

2) On a deux solutions (dont une seule des deux répond réellement à la question ...)
Méthode 1 : On fait un bilan d'énergie sur la coquille cylindrique comprise entre les cylindres de rayon r et $r + \mathrm{d}r$. Dans ce cas, le volume élémentaire est $2\pi r L \mathrm{d}r$ et on note $\phi(r) = 2\pi r L j_Q(r)$ le flux qui traverse (vers l'extérieur) la surface de la sphère. Par ailleurs, il ne faut pas oublier la création de chaleur par effet Joule qui correspond à un terme volumique $\frac{j^2}{\sigma}$. Le bilan s'écrit alors

$$\mu c T(r, t + \mathrm{d}t)\mathrm{d}V = \mu c T(r, T)\mathrm{d}V + \phi(r, t)\mathrm{d}t - \phi(r + \mathrm{d}r, t)\mathrm{d}t + \frac{j^2}{\sigma}\mathrm{d}V \Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r L = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{j^2}{\sigma}$$

On a donc retrouvé l'expression de l'équation de conservation en cylindrique (en particulier on a retrouvé de manière cachée la divergence en cylindrique ...).
En remplaçant ϕ par son expression, on trouve

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r j(r)}{\partial r} + \frac{j^2}{\sigma} \Rightarrow \text{avec Fourier} \quad \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{j^2}{\sigma}$$

En stationnaire, on trouve alors l'équation proposée par l'énoncé

Méthode 2

On est en stationnaire donc les différents termes de création se compensent. Sur un cylindre de rayon r, la compensation de ces termes conduit alors

$$-\phi(r) + \pi r^2 h \frac{j^2}{\sigma} = 0 \Rightarrow \pi r^2 h \frac{j^2}{\sigma} = \phi(r) = 2\pi r h j_Q(r) = -\lambda 2\pi r h \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \frac{r^2}{2}\frac{j^2}{\sigma} = -\lambda r \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

On retrouve une intégrale première de l'équation à trouver (il suffit de dériver pour le vérifier ...)

3) On peut alors en déduire l'expression de $T(r)$ en intégrant ...

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{r}{2}\frac{j^2}{\sigma\lambda} \Rightarrow \int_R^r \Rightarrow T(r) - T(R) = \frac{1}{4}\frac{j^2}{\sigma\lambda}(R^2 - r^2)$$

La température est maximale en $r = 0$ (ce qui paraît logique ...)

4) Si on suppose qu'il y a continuité de la température à la surface. On trouve la température maximale

$$T_{max} = T(0) = T_0 + \frac{1}{4}\frac{j^2}{\sigma\lambda}R^2 < T_f$$

avec $j = \frac{I}{\pi R^2}$, on a

$$T_0 + \frac{1}{4\pi^2 R^2}\frac{I^2}{\sigma\lambda} < T_f \Rightarrow R > R_n = \sqrt{\frac{I^2}{4\pi^2\sigma\lambda(T_f - T_0)}}$$

5) Cette fois les choses se compliquent car il n'y a plus continuité de la température. On a cette fois la puissance dissipée par effet Joule qui doit être évacuée par la couche conducto convective soit

$$\phi(R) = 2\pi RLh[T(R) - T_0] = P_J = \frac{L}{\sigma\pi R^2}I^2 \Rightarrow T(R) = T_0 + \frac{1}{\sigma 2\pi^2 R^3 h}I^2$$

Donc on a finalement ...

$$T(r) = T(R) + \frac{1}{4}\frac{j^2}{\sigma\lambda}(R^2 - r^2)$$

et on en déduit

$$T_{max} = T(0) = T_0 + \frac{1}{\sigma 2\pi^2 R^3 h}I^2 + \frac{1}{4}\frac{I^2}{\sigma\lambda\pi^2 R^2} < T_f$$

Comme par hypothèse $Rh \ll \lambda$, le second terme est grand devant le troisième donc on trouve finalement ...

$$\frac{1}{\sigma 2\pi^2 R^3 h}I^2 < T_f - T_0 \Rightarrow R > \left(\frac{1}{\sigma 2\pi^2 h(T_f - T_0)}I^2\right)^{1/3}$$

Exercice 30. Le projet « IceDream » *(E. Thibierge)*

S'approprier le problème	Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole.

Un iceberg, de masse volumique $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$ a une masse $m = 10^{10}\ kg$ et une température $T = 0°C = 273\ K$.

Cet iceberg est en contact de l'air et de l'eau, où il perd de la chaleur δQ par conducto-convection de puissance P_{th}. Cette chaleur le fait fondre : il perd une masse Δm par jour $(\Delta t = 1\ jour)$.

On cherche à savoir quelle proportion de l'iceberg $\frac{\Delta m}{m}$ fond par jour.

Établir une stratégie de résolution (analyser)	Décomposer le problème en des problèmes plus simples. Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.

• On <u>modélise l'iceberg</u> par une sphère de rayon R : $\rho.\frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = m$

$$\boxed{R = \left(\frac{m}{4\,\pi\,\rho}\right)^{1/3}}$$

$A.N. : R = \left(\frac{3.10^{10}}{4\,\pi\,10^3}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{10^{10}}{4.10^3}\right)^{1/3} = (0{,}25.10^7)^{1/3} = (2{,}5.10^6)^{1/3} \approx 10^2\ m$

• On considère que la majeure partie de l'iceberg est immergée.

Le coefficient de conducto-convection est beaucoup plus important avec l'eau.

On peut donc faire l'hypothèse que <u>les échanges thermiques se font uniquement avec l'eau</u> de mer à la température $T_{fluide} = 10°C = 283\ K$.

• <u>Bilan thermique</u> pour une transformation isobare : $\Delta H = Q = \Delta m.L_{fus}$

Mettre en œuvre la stratégie (réaliser)	Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique.

• D'après la loi de Newton, on a :

$$\Delta H = P_{th}.\Delta t = h\left(T_{fluide} - T\right) S.\Delta t$$

On suppose que la surface d'échange dans la loi de Newton ne change pas (alors que le glaçon fond…). Soit S, cette surface d'échange :

$$S = 4\,\pi\,R^2$$

• On en déduit :

$$\Delta H = \Delta m.L_{fus} = h\left(T_{fluide} - T\right) 4\,\pi\,R^2.\Delta t \implies \Delta m = \frac{h\left(T_{fluide}-T\right)4\,\pi\,R^2.\Delta t}{L_{fus}}$$

Soit :

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{h\left(T_{fluide} - T\right)4\,\pi\,R^2\Delta t}{L_{fus}\,\rho\,\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} \Longrightarrow \boxed{\frac{\Delta m}{m} = \frac{h\left(T_{fluide} - T\right)3\,\Delta t}{L_{fus}\,\rho\,R}}$$

$A.N.: \frac{\Delta m}{m} = \frac{10^2(283-273)\times 3\times 86400}{333.10^3\times 10^3\times 100} = \frac{300}{333}.8{,}6.\frac{10^5}{10^8} = 8{,}6.10^{-3} \approx 0{,}9\ \%$

L'iceberg fond de 0,9% par jour.

Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider)	Vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeurs connus.

Lors du trajet de 140 jours, une bonne partie de l'iceberg aura donc disparu, mais on peut espérer en conserver. On peut estimer grossièrement la quantité restante à :

$$(1 - 9.10^{-3})^{140} \approx 30\ \%$$