TD CHAPITRE THM.2 : DIFFUSION THERMIQUE

A SAVOIR FAIRE

Exercice 1. Dimension de la diffusivité thermique — IMPORTANT | 1

Retrouver la dimension de D à partir des deux relations suivantes : $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$

Exercice 2. Temps et longueur de diffusion — IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 1

1) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

2) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

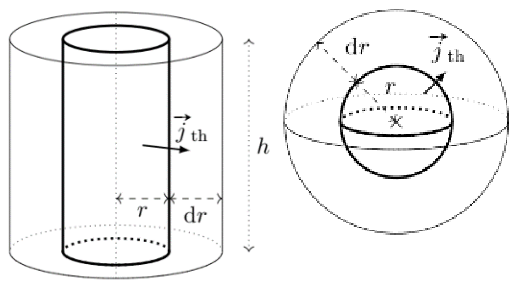
Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}$ m^2·s^{-1}.

3) Combien de temps (dans une unité adaptée !) faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur ?

Donnée : diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}$ m^2·s^{-1}.

Exercice 3. Bilans d'énergie pour des géométries cylindriques ou sphériques — IMPORTANT | 2 | 2

Dans le cas d'un système de masse volumique ρ et de capacité thermique c avec une géométrie cylindrique puis dans celui d'un système à géométrie sphérique, établir les bilans d'énergie sous forme locale (on supposera l'absence de toute source interne de production d'énergie thermique).



EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 4. Conductivité thermique dans la croûte terrestre (Oral ATS) — 2 | 1 ou 2

On remarque qu'à $d = 1\ \mathrm{km}$ en dessous de la croûte terrestre, la température est à $T_1 = T_0 + \Delta T$; T_0 température de l'atmosphère et $\Delta T = 30\ K$.

On se place en régime permanent et on donne : conductivité thermique $\lambda = 33\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$; Diffusivité thermique $D = 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$; rayon de la Terre : $R_T = 6400\ \mathrm{km}$

Aide aux calculs :	$4\pi \times 6{,}4^2 \approx 5.10^2$	$\frac{4}{3}\pi \times 6{,}4^3 \approx 1.10^3$	$24\ h \approx 10^5\ s$

1. Montrer que $T(z) = Az + B$. Déterminer A et B.

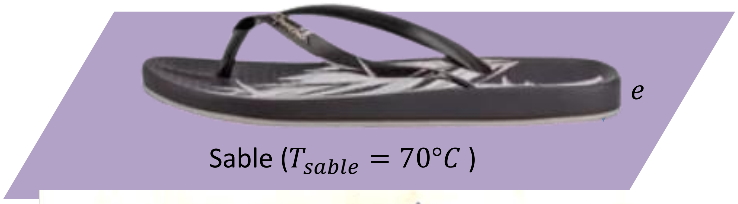
2. Calculer la puissance échangée avec l'atmosphère. Commenter le signe de Φ_{th}.

3. On n'est plus en régime permanent. La nuit, la température diminue, et en prenant $T = 24$ h le temps caractéristique de cette alternance jour/nuit, déterminer l'ordre de grandeur de la distance L en dessous du sol pour laquelle on ne ressent plus les variations de température.

Exercice 5. Tongs sur la plage au soleil (Oral ATS, 2022) IMPORTANT | 2 ou 3 | 1 ou 2

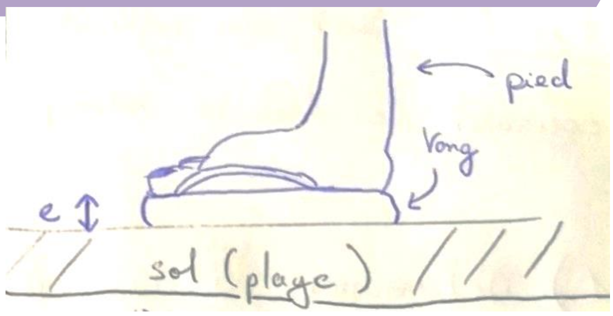
Un étudiant marche sur la plage en tongs.

La capacité thermique c, la conductivité thermique λ et la surface S et l'épaisseur $e = 1\ cm$ de la semelle de la tong étaient données, ainsi que la température $T_{sable} = 70°C$ du sable.



La température de l'air extérieur vaut $T_2 = 28°C$.

Le flux thermique est supposé être selon uniquement l'axe vertical.



1. Enoncer la loi de Fourier.
2. Etablir l'équation de diffusion de la chaleur en régime variable, en faisant apparaître la diffusivité thermique de la tong, que l'on exprimera à l'aide des grandeurs thermophysiques associées. Quelle est son unité ?
3. Déterminer le temps caractéristique à partir duquel la tong est chaude significativement. Quel phénomène a-t-on négligé ?
4. Etablir l'expression de la résistance thermique de la tong.
5. Quel serait le flux nécessaire pour que la personne ne se brûle pas les pieds ? vous évaluerez les ordres de grandeur nécessaires.

Données

Conductivité thermique de la semelle de la tong : $\lambda = 2{,}0\ W.K^{-1}.m^{-1}$

Masse volumique de la semelle de la tong : $\rho = 1\ \mathrm{g.cm^{-3}}$

Capacité thermique massique de la semelle de la tong : $c = 2\ \mathrm{kJ.K^{-1}.kg^{-1}}$

Exercice 6. Temps de cuisson d'un poulet dans un four (ATS 2018)

IMPORTANT 2 ou 3 | 1 ou 2

Monsieur X sait qu'un poulet de 1 kg doit être cuit pendant 1 h pour un réglage donné de son four. En indiquant vos hypothèses, estimer le temps de cuisson nécessaire pour un poulet de 2 kg en conservant le même réglage du four.

Exercice 7. Refroidissement progressif d'un supraconducteur (CMP MP 2024) IMPORTANT | 2 ou 3 | 2 ou 3

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ($T < T_{sc}$) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique permanent sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique λ de la loi de Fourier, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'intérieur du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur Laplacien}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de Newton : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température T vers le fluide de température T_f , par unité de temps et par unité d'aire, est $j_{par} = k\ (T - T_f)$ où k est une constante.

Le matériau (supraconducteur) étudié a la forme d'une boule de rayon R, de température uniforme $T(t)$. Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante $T_0 < T_{sc}$ (cf. figure 1).

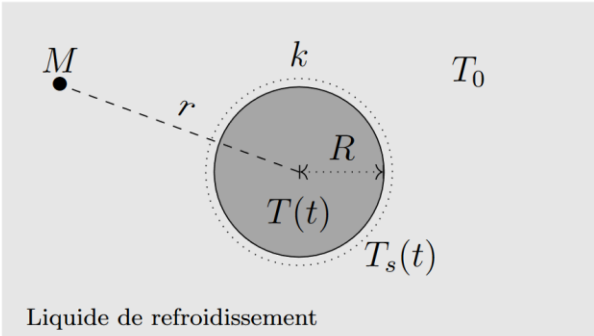


Figure 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

1 - Donner, en justifiant, les unités (ou les dimensions) de k et λ. Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.

2 - Rappeler l'expression de la diffusivité thermique D_{th} d'un matériau. À quelle condition, portant sur la durée Δt du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme ***uniforme*** est-elle légitime ? ***On se placera dans ce cas dans la suite.***

3 - Exprimer en fonction des données la capacité thermique C_{th} de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement R_{th} associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température T_f en un point M du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance r au centre O de la boule (fig. 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée λ'.

4 - Montrer que $T_f(r,t) = T_0 + [T_s(t) - T_0]\, R/r$.

5 - Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique ? Exprimer la résistance thermique R'_{th} associée au refroidissement conductif, en fonction de λ' et R.

On suppose pour finir que $\lambda' \gg R\,k$.

6 - Déterminer l'équation d'évolution de la température $T(t)$ de la boule solide ; on posera $\tau = \frac{\rho RC}{3k}$.

7 - On notera $T_i = T(t = 0)$ la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe $T(t)$ et exprimer la durée t au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur → supraconducteur.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 8. Relaxation d'une répartition sinusoïdale de température *(J. Kieffer)* 2 | 2

Dans un milieu supposé infini et homogène, la température dépend de la position x et du temps t. A l'instant initial, la répartition de température est donnée par $T(x,0) = T_0 + \theta_0 \cos(\alpha x)$

1 - Vérifier que l'évolution ultérieure peut s'exprimer par $T(x,t) = T_0 + \theta(t)\cos(\alpha x)$

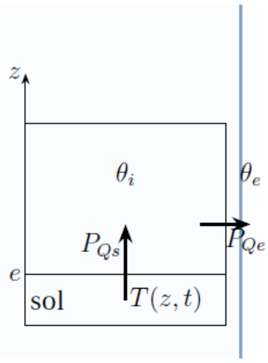
2 - Expliciter la fonction $\theta(t)$ et déterminer la constante de relaxation.

3 - Comment évolue la somme de plusieurs fonctions sinusoïdales ?

4 - En déduire la manière dont évolue une répartition de température rectangulaire au cours du temps.

Exercice 9. Chauffage d'une maison (Centrale ; *J. Kieffer*) 2 ou 3 | 2

Le chauffage d'une maison s'effectue par un sol en béton, de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de surface S et d'épaisseur e. Il contient des tuyauteries qui fournissent une puissance volumique p uniforme dans le sol. En $z = 0$, le sol est supposé isolé thermiquement. Les températures extérieure et intérieure sont respectivement $\theta_e = 0\,°\mathrm{C}$ et $\theta_i = 20\,°\mathrm{C}$. $S = 6\ \mathrm{m}^2$ et $e = 25$ cm.



1) Les puissances thermiques échangées entre le sol et la maison et avec l'extérieur sont : $P_{Qs} = Sh(T(e) - \theta_i)$ et $P_{Qe} = K(\theta_e - \theta_i)$. Interpréter ces expressions. $|h| = 500$ usi et $|K| = 20$ usi. Donner les signes et unités de h et K.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée pas $T(z,t)$.

3) On suppose le régime permanent. Calculer la puissance thermique totale P nécessaire pour maintenir cette température intérieure. A.N.

4) Calculer $T(0)$ et $T(e)$. A.N.

Exercice 10. Problème ouvert : Combinaison de plongée [oral CCP PSI] *(E. Thibierge)* 3 | 2

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35 °C.

a. Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17 °C.

b. Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :

- capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3{,}5\ \mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;
- résistance thermique de la peau : $R_{\text{peau}} = 3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$;
- conductivité thermique du néoprène : $\lambda_{\text{néo}} = 0{,}2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$;
- puissance produite par le métabolisme : $\mathcal{P}_{\text{corps}} = 100$ W;
- puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $\mathcal{P}_{\text{conv}} = h(T_{\text{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $h = 10\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.