

■ Au programme des exercices

- Chapitre EM3 : Magnétostatique : Théorème d'Ampère
- Chapitre THM1 : Transferts thermiques en régime stationnaire (**attention !! ni le régime transitoire avec en particulier l'équation de diffusion, ni le rayonnement n'ont été abordés**).

■ Questions de cours

1. ❤ Une particule chargée de masse m , de charge q , est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2 .
2. ** Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armature d'un condensateur plan.
3. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges :

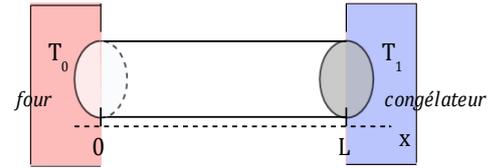
$$\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$
 Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.
4. Considérons une particule chargée de masse m et de charge q pénétrant à l'instant $t = 0$ dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$. En admettant que le mouvement est circulaire, déterminer les caractéristiques de la trajectoire : rayon et pulsation.
5. ** Reprendre la question précédente sans admettre que la trajectoire est circulaire.
6. ❤ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.
7. ❤ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O , de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R , parcourues par un courant d'intensité I . Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.
8. ❤ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).
9. ❤ Une masse m d'eau passe de l'état solide à -10°C à l'état liquide à $+10^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau ainsi que la variation d'entropie de l'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 0°C sous 1 atm
 Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

10. ♥ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.

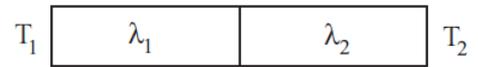


11. ♥ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e , de surface S et de conductivité λ , les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ' . Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

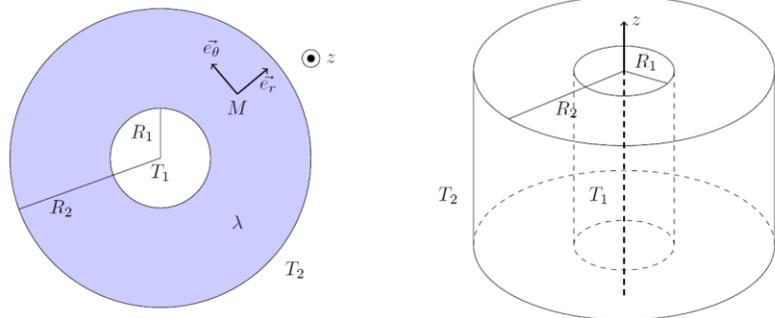
c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{ext} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

12. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S , de même axe (Ox) , de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.

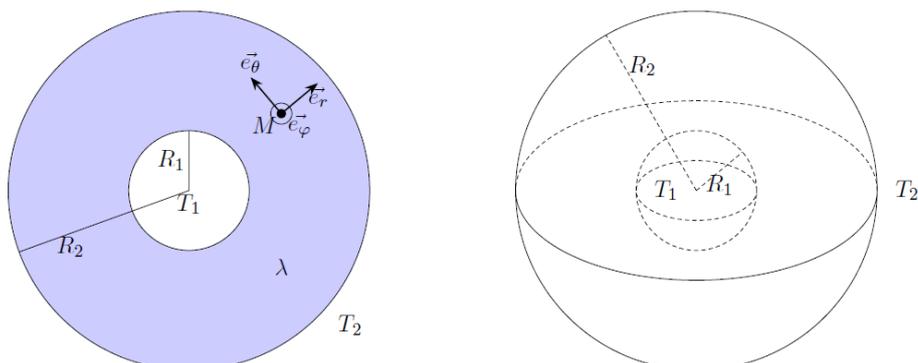


13. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h , faite dans un matériau de conductivité λ . On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

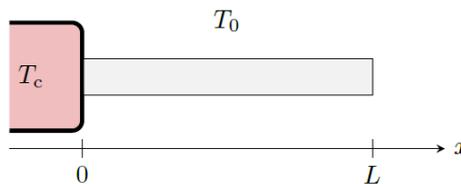


14. On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ . On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

15. On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité thermique λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



16. ♥ On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S , repéré par l'axe (Ox) . On supposera que le problème ne dépend que de x . Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1 . De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I . On appelle K la conductivité thermique du matériau.

- 1) Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.
- 2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

■ Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤️ Une particule chargée de masse m , de charge q , est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2 .

Toute particule chargée soumise à un champ \vec{E} subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ \vec{E} , or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $E_p = qV$:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

2. ** Exploiter l'équation de Poisson pour établir l'expression du champ électrique régnant entre les armatures d'un condensateur plan.

Il y a invariance de la distribution de charges par translation selon x et y ; on a donc selon le principe de Curie V qui ne dépend que de z

Equation de Laplace : $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$ soit en intégrant par rapport à z : $V(z) = Az + B$

$$U = V_A - V_B = V(z=0) - V(z=e)$$

En prenant $V(z=0) = 0$, on a donc $V(z=e) = -U$

Conditions aux limites : $V(z=0) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{en } z=0}}{=} B = 0$ et $V(z=e) \underset{\substack{\text{formule} \\ \text{en } z=e}}{=} Ae = -U$

$$V(z) = Az + B = -\frac{U}{e}z$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

Remarque : on pouvait se contenter de déterminer $\frac{dV}{dz}$, avec d'après $\Delta V = 0 = \frac{d^2V}{dz^2}$,

$$\frac{dV}{dz} = A = \text{cte} = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{V(z=e) - V(z=0)}{e - 0} = -\frac{U}{e}$$

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

Loi de Coulomb : Au voisinage immédiat du conducteur, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$ soit ici en se plaçant au niveau de la plaque chargée positivement, qu'on peut choisir comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$:

$$\vec{E}(z=0) = E_0 \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{U}{e} \vec{u}_z$$

Avec par définition $C = \frac{Q}{U} = \frac{S \epsilon_0}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

3. ** On considère une boule de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charges $\rho > 0$. On

rappelle l'expression du champ électrique créé par cette distribution de charges :
$$\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$

Etablir l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique dans cette distribution de charges.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{stockée} &= \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\substack{\text{volume mésoscopique} \\ \text{écorce d'épaisseur } dr}} = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr \\ \mathcal{E}_{stockée} &= \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ \mathcal{E}_{stockée} &= 2\pi \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^R r^4 dr + \int_R^{+\infty} \frac{R^6}{r^2} dr \right] = \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left(\left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R + \left[-\frac{R^6}{r} \right]_R^{+\infty} \right) = \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left(\frac{R^5}{5} + R^5 \right) = \frac{4\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} R^5 \end{aligned}$$

En introduisant la charge totale de la sphère : $Q = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, on trouve

$$\boxed{\mathcal{E}_{stockée} = \frac{4\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} R^5 = \frac{3}{20\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}}$$

4. Considérons une particule chargée de masse m et de charge q pénétrant à l'instant $t = 0$ dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$. En admettant que le mouvement est circulaire, déterminer les caractéristiques de la trajectoire : rayon et pulsation.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule : $m\vec{a} = \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Etude cinématique : choix des coordonnées polaires, soit pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

Si la vitesse est constante (mouvement circulaire uniforme) : $v = v_0 = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

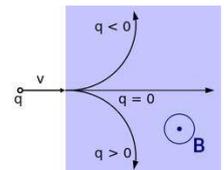
$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \underbrace{-\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N}$$

Projection du PFD sur \vec{u}_r : $-m \frac{v_0^2}{R} = q v_0 B$ soit

$$\boxed{R = \left| \frac{m v_0}{q B} \right|}$$

rayon de la trajectoire circulaire. De plus, $\omega = \frac{v_0}{R} = -\frac{qB}{m}$.

Il s'agit d'une grandeur algébrique : si $q > 0, \omega < 0$: rotation dans le sens horaire, si $q < 0, \omega > 0$: rotation dans le sens trigonométrique



pulsation cyclotron à laquelle est parcourue la trajectoire :

$$\boxed{\omega_c = |\omega| = \left| \frac{qB}{m} \right|}$$

5. ** Reprendre la question précédente sans admettre que la trajectoire est circulaire.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule : $m\vec{a} = \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

En choisissant des coordonnées cartésiennes, et en projetant sur les vecteurs de la base d'étude, on obtient :

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B ; \quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B ; \quad m\ddot{z} = 0$$

La 3^{ème} équation différentielle s'intègre directement en 2 temps et compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{z}(t=0) = 0 \text{ et } z(t=0) = 0, \text{ on obtient } \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}.$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan (xOy).

On pose $u = x + iy$, soit $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

En exploitant les équations (1) et (2) issues de la projection du PFD :

$$\ddot{x} = \frac{q\dot{y}B}{m} \quad (1); \quad \ddot{y} = -\frac{q\dot{x}B}{m} \quad (2):$$

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} = \frac{q\dot{y}B}{m} - i\frac{q\dot{x}B}{m} = -i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} + i\frac{qB}{m}\dot{u} = 0$$

En posant $\tau = \frac{m}{qB}$: $\ddot{u} + i\frac{1}{\tau}\dot{u} = 0$ soit

$$\dot{u}(t) = Ae^{-\frac{it}{\tau}}$$

Pour déterminer la constante d'intégration :

Condition initiale de l'énoncé : $\dot{u}(t=0) = \dot{x}(t=0) + i\dot{y}(t=0) = v_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{expression} \\ \text{à } t=0}}{=} A$, soit

$$\dot{u}(t) = v_0 e^{-\frac{it}{\tau}} = v_0(\cos(-t/\tau) + i \sin(-t/\tau))$$

En posant $\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{qB}{m}$:

$$\dot{u}(t) = v_0(\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)) = v_0(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) = \dot{x} + i\dot{y}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\omega t) \quad \dot{y}(t) = -v_0 \sin(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, et en exploitant les conditions initiales : $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{conditions} \\ \text{initiales}}}{=} \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + y_0 \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{conditions} \\ \text{initiales}}}{=} \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} (\cos(\omega t) - 1)$$

Trajectoire : cercle de centre $\Omega(0, -\frac{v_0}{\omega}, 0)$, de rayon $R = \left| \frac{v_0}{\omega} \right| = \left| \frac{mv_0}{qB} \right| = R$ parcouru à vitesse constante v_0 .

6. ❤️ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Schéma, Choix des coordonnées cylindriques

Etude des symétries et invariances (à détailler soigneusement !) : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r passant par le point M étudié (attention ! l'orienter !);

calcul de la circulation :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(r)} B(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé : si $r \geq a$, $I_{\text{enlacé}} = I$;

si $r \leq a$: $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$

On a alors $I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{a^2}$

théorème d'Ampère : $\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé}$

si $r \leq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$; si $r \geq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

7. ❤ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O , de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R , parcourues par un courant d'intensité I . Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z = B(r)\vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur h telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe r_i et r_j :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation : $\oint_{(c_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B(r_1) - B(r_2))L$ et $I_{enlacé} = 0$: conclusion : champ intérieur uniforme

Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ; $\oint_{(c_2)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$ et $I_{enlacé} = nLI$: conclusion : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_{axe}$ à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

8. ❤ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$\Delta U_{12} \underset{\text{1er principe}}{=} W_{12} + Q_{12}$ avec $Q_{12} = 0$ car la transformation est adiabatique, et

$\Delta U_{12} \underset{G.P.}{=} \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$

9. ❤ Une masse m d'eau passe de l'état solide à -10°C à l'état liquide à $+10^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau ainsi que la variation d'entropie de l'eau.

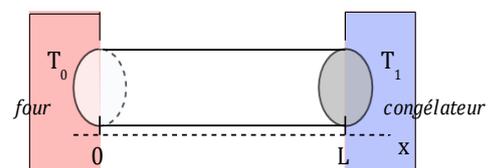
Données :

- Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 0°C sous 1 atm
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer que le solide est entièrement réchauffé de θ_i à θ_0 , puis qu'il est entièrement fondu à la température θ_0 , puis que le liquide obtenu est réchauffé de θ_0 à θ_f , soit $\Delta H = m (c_s(\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l(\theta_f - \theta_0))$ où $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$.

$$\Delta S = m \left[c_s \ln \left(\frac{T_{fus}}{T_0} \right) + \frac{l_f}{T_{fus}} + c_l \ln \left(\frac{T_f}{T_{fus}} \right) \right]$$

10. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en



l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.

- Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx : $d^2H \stackrel{\text{1er principe}}{\equiv} \delta^2Q$
monobare
- En régime stationnaire, $d^2H \stackrel{\text{stationnaire}}{\equiv} 0$ soit $\delta^2Q = 0$
- En exprimant la quantité d'énergie thermique reçue (entrée en x - sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :

$$\delta^2Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx)) dt = 0 \text{ soit } \Phi(x) = \Phi(x + dx) = \text{cte}$$

- En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} \stackrel{\text{loi de Fourier}}{\equiv} \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} \stackrel{\substack{\text{vecteurs colinéaires} \\ \text{gradient uniforme sur } S}}{\equiv} -\lambda \frac{dT}{dx} S = \text{cte}$$

- soit $\frac{dT}{dx} = \text{cte}$ et $T(x) = ax + b$ (ou $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$)
- Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_0 \text{ et } T(x=L) = T_1 \text{ d'où } T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{L}\right)x + T_0$$

11. ♥ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e , de surface S et de conductivité λ , les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ' . Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{air} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = \Phi$, avec $\Phi = \iint_S \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx}S$ soit $j_{Qx} = \text{cte}$

Méthode N°1 :

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{J}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T \text{ soit en cartésiennes à 1D : } j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \stackrel{j_{Qx}=\text{cte}}{\equiv} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e};$$

$$\Phi \stackrel{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{\equiv} \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

Méthode N°2

$$\Phi = j_{Qx}S = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Par séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda} \int_0^e dx \quad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda} e$$

$$\Phi \stackrel{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{\equiv} \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

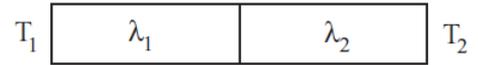
b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

$$\text{Association série : } (R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e \frac{\lambda'}{\lambda}$$

c) Flux sortant par conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_2 - T_{air})$ d'où $R_{cc} = (T_2 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/hS$

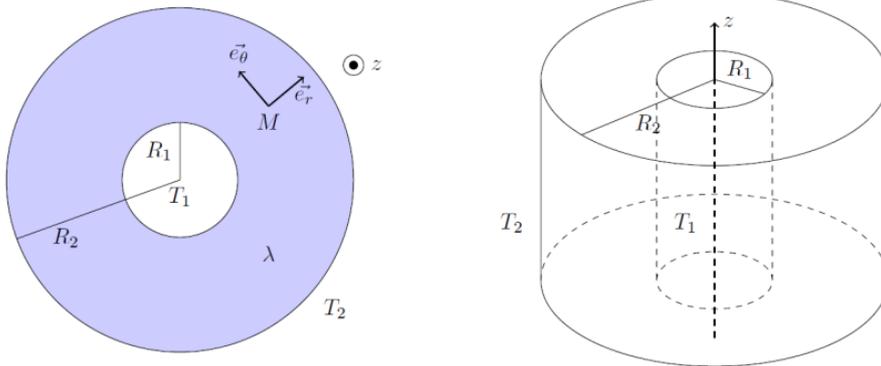
$$\text{Association série : } R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{hS}$$

12. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S , de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.



résistances thermiques en série : $\Phi = \frac{T_1 - T_c}{R_1} = \frac{T_c - T_2}{R_2}$ avec $R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S}$ d'où $T_c = \frac{\frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{L_1 + L_2}}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$

13. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h , faite dans un



matériau de conductivité λ . On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

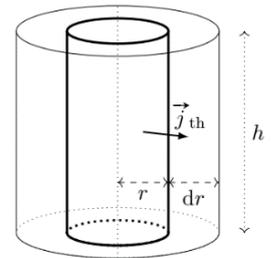
Bilan sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur h , tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$\underbrace{d^2 H}_{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}} \stackrel{\text{stationnaire}}{=} \delta^2 Q_{\text{échange}} \stackrel{\text{stationnaire}}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r + dr)dt$$

Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :



$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 2\pi r h \stackrel{\text{Fourier}}{=} -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h = \phi$$

Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et R_2 :

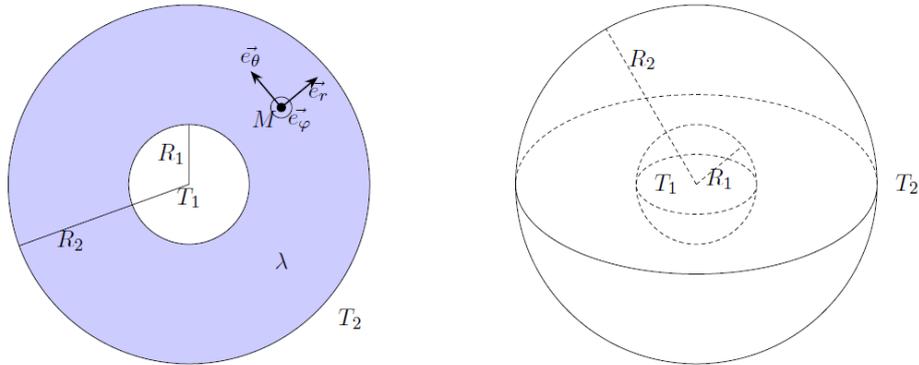
$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On définit alors la résistance thermique en géométrie cylindrique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi h \lambda}$$

14. On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ . On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

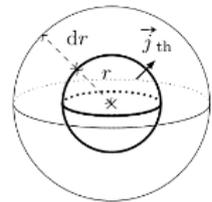
Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$\underbrace{d^2H}_{\text{1er principe monobare}} \stackrel{\equiv}{=} \underbrace{\delta^2 Q_{\text{échange}}}_{\text{stationnaire}} \stackrel{\equiv}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r + dr)dt$$

Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = \text{cte}$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:



$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 4\pi r^2 \stackrel{\text{Fourier}}{\equiv} -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \text{constante}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2 \lambda}$$

Par séparation des variables, on intègre entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi \lambda} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = T_2 - T_1$$

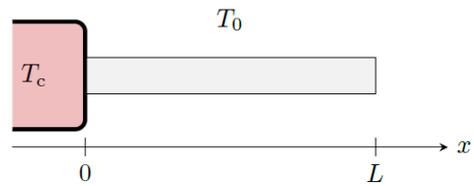
D'où

$$\frac{\phi}{4\pi \lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$:

$$T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1$$

15. On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité thermique λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



Sur la tranche entre x et $x + dx$, 1^{er} principe en régime stationnaire :

$$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x + dx) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)dx)dt \text{ soit}$$

$$\delta Q = \left((j_x(x) - j_x(x + dx))ab - 2h(T(x) - T_0)abdx \right) dt = - \left(\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b) \right) dxdt = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)$ avec d'après la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ soit $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab} (T(x) - T_0)$

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

16. ♥ On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S , repéré par l'axe (Ox) . On supposera que le problème ne dépend que de x . Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1 . De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I . On appelle K la conductivité thermique du matériau.

- Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.
- Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

$$\frac{d^2H}{dt} \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2 Q_{reçu, total} \underset{\substack{\text{stationnaire}}}{=} 0 = \delta^2 Q_{entrant} + \delta^2 Q_{sortant} + \delta^2 Q_{Joule}$$

Avec $\delta^2 Q_{Joule} = p_J S dx dt$

$$\frac{\delta^2 Q_{reçu, total}}{dt} = 0 = \Phi(x) - \Phi(x + dx) + p_J S dx = -\frac{d\Phi}{dx} dx + p_J S dx = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{dx} = p_J S \quad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier : $\Phi(x) = j_{th}(x)S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$ Soit $\frac{d\Phi}{dx} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie : $\frac{d\Phi}{dx} = p_J S = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Soit $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{p_J}{\kappa} x^2 + Ax + B$$