

## D.S. DE PHYSIQUE N°3

**Attention** à bien choisir entre les parties faciles et difficiles ! au début de chaque partie, il sera indiqué : niveau 1 – niveau 2 – pour tous.

**Attention !! la partie B du problème N°3 p. 7 est à traiter par tous !**

**Choisir entre** : Problème N°3 partie A - Besoins en eau du pin maritime (niveau 1) ou  
Problème N°7 - prospection électrique des sols (niveau 2)

**Puis entre** : Problème N°4 : la température du mouton (niveau 1) ou Problème N°5 : le manchot empereur (niveau 2)

### PARTIE 1 - UTILISATIONS DES CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUES DANS LA VIE PRESQUE COURANTE

#### Problème N° 1 – **Pour tous** - Protection des données bancaires par un conducteur

La téléphonie mobile a envahi notre quotidien. En janvier 2020, on comptait 5,19 milliards d'utilisateurs de mobile dans le monde, ce qui représente 67 % de la population totale. La croissance des utilisateurs de téléphone mobile a été plus rapide que celle de la population mondiale sur la même période.

Si le « mobile » a une utilité en tant que téléphone, ce n'est clairement pas sa seule fonction ! Ainsi, 92 % des utilisateurs de téléphones mobiles s'en servent pour accéder à internet. D'après le rapport digital 2020 de We are social, un utilisateur passe en moyenne 3 heures et 22 minutes par jour sur internet à partir de son téléphone portable. Cela représente une augmentation de 10 % par rapport à l'année 2019.

Cette partie s'intéresse à la protection du téléphone face au piratage par « contact ».

**Certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.**

La protection du téléphone portable contre le piratage est devenue essentielle. Cette partie s'intéresse à la mise en place d'une protection simple en insérant une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone. En effet, les puces à distance (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal. L'antenne perçoit le signal de fréquence d'environ 14 MHz, émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal en signal « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminal. À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce NFC-RFID et recueillir ses données relativement aisément. Pour se prémunir d'un piratage, il suffit de protéger son téléphone à l'aide d'un feuillet constitué par exemple d'aluminium.

On considère l'aluminium comme un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. En son sein, les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble  $\vec{v}(t)$  soumis à l'action d'un champ électrique variable  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . Les électrons libres, de masse  $m$  et de charge  $-e$ , sont soumis en outre selon le modèle de Drude, à une force  $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$  où  $\tau$  est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ  $1,0 \times 10^{-14}$  s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

## A – Loi d'ohm locale

1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  des électrons.
2. Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme  $\vec{v} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$  où  $\underline{\vec{v}_0}$  est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.
3. On note  $n^*$  la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres. Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique  $\vec{j}$ .
4. Montrer alors que l'on peut établir une loi d'ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu  $\underline{\gamma}$  peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+ig(\omega)}$  où  $\gamma_0$  correspond à la conductivité électrique « statique » et  $g(\omega)$  à une fonction de la pulsation. On exprimera ces deux grandeurs en fonction des données de l'énoncé.
5. Déterminer la valeur de la fréquence limite  $f_{lim}$  en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ .
6. Peut-on écrire la loi d'Ohm sous la forme  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$  pour les communications NFC-RFID ?
7. Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre la norme du vecteur densité de courant volumique  $\vec{j}$  et celle du vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  présent dans l'équation de Maxwell-Ampère que l'on rappellera.
8. En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette approximation ?

## Données

### Données générales

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

*Données sur l'aluminium métallique*Conductivité en régime permanent  $\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ Permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r = 1$ Perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1$ *Suite de la protection des données au prochain épisode...***Problème N° 2 : Pour tous - Imagerie par Résonance Magnétique nucléaire ou IRM**

L'IRM, qui s'utilise dans des conditions quasi-naturelles et même in vivo, est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent  $\vec{B}_0$  combiné avec un faible champ perturbateur oscillant. Nous allons dans ce problème nous intéresser à la création du champ magnétique perturbateur, qui sera un champ magnétique dit « tournant ».

L'interaction de ces champs avec le moment magnétique d'une particule élémentaire (électron ou proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur l'environnement atomique de ces particules.

Les candidats peuvent à tout moment utiliser un résultat donné par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes.

**Création d'un champ  $\vec{B}_1$  « tournant »**

On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'ARQS : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables  $i(t)$ , comme en magnétostatique. En particulier, on peut utiliser le théorème d'Ampère.

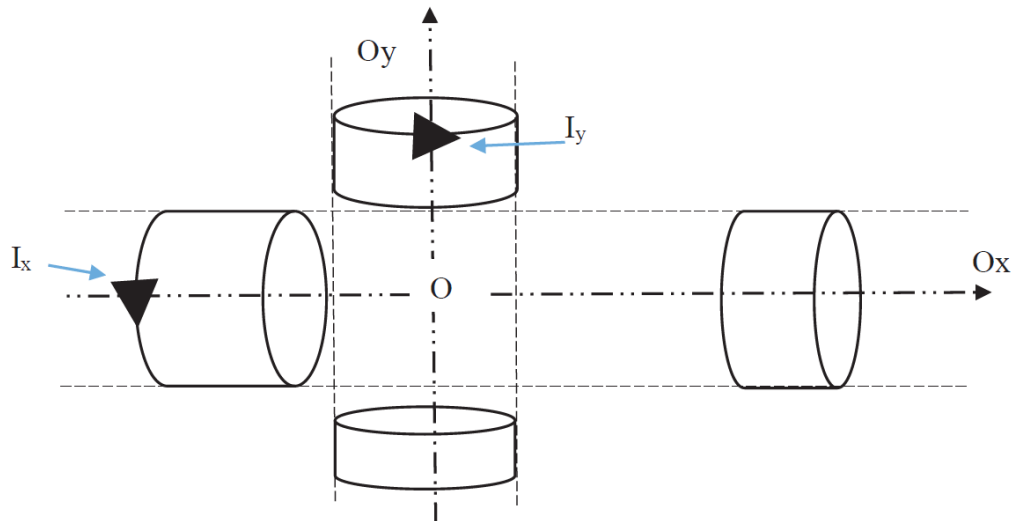
**Q31.** Énoncer les équations de Maxwell en régime stationnaire.

**Q32.** Énoncer le théorème d'Ampère.

**Q33.** Après avoir précisé les symétries du champ magnétique créé par un solénoïde unique infini d'axe  $\Delta$ , qui contient  $n$  spires par unité de longueur parcourues par une intensité  $I$ , établir que celui-ci sépare l'espace en deux zones de champ uniforme.

**Q34.** On admet que le champ extérieur est nul : établir l'expression du champ intérieur créé par le solénoïde unique en fonction de  $\mu_0$ ,  $n$ ,  $I$  et le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  de  $\Delta$ , l'orientation du courant étant celle qui correspond au sens direct autour de  $\vec{u}_\Delta$ .

On considère un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes  $Ox$  et  $Oy$  perpendiculaires concourants en  $O$  comme l'indique la **figure 5**. Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur un cylindre de rayon  $R$  comportant  $n$  spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe  $Oy$  sont parcourues par une intensité  $I_y = I_0 \cos(\Omega t + \alpha)$  et celles du solénoïde d'axe  $Ox$  par une intensité  $I_x = I_0 \cos(\Omega t)$ . L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.



**Figure 5** – Configuration des solénoïdes

Les solénoïdes sont infiniment longs, seules quelques spires ont été représentées.

- Q35.** Établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage  $\alpha = \pi/2$ , est un champ « tournant »  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}$ , c'est-à-dire un champ de norme constante  $B_1$  porté par une direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  qui tourne à vitesse uniforme dans le plan  $xOy$ . On précisera sa norme  $B_1$  et sa vitesse de rotation  $\omega$ .

Il est en réalité difficile de produire des champs tournants autour des patients. On utilise donc un champ oscillant créé par une bobine unique d'axe  $Ox$  :  $\vec{B}'_1 = 2B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ .

- Q36.** Montrer que ce champ est équivalent à la superposition de 2 champs de même amplitude (à préciser) qui tournent en sens opposé à la même vitesse.

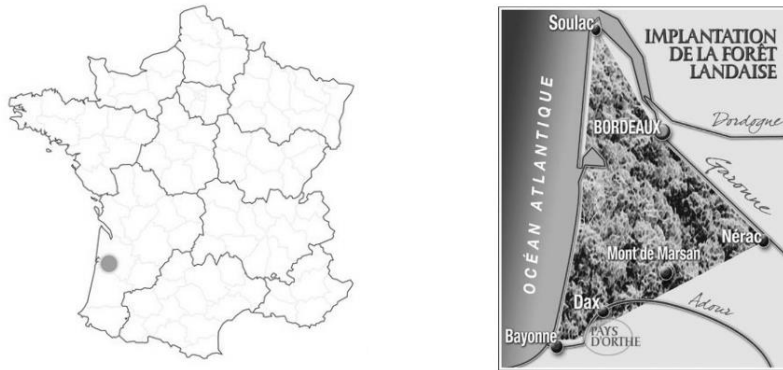
## PARTIE 2 : DANS LA NATURE...

### Problème N°3 - Le pin maritime

#### **Partie A – Niveau 1 - Les besoins en eau du pin maritime (ou pin des Landes)**

La forêt des Landes de Gascogne est un massif forestier du Sud-Ouest de la France situé en Nouvelle-Aquitaine (figure 1). Bordée à l'Ouest par l'océan Atlantique (la Côte d'Argent), elle forme un vaste triangle d'une superficie de plus d'un million d'hectares, qui s'étend sur trois départements (la Gironde, les Landes et le Lot-et-Garonne).

Cette forêt a été plantée au XIX<sup>e</sup> siècle sous l'impulsion de Napoléon III, dans le but de lutter contre l'avancée des dunes menaçant les villages, d'assécher les marais nombreux dans le territoire et de développer une ressource de matières premières (bois d'œuvre, poteaux télégraphiques, pâte à papier, solvants pour l'industrie chimique...). De nos jours, elle constitue aussi un atout considérable pour le tourisme vert. Hélas, plus de 32 000 hectares de ce précieux massif forestier ont été détruits au cours des gigantesques incendies de l'été 2022.



**Figure 1** - Position géographique des Landes de Gascogne et de sa forêt  
([www.centrecultureldupaysdorthe.com](http://www.centrecultureldupaysdorthe.com))

### Mouvements d'eau dans un végétal, potentiel hydrique et analogie électrocinétique

Les végétaux terrestres prélèvent dans le sol l'eau et leurs nutriments qui sont des sels minéraux.

Le liquide obtenu constitue la sève brute circulant dans la plante. Pour décrire cette circulation d'eau, les botanistes utilisent le potentiel hydrique, noté  $\psi$ . C'est une grandeur homogène à une pression, qui caractérise les états de liaison de l'eau dans les différents milieux et tissus cellulaires constituant le Continuum Sol-Plante-Atmosphère (CSPA). Ce dernier comprend (figure 2) :

- le sol,
- le xylème des racines, du tronc et des branches (ensemble des tissus cellulaires organisés en canaux de circulation de la sève brute),
- les stomates des feuilles (cellules de l'épiderme des feuilles régulant l'évapotranspiration),
- l'air de l'atmosphère au contact des feuilles.

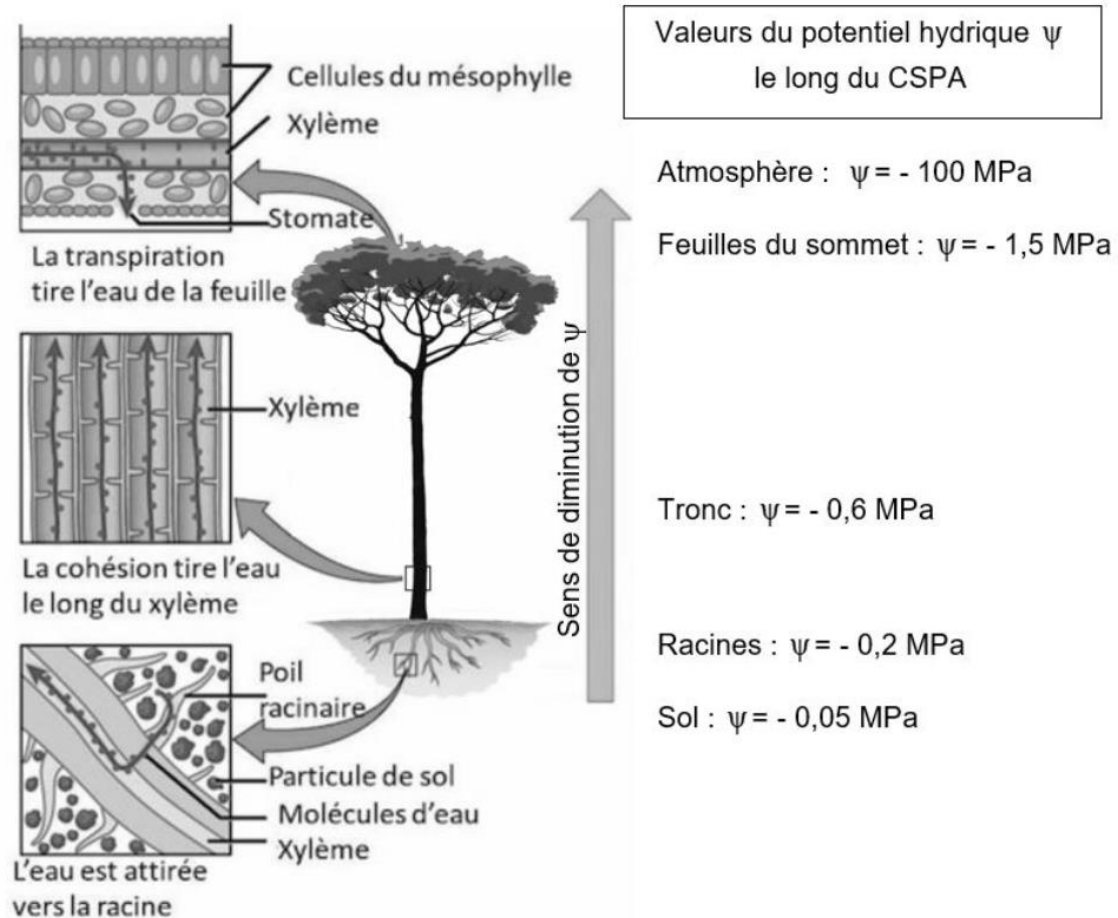
Pour de l'eau liquide pure sous  $P^0 = 1 \text{ bar}$  (état de référence), le potentiel hydrique  $\psi$  est nul par convention. Il est négatif dans le CSPA (figure 2) car l'eau y est en interaction avec les tissus cellulaires. L'évapotranspiration au niveau des feuilles, provoquée par le rayonnement solaire, crée un appel d'eau vers l'atmosphère. Des gradients de potentiel hydrique apparaissent alors le long du CSPA, accompagnés de flux d'eau dans le sens des potentiels hydriques décroissants.

Ces flux sont régis par la loi de Darcy :

$$\vec{j}_M = - \frac{K}{\rho_e g} \overrightarrow{\text{grad}} \psi$$

où  $\vec{j}_M$  désigne le vecteur densité volumique de courant de masse en eau,  $K$  la perméabilité hydraulique du milieu,  $\rho_e$  la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Cette circulation de masse d'eau dans le CSPA présente donc des analogies avec la circulation de charges électriques dans un milieu conducteur ohmique.



**Figure 2 - Potentiel hydrique le long du CSPA**

([www.encyclopedie-environnement.org/vivant/quete-de-eau-par-les-plantas](http://www.encyclopedie-environnement.org/vivant/quete-de-eau-par-les-plantas))

9. a) Rappeler la loi d'Ohm locale dans un milieu ohmique (on l'écrira à l'aide du potentiel électrique  $V$ ). À quelles grandeurs électriques sont analogues respectivement  $\psi$  et  $\vec{j}_M$  ? Définir et exprimer, en fonction des données, la conductivité hydraulique  $\gamma$ , analogue de la conductivité électrique.
- b) Dans ce modèle, la masse d'eau traversant une surface ( $S$ ) par unité de temps, ou débit massique à travers ( $S$ ), est  $D = \iint_{(S)} \vec{j}_M \cdot \vec{dS}$ . De quelle grandeur électrique le débit massique  $D$  est-il l'analogie ?
10. a) Définir la résistance hydraulique  $R_H$  d'un tube de courant d'eau de débit massique  $D$ , d'extrémités A et B, soumis à une différence de potentiel hydrique  $\psi_A - \psi_B > 0$ .
- b) Dans quelle unité faisant intervenir uniquement le mètre et la seconde, s'exprime la résistance hydraulique ?

Le système racinaire du pin est modélisé comme un faisceau de  $N$  racines cylindriques rectilignes de conductivité hydraulique  $\gamma_r$ , de section  $s_r$  et de longueur  $l_r$ , interconnectées au point O à la base du tronc (figure 3) et soumises à la même différence de potentiel hydrique  $\psi_S - \psi_O > 0$ , avec  $\psi_S$  le potentiel hydrique au niveau des extrémités des racines au contact avec le sol.



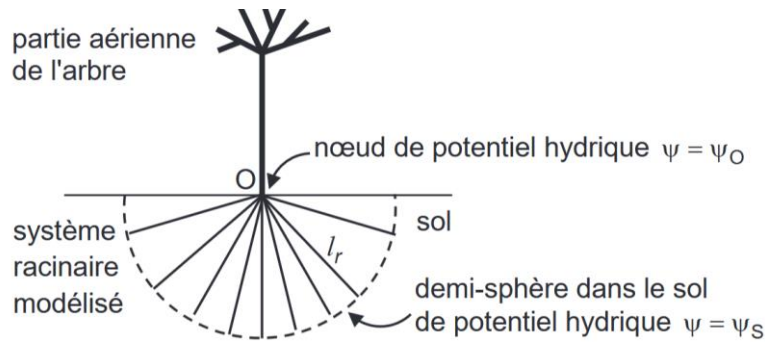


Figure 3 - Schéma d'un pin et de son système racinaire

11. Par circulation du champ  $-\overrightarrow{\text{grad}} \psi$  le long d'une racine, établir l'expression de la résistance hydraulique  $R_r$  d'une racine en fonction de  $\gamma_r$ ,  $s_r$  et de  $l_r$ . En déduire la résistance hydraulique  $R_N$  du système racinaire.
12. Avec  $R_N$  la résistance hydraulique du système racinaire,  $R_t$  celle du tronc,  $R_f$  celle du système foliaire et  $R_a$  celle à l'interface entre le système foliaire et l'atmosphère, donner en justifiant le schéma électrique équivalent au système racines-tronc-feuilles-atmosphère.

La résistance hydraulique moyenne d'un pin adulte (des extrémités des racines au contact avec le sol jusqu'aux aiguilles à son sommet) est  $R_p = 1,0 \cdot 10^9$  S.I.

13. A partir de  $R_p$  et des valeurs du potentiel hydrique de la figure 2, donner la valeur numérique de  $R_a$ .
14. En déduire la masse évapo-transpirée par un pin adulte pendant un jour d'été (avec les valeurs numériques de la figure 2 et une durée d'exposition solaire journalière de 12 h).
15. On peut lire sur un document du C.N.P.F. (Centre National de la Protection Forestière) "qu'un hectare de pins maritimes adultes aspire 15 à 25 tonnes d'eau par jour, cette eau étant évapo-transpirée par la partie aérienne de l'arbre". Sachant qu'il y a typiquement 300 pins adultes par hectare, les valeurs du C.N.P.F. sont-elles en accord avec le résultat trouvé dans la question précédente ? On rappelle que 1 hectare =  $10^4$  m<sup>2</sup>.

### Partie B - Pour tous - Gemmage en forêt landaise et distillation de la résine de pin

Le gemmage est un procédé ancestral qui consiste à produire une entaille dans l'écorce du pin pour en retirer la résine. Le procédé, généralisé à toute la forêt landaise jusqu'au début du XXe siècle, va devenir une activité industrielle phare de la région jusque dans les années 1950. Après une période de déclin, puis sa disparition dans les années 1990, des projets de relance sont aujourd'hui en cours.

À l'aide du hapchot (petite hache), le résinier effectue les piques qui forment la "carre" le long de laquelle la résine va s'écouler jusqu'à un pot en terre cuite coincé entre une lamelle de zinc et un clou en contrebas (photos 2a et 2b).

La résine (ou gomme) ainsi récoltée est ensuite distillée pour obtenir de l'huile essentielle de térébenthine et des composés organiques lourds, nommés brai ou colophane selon leur consistance. Le principal constituant de l'essence de térébenthine est le pinène, molécule odorante de formule brute  $C_{10}H_{16}$ , très utilisée comme solvant organique. Le brai est utilisé comme colle végétale et la colophane comme liant dans certaines peintures. Elle est aussi bien connue des musiciens pour favoriser le crissement de l'archet sur les instruments à cordes frottées.



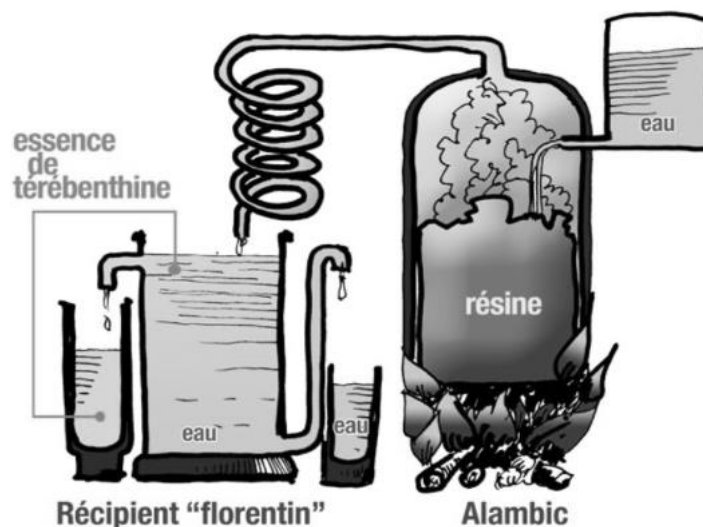
**Photo 2a** - Résinier ouvrant la " carre "

(<https://www.futura-sciences.com/planete/dossiers/geographie-region-aquitaine-gemmage>)



**Photo 2b** - Pot de recueil de la résine

Pour récupérer la térébenthine, on procède par entraînement à la vapeur (ou hydrodistillation) (figure 4) : de l'eau pure est ajoutée à la gomme dans un alambic. Le tout est porté à ébullition.



**Figure 4** - Schéma d'une hydrodistillation  
(<https://www.centrecultureldupaysdorthe.com>)

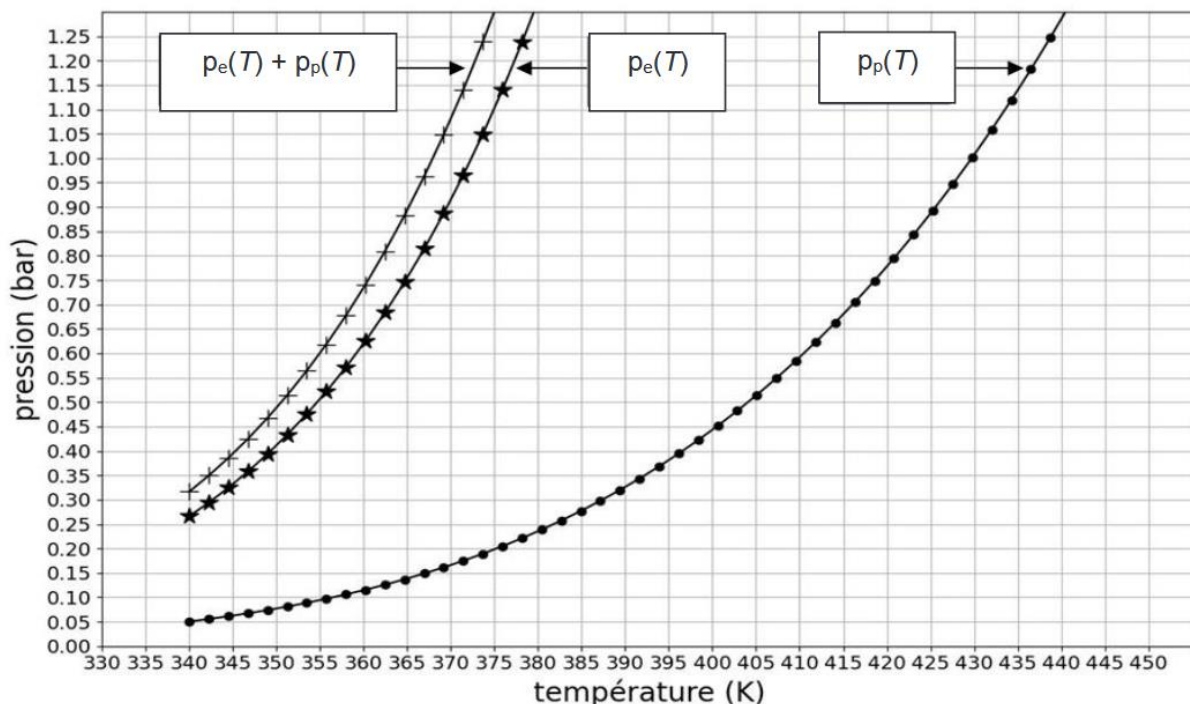


Les vapeurs d'eau obtenues entraînent avec elles des vapeurs de pinène, ce qui donne un mélange gazeux de composition déterminée. Ce mélange passe alors dans le serpentín où il se refroidit et se condense. Le condensat est récupéré dans un récipient, appelé " florentin ". L'eau et le pinène liquides étant non miscibles, l'essence de térébenthine surnage au-dessus de l'eau, ce qui permet sa récupération. Le résidu de distillation au fond de l'alambic donne le brai et la colophane.

- 16.** Dessiner l'allure du diagramme des phases ( $p, T$ ) de l'eau pure. Nommer et mentionner deux points particuliers sur ce diagramme et indiquer les domaines solide, liquide et gazeux.
- 17.** La pression de vapeur saturante du pinène pur à 20 °C est  $p_p(293) = 430$  Pa. En considérant le modèle de gaz parfait pour les espèces gazeuses, établir s'il est dangereux de travailler dans un local à 20 °C dans lequel de l'essence de térébenthine se trouverait à l'équilibre de vaporisation, sachant que la teneur limite à ne pas dépasser est de 5 g de pinène par mètre cube d'air.

On donne en figure 5 les courbes représentatives des pressions de vapeur saturante  $p_e(T)$  et  $p_p(T)$  des équilibres de vaporisation de l'eau pure et du pinène pur en fonction de la température.

La troisième courbe correspond à la somme  $p_p(T) + p_e(T)$ . On fera les lectures adéquates sur ces courbes pour répondre aux 4 questions suivantes.



**Figure 5** - Courbes des pressions de vapeur saturante en fonction de la température

18. À quelle température faudrait-il chauffer du pinène liquide pur pour le porter à ébullition sous la pression  $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$  ?
19. Toujours sous  $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$ , donner la valeur de la température d'ébullition du mélange d'hydrodistillation dans l'alambic, sachant que les pressions partielles de l'eau et du pinène dans la phase vapeur sont égales à leurs pressions de vapeur saturante pure.
20. Quelles sont, dans ce cas, les valeurs des pressions partielles en eau et en pinène ?
21. Déduire la masse d'eau nécessaire pour produire 1 kg de pinène.

### Problème N°4 – Niveau 1 – La température du mouton



Le sujet s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11<sup>e</sup> et le 9<sup>e</sup> siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.

Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.

Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

#### Document 1 : (vigiferme.org, pour le bien-être de l'animal et de l'éleveur, consulté en 2018)

##### *Exposition à de basses températures*

Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l'âge, l'état du pelage... Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé de l'humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de  $-15 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , un mouton tondu doit être protégé du froid. [...] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu'il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu'ils ne soient pas mouillés jusqu'à la peau. La laine de certaines races, lorsqu'elle est épaisse, peut repousser l'humidité plusieurs jours. C'est le cas des races de montagne mais pour d'autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur. Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.

Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l'humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naître atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

#### *Exposition à de hautes températures*

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

Cas de la brebis non tondue	Confort sans adaptation ou adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation pouvant entraîner la mort
Température extérieure	de - 8 °C à 25 °C	de - 15 °C à - 8 °C et de 25 °C à 35 °C	de - 30 °C à - 15 °C et de 35 °C à 40 °C	en dessous de - 30 °C et au-dessus de 40 °C

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre 38,5 et 39,5 °C.

Sa longueur moyenne va de 1 m à 1,50 m.

La tonte a lieu 1 à 2 fois par an produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne  $\theta_{eq} = 39\text{ °C}$  et mieux comprendre les éléments du **document** ci-dessus.

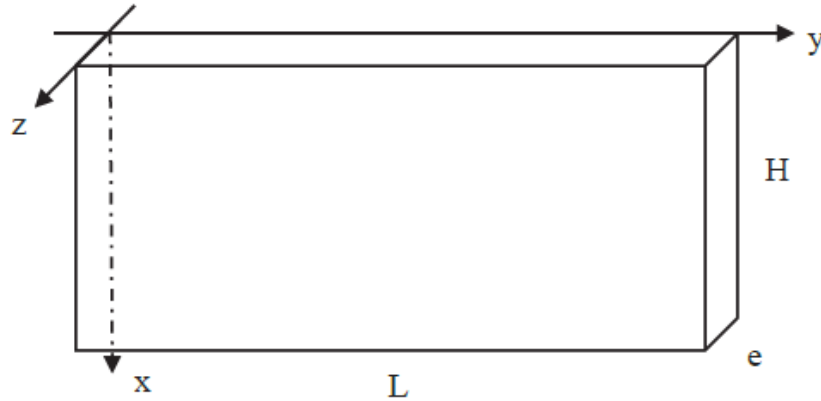
## I- Propriétés de la toison de laine

*La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600°C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100% biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d'eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de 20  $\mu\text{m}$  pour les moutons Mérinos à 40  $\mu\text{m}$  pour les races écossaises.*

Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique  $\lambda_{\text{laine}}$  supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique  $C_{\text{laine}}$ .

On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique  $\lambda_{\text{laine}} = 0,040 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

On considère un parallélépipède, de longueur  $L$ , de hauteur  $H$  et d'épaisseur  $e$  petite ( $e \ll \min(L, H)$ ), constitué d'un matériau homogène de conductivité  $\lambda$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$  (**figure 1**). Le problème est supposé unidimensionnel, en régime stationnaire, la température ne dépendant que de la variable  $z$ .



**Figure 1** - Géométrie du conducteur thermique

- 22.** Énoncer la loi de Fourier relative à la diffusion thermique. Sur quelle direction est le vecteur densité  $\vec{j}_Q$  de courant thermique ? De quelle(s) variable(s) dépend-il ?

Les températures, sauf avis contraire, sont en °C.

- 23.** Faire un bilan énergétique en régime stationnaire sur la tranche de matériau comprise entre  $z$  et  $z + dz$  et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température  $T(z)$ .
- 24.** On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température  $T_{\text{entrée}}$  en  $z = 0$  et  $T_{\text{sortie}}$  en  $z = e$ . Que vaut la puissance thermique  $\phi$  qui traverse le matériau en fonction de  $e, \lambda, H, L, T_{\text{entrée}}$  et  $T_{\text{sortie}}$  ?
- 25.** Définir puis exprimer la résistance thermique  $R_{th}$  du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?
- 26.** On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (figure 2). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique  $\phi$ , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures  $T_c, T_f$  des plaques chaude et froide sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

Exprimer l'expression de la conductivité  $\lambda_{\text{laine}}$  de l'échantillon en fonction de  $\phi, e, S, T_c$  et  $T_f$ .

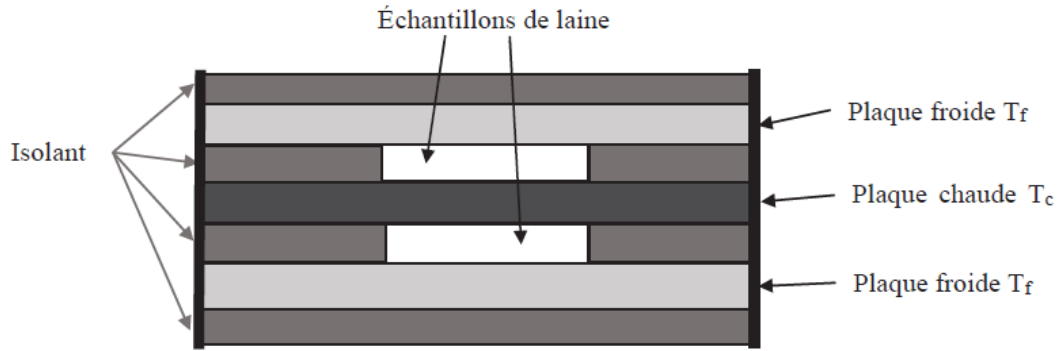


Figure 2 - Principe de la plaque chaude gardée

## II- Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme  $\theta_{\text{éq}} = 39^\circ\text{C}$ , de longueur  $L = 100\text{ cm}$  et de section carrée de côté  $H = 30\text{ cm}$ . Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de  $e = e_M = 10\text{ cm}$  de laine avant la tonte à  $e = e_m = 0,5\text{ cm}$  après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4**.

27. Exprimer la résistance  $R_{\text{diff}}$  de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de  $L, H, e$  et  $\lambda_{\text{laine}}$ . Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.



Figure 3 - Modélisation de la brebis

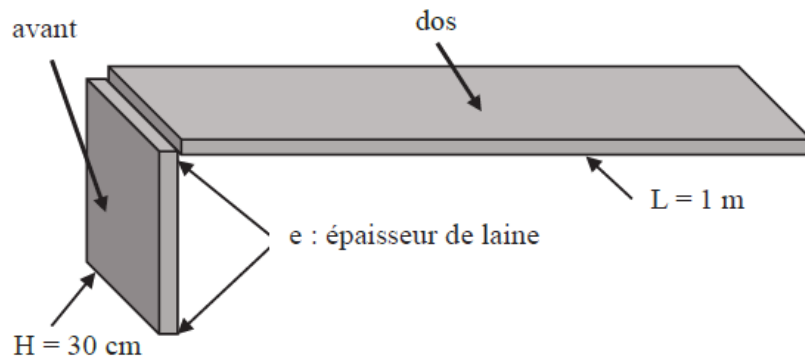


Figure 4 - Modélisation de la toison

Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées



On doit tenir compte de 2 autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

**28.** La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{j}_Q = -h \cdot (T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n}$$

avec  $T_{\text{ext}}$  la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température  $T_{\text{air}}$  et le vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  orienté de la brebis vers l'extérieur. On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à  $h = 4,0 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . En déduire en fonction de  $h, L$  et  $H$  la résistance de conducto-convection  $R_{\text{cc}}$  à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire  $R_r$ . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance  $P_r$  due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$$

avec  $A$  l'aire de la surface extérieure de la brebis,  $T_{\text{ext}}$  la température de cette surface en contact avec l'air de température  $T_{\text{air}}$ . La constante  $K$  a pour valeur  $K = 5,0 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

On peut alors en déduire la résistance thermique de rayonnement  $R_r$  en fonction de  $K, L$  et  $H$  :

$$R_r = \frac{1}{KA} = \frac{1}{2KH(2L+H)} = 0,14 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

**29.** Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis  $T_{\text{int}} = \theta_{\text{eq}} = 39 \text{ °C}$  et la température de l'air  $T_{\text{air}}$ . Évaluer numériquement la valeurs  $R_{\text{éq}}$  de la résistance équivalente de la brebis non tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à  $T_0 = 5 \text{ °C}$ .

En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation. La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires en toute situation :

$$\dot{m} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut  $\Delta H^\circ_{\text{vap}} = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**30.** En déduire la puissance  $p_{\text{m0}}$  apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte.

On l'exprimera en fonction de  $\dot{m}, L, R_{\text{éq}}, T_{\text{int}}$  et  $T_{\text{air}}$ , puis on en fera l'évaluation numérique pour  $T_{\text{air}} = T_0 = 5 \text{ °C}$ .

### III - Réponse d'un groupe de brebis

On ne tient compte dans cette sous-partie que de la résistance de conducto-convection  $R_{cc}$ , d'autant plus importante que le vent est fort et liée à la surface de la brebis en contact avec l'air extérieur.

#### Résolution de problème

*La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.*

Les brebis se serrent les unes contre les autres en situation de stress thermique dû au froid extérieur. Supposons que le berger ait un troupeau de 6 brebis. Plusieurs regroupements sont possibles comme indiqué en **figure 8**.



Cas 1



Cas 2



Cas 3

**Figure 8** - Regroupements possibles de 6 brebis

**31.** Dans quelle configuration les brebis ont-elles intérêt à se regrouper ?

### Problème N°5 – Niveau 2 - Le manchot empereur

Source : Gilbert C. et al., Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory, Journal of Experimental Biology, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de  $-40\text{ °C}$  lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les  $-200\text{ °C}$  lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

**Des données sont fournies en fin de problème**

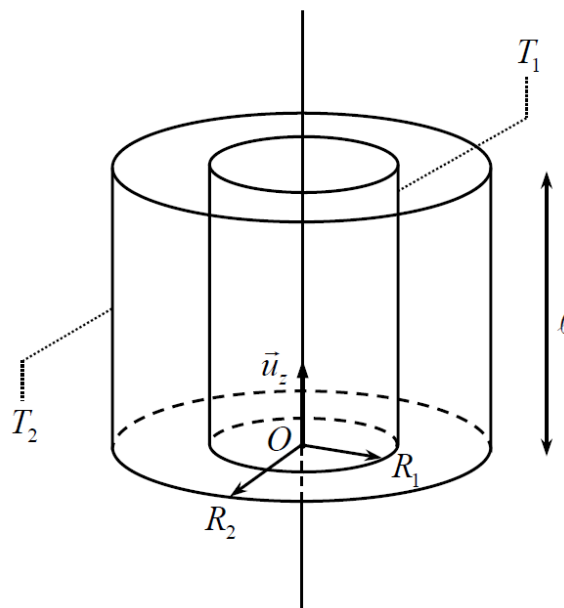
Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de rayon  $R = 10$  cm, de longueur  $\ell = 1,2$  m, recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur  $e_g = 2,0$  cm et de conductivité thermique  $\lambda_g = 0,20$  W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup> ;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur  $e_a = 1,0$  cm d'air de conductivité thermique  $\lambda_a = 0,026$  W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup> ;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur  $e_p = 2,0$  cm et de conductivité thermique  $\lambda_p = 0,035$  W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>.

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance  $\mathcal{P}_m$  permettant de maintenir sa température interne  $T_i$  constante.

### II.1 - Généralités

On considère deux cylindres de même axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2 < T_1$  (**figure 4**).



**Figure 4** - Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique  $\lambda$ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point  $M$  du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , la température  $y$  est donc fonction uniquement de la distance  $\rho$  à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  :  $T(M) = T(\rho)$ .

**Q10.** Le vecteur associé au flux thermique  $\Phi_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$ .

Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

**Q11.** Justifier que  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$ . Justifier physiquement le signe moins.

**Q12.** Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$ , de rayons  $\rho$  et  $\rho + d\rho$  ( $R_1 < \rho < R_2$ ). En déduire que l'expression du champ de température  $T(\rho)$  en tout

$$\text{point } M \text{ du milieu est : } T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1 / R_2)} \ln(\rho / R_1) + T_1.$$

**Q13.** Définir la résistance thermique  $R_{th}$  du milieu. Montrer qu'elle s'écrit :  $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

## II.2 - Détermination du métabolisme d'un manchot

**Q14.** Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon  $R$  du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

**Q15.** En régime stationnaire, justifier que le flux thermique  $\Phi_{th}$  dégagé par un manchot est égal à la puissance  $\mathcal{P}_m$  due à son métabolisme.

**Q16.** Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de **Q13**, donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,1}$  équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de  $R_{th,1}$ .

**Q17.** Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température  $T_p$  et l'air extérieur à la température  $T_e$  sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif :  $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$  où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire  $S$  modélisant le manchot, exprimer en fonction de  $h$  et  $S$  la résistance thermique  $R_{th,cc}$  associée à ce transfert.

**Q18.** En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives  $T_p$  et  $T_e$  très proches, on admet que le flux radiatif surfacique  $\varphi_r$  émis par le manchot, s'écrit :  $\varphi_r \cong 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$  où  $\sigma$  est la constante de Stefan.

Exprimer, en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$  et  $S$ , la résistance thermique  $R_r$  associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

**Q19.** Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,2}$  équivalente à cette association en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$ ,  $h$  et  $S$ . Calculer la valeur de  $R_{th,2}$  lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température  $T_e = -17\text{ °C}$  en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit :  $h = 5,7 + 3,5\cdot V$  où  $V$  est exprimé en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $h$  en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q20.** Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale  $R_{th,tot}$  du manchot en fonction de  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$ . En déduire la valeur de la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne  $T_i = 37,7\text{ °C}$  dans un environnement à la température  $T_e = -17\text{ °C}$  et en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vérifier que la puissance  $\mathcal{P}_m$  est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de  $-17\text{ °C}$  et un vent moyen de  $5,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le tableau suivant rassemble leurs observations (**tableau 1**).

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

**Tableau 1** - Puissance due au métabolisme dans trois groupes de manchots différents

**Q21.** À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

## Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire  $f$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e}_z \text{ en coordonnées cylindriques}$$



$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\varphi \text{ en en coordonnées sphériques}$$

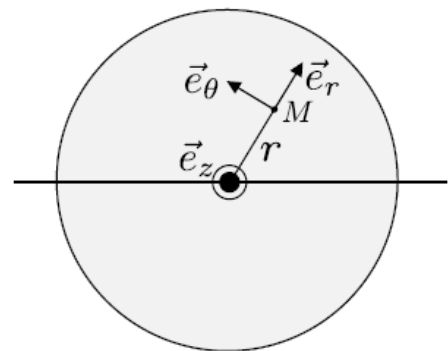
- Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel  $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$  en coordonnées cartésiennes :  $\Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{u}_x + (\Delta a_y) \vec{u}_y + (\Delta a_z) \vec{u}_z$  où  $\Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$
- Permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C sous 1 bar :  $\eta_e = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Coefficient de tension superficielle de l'interface eau/air à 20 °C :  $\gamma_e = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- Définition du debye (D) :  $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

## Problème N°6 – Pour tous - Effets thermiques de la foudre : échauffement d'un fil parcouru par un courant

La foudre se manifeste particulièrement en montagne, milieu propice à la formation de nuages d'orage.

Que ce soit par effet de tension induite ou par passage direct de la décharge électrique, la foudre engendre de forts courants dans les câbles électriques des habitations ou du réseau. Nous allons ici estimer le courant maximal que peut supporter un fil avant de fondre.

On considère un fil électrique en cuivre, cylindrique, de rayon  $R = 2,0 \text{ mm}$ . Il est parcouru par un courant stationnaire  $I$  orienté dans le sens des  $z$  croissants. On utilise des coordonnées cylindriques dont l'axe  $Oz$  est celui du fil (cf schéma).



Document 6 : vue en coupe du fil.

Grandeurs caractéristiques du cuivre :

- conductivité thermique  $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,
- conductivité électrique  $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,
- température de fusion sous 1 bar :  $T_{fus} = 1085^\circ \text{C}$ .

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques pour une fonction ne dépendant que de  $r$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{df}{dr} \vec{e}_r$$

32. Etablir l'expression de la puissance  $p_j$  par unité de volume dissipée par effet Joule dans le fil en fonction de  $I$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

Pour obtenir le profil de température  $T(r)$  en fonction de la distance radiale  $r$ , il faut d'abord établir l'équation de la chaleur dans le fil.

- 33.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(r)$  au sein du fil en régime stationnaire :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{r p_J}{\lambda}.$$

avec  $T_{ext}$  la température extérieure, égale à 20 °C, et  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- 34.** Résoudre l'équation de la chaleur pour obtenir une expression de  $T(r)$ . On exprimera la ou les constantes d'intégration en fonction de  $T_0 = T(r = 0)$  (température au centre du fil).

De plus, le fil est refroidi par un transfert conducto-convectif avec l'air sur sa périphérie, selon la loi de Newton qui donne l'expression du vecteur densité de flux thermique en  $r = R$  :

$$j_{th}(R) = h(T(R) - T_{ext}),$$

- 35.** Etablir une expression de  $T_0$  en fonction de  $p_J$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\lambda$  et  $T_{ext}$ .
- 36.** À quelle condition sur  $R$ ,  $\lambda$  et  $h$  peut-on simplifier l'expression précédente de  $T_0$  sous la forme :

$$T_0 \simeq T_{ext} + \frac{p_J R}{2h}.$$

Cette condition est-elle vérifiée ici ?

- 37.** En déduire l'expression du courant à partir duquel le fil de cuivre fond, puis une valeur numérique approchée.

## Problème N°7 - Niveau 2 - Prospection électrique des sols

La prospection électrique est l'une des plus anciennes méthodes de prospection géophysique. Elle repose sur l'interprétation de la résistance électrique du terrain. Ces mesures doivent être réalisées *in situ*, cette mesure ne pouvant être réalisée en laboratoire sur un échantillon sorti de son environnement. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude des faibles profondeurs.

### 1- Sol homogène

**Q 38.** Exprimer la résistance électrique d'un parallélépipède homogène de longueur  $L$ , de section  $A$  et de résistivité  $\rho = 1/\sigma$  où  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau (figure 11).

Pour déterminer la résistance électrique d'un terrain on impose la circulation d'un courant continu d'intensité  $I$  à la surface du sol qui se répartit en profondeur. Cette opération est réalisée grâce à des électrodes que l'on plante dans le sol aux points  $A$  et  $B$  (figure 12). La tension est mesurée à l'aide d'un voltmètre entre les points  $M$  et  $N$ .

**Q 39.** Dans la pratique on utilise un courant alternatif très basse fréquence. Pour quelle raison ?

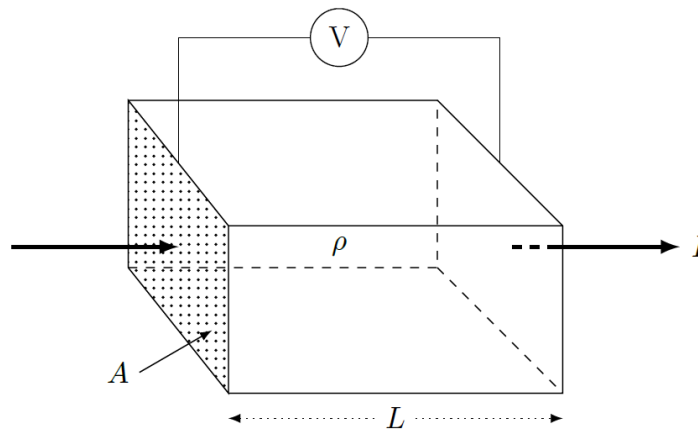


Figure 11

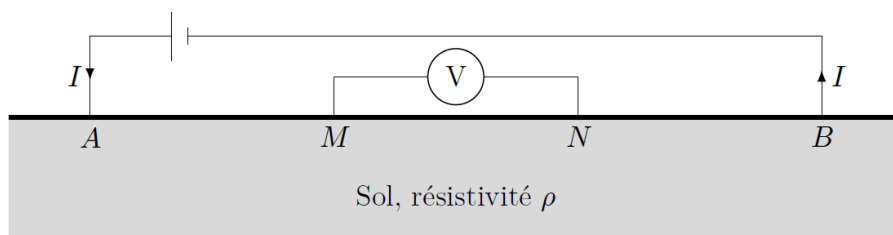


Figure 12

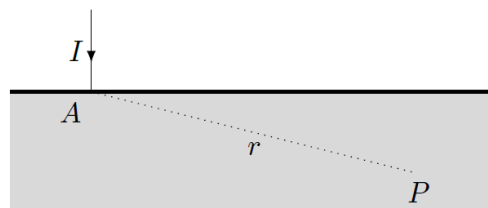


Figure 13

**Q 40.** Considérons seulement l'électrode placée en  $A$  (figure 13). On note  $\vec{j}(r)$  le vecteur densité volumique de courant au point  $P$ . La terre est considérée comme homogène. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ? Donner l'expression de  $\vec{j}(r)$  en fonction notamment de l'intensité du courant  $I$  et de  $r$ .

**Q 41.** Exprimer le champ électrique  $\vec{E}(r)$  et le potentiel électrique  $V_A(r)$  au point  $P$  en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $\rho$ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance.

**Q 42.** Dans le cas des deux électrodes (figure 14), exprimer le potentiel électrique  $V$  au point  $P$  en fonction de  $\rho$ ,  $r_A$ ,  $r_B$  et  $I$ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance. Quelle relation définit les équipotentielles ?

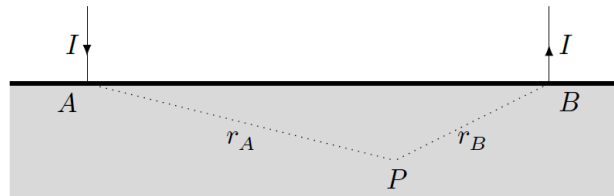


Figure 14

**Q 43.** Exprimer la différence de potentiel  $\Delta V = V_M - V_N$  lue sur le voltmètre (figure 12). Montrer que la résistivité s'écrit  $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$  où  $f$  est le facteur géométrique à exprimer en fonction des distances  $MA$ ,  $MB$ ,  $NA$  et  $NB$ .

**Q 44.** Dans le cas de la configuration dite de Wenner (figure 15), les points  $A$ ,  $M$ ,  $N$  et  $B$  sont équidistants espacés de la longueur  $\ell$ . Exprimer le facteur géométrique  $f$ .

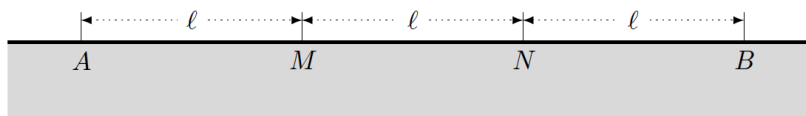
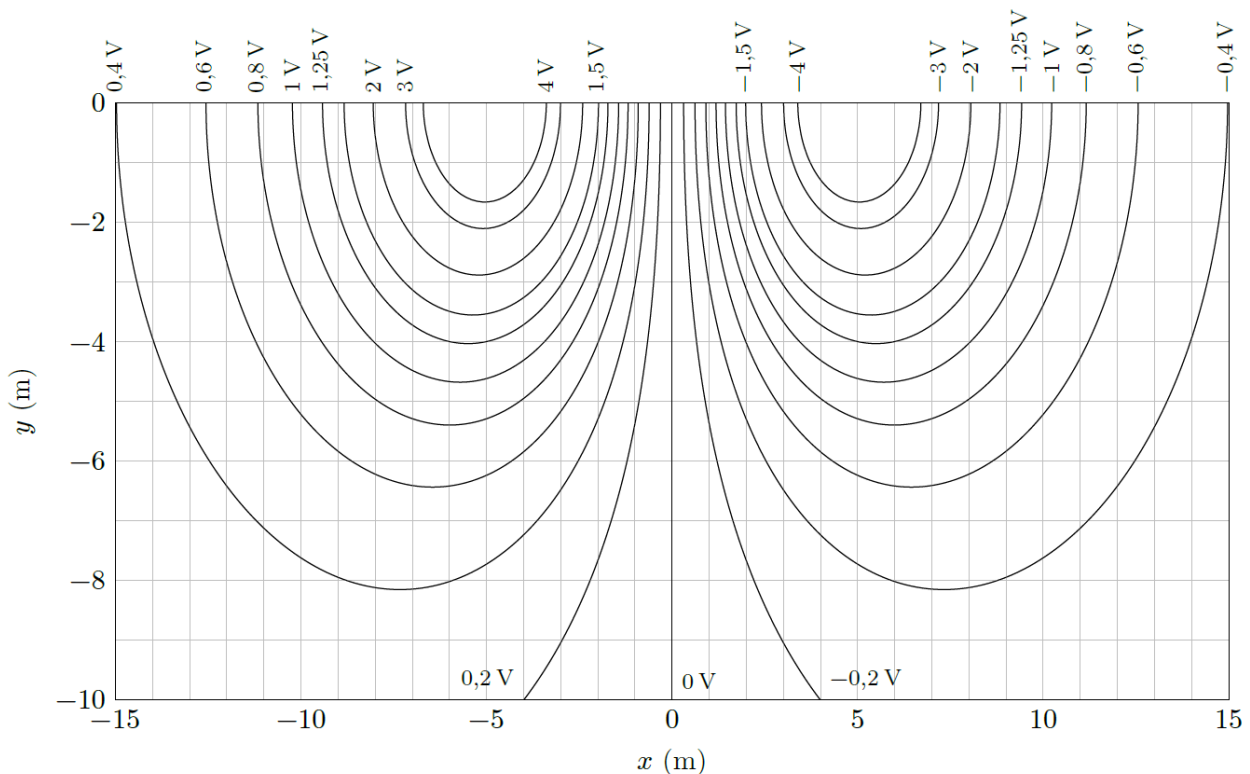


Figure 15

**Q 45.** Les courbes de la figure 16 présentent le résultat de la simulation des équipotentielles tracées pour deux électrodes distantes de 10 m situées en  $\pm 5,0$  m plantées dans un terrain de résistivité  $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ . L'intensité du courant est  $I = 0,50$  A. Que vaut le facteur géométrique correspondant dans la configuration de Wenner ? Cette valeur est-elle en accord avec la simulation de la figure 16 ?



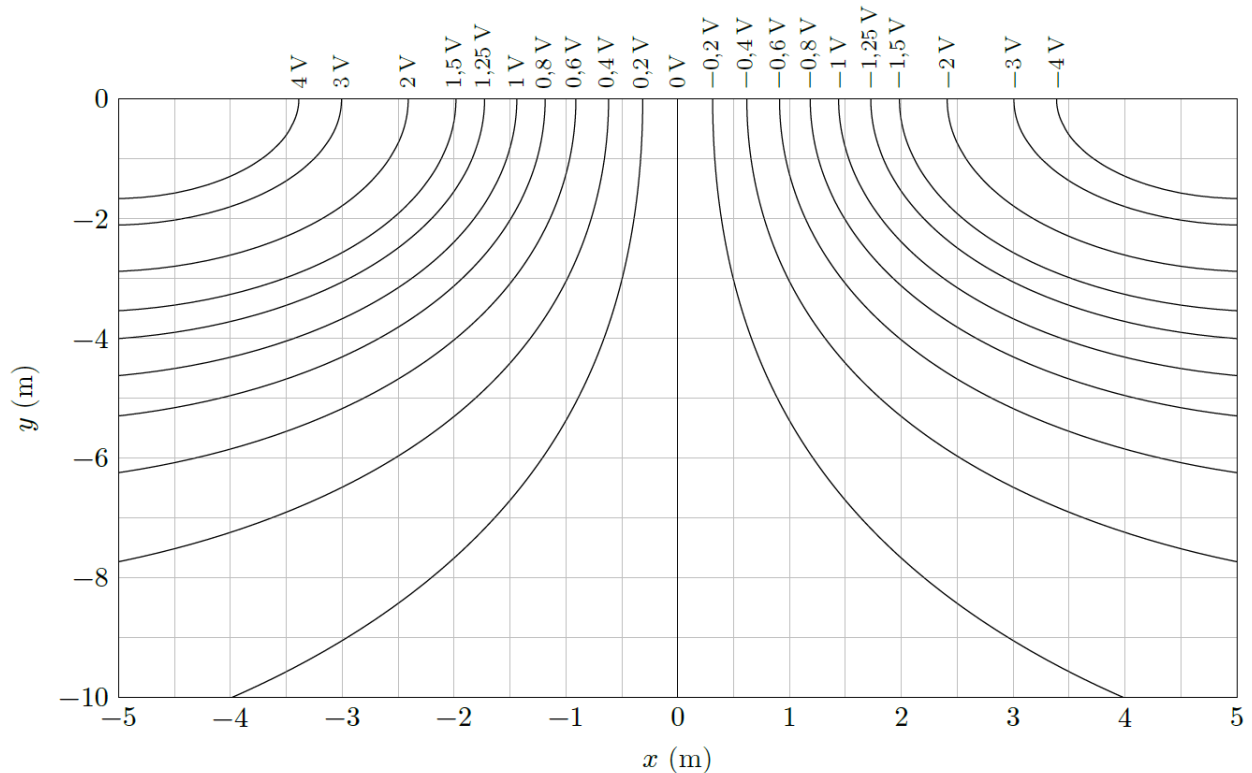


Figure 16

Q 46. Tracer, en expliquant votre démarche, l'allure des lignes de courant.

#### V.B – Modèle à deux terrains

Dans le cas d'un milieu inhomogène on parle de résistivité apparente. Dans le modèle dit à deux terrains, le sol est constitué de deux couches superposées de résistivité  $\rho_1$  et d'épaisseur  $h_1$  pour la couche supérieure et de résistivité  $\rho_2$  et d'épaisseur infinie pour la couche inférieure (figure 17). La résistivité apparente est mesurée pour différents espacements entre électrodes (distance  $AB$  variable).

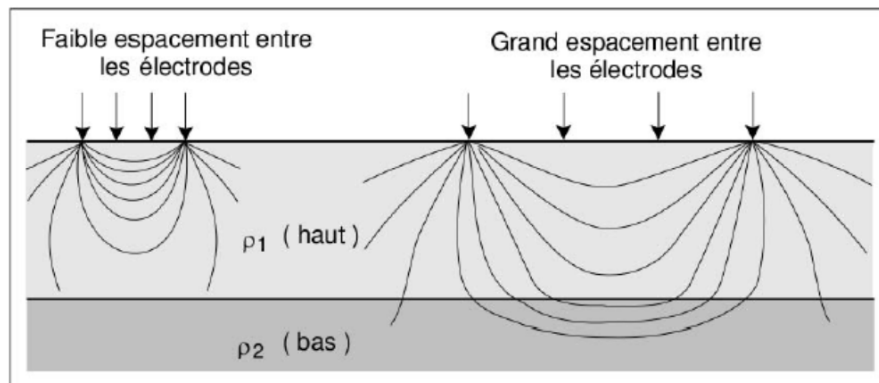


Figure 17 Illustration du sondage électrique (d'après Chouteau et Giroux (2006)), allure des lignes de courant

Q 47. Vers quelle valeur tend à priori la résistivité apparente lorsque  $AB$  est faible ? lorsque  $AB$  est très grande ?

Q 48. La courbe de la figure 18 représente la résistivité apparente  $\rho_a$  mesurée expérimentalement en fonction de la distance  $AB/2$ . Déterminer la résistivité  $\rho_1$  et  $\rho_2$  des terrains ainsi qu'une estimation de la valeur  $h_1$ , épaisseur de la couche supérieure. On s'aidera de l'abaque CH1 donné figure 19 qui représente  $\rho_a/\rho_1$  en fonction de  $AB/2h_1$  en échelle bi-logarithmique. Chaque courbe de cet abaque correspond ainsi à la courbe d'un sondage électrique exécuté sur un sous-sol composé de deux terrains où la première couche a une épaisseur  $h_1$  et une résistivité  $\rho_1$ .



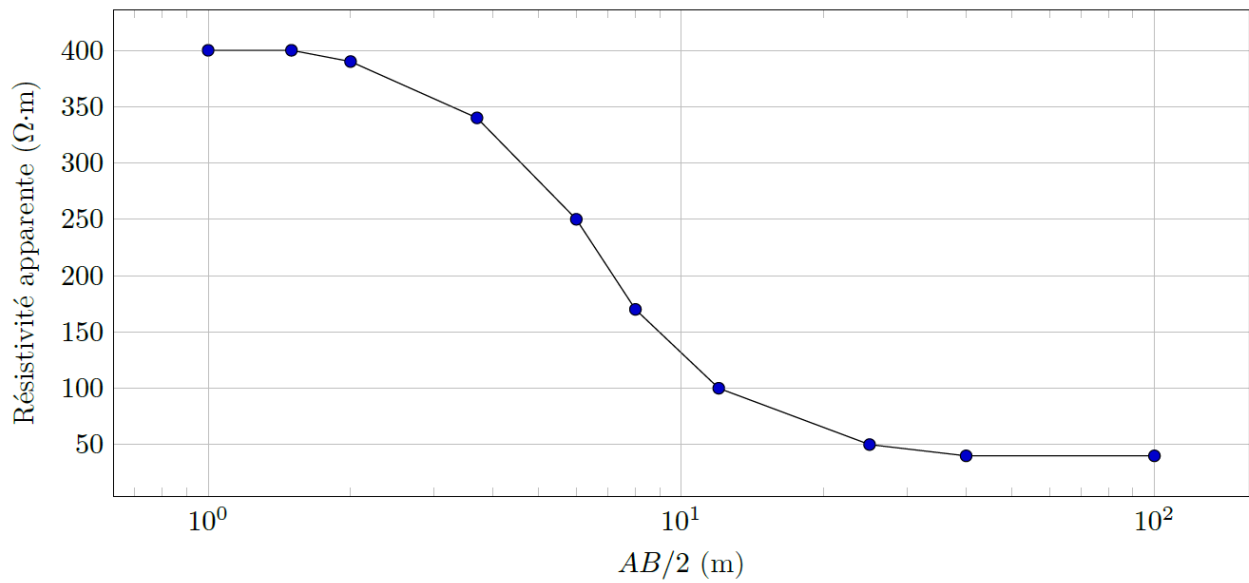


Figure 18 Mesure deux terrains

### Données numériques

Constante de gravitation universelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Rayon de la Terre

$$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Unité de mesure de la pesanteur

$$1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels

$$\Delta g = 1 \text{ } \mu\text{gal}$$

**Abaque CH1 figure 19 : voir page suivante**

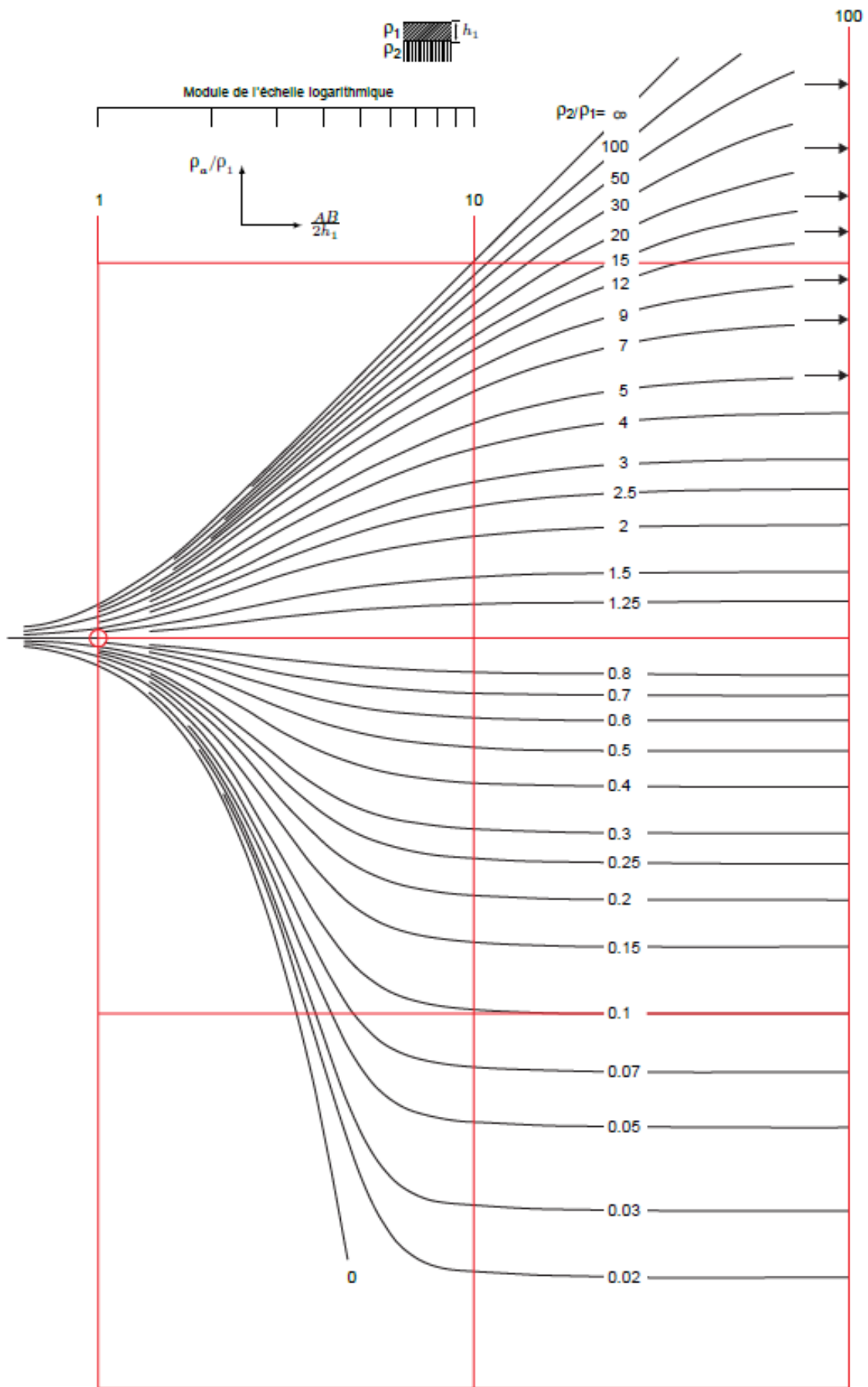


Figure 19 Abaque CH1