COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°11 – semaine Pronote 15 : 09 au 13 Décembre 2024

▪ Au programme des exercices

→ **Chapitre THM1 : Transferts thermiques en régime stationnaire**

→ **Chapitre THM2 : Diffusion thermique (attention !! les ondes et le rayonnement thermiques n'ont pas été abordés).**

▪ Questions de cours

1. ❤ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

2. ❤ Une masse m d'eau passe de l'état solide à –10°C à l'état liquide à +10°C sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334\ kJ.kg^{-1}$ à $0°C$ sous $1\ atm$

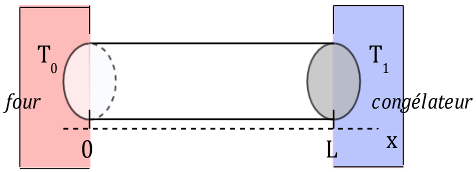
Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}2\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

3. A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

4. ❤ Rappeler les principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1er principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

5. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.



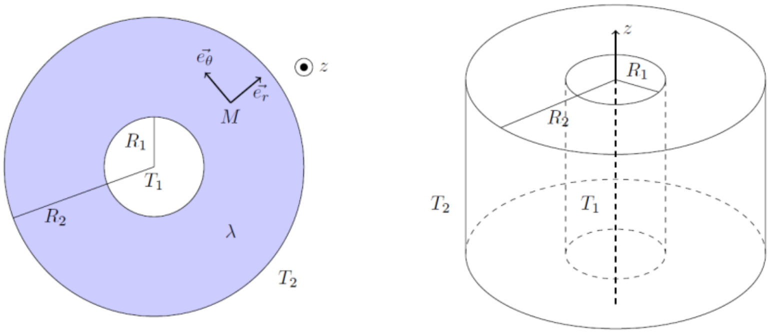
6. ❤ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ'. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{ext} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

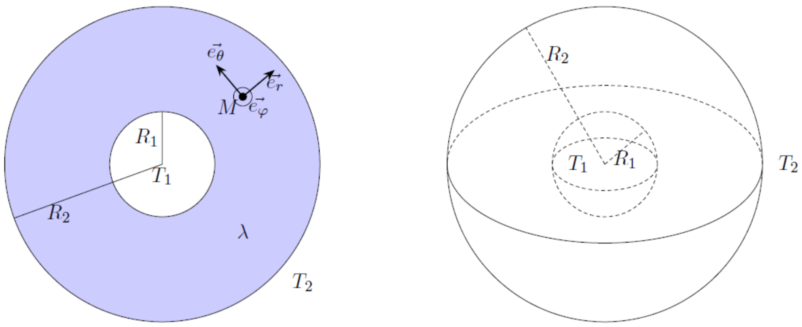
7. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.

8. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h, faite dans un matériau de conductivité λ. On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.



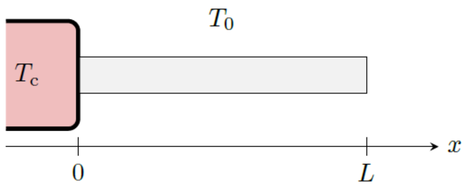
Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

9. On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ. On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

10. ** On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



11. ❤️ On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S, repéré par l'axe (Ox). On supposera que le problème ne dépend que de x. Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1. De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I. On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.

2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

12. ❤️ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne

13. ❤️ A) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.   diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

14. Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique) .

Questions de cours avec éléments de réponses

1. Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace : $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$\Delta U_{12} \underbrace{=}_{1er\ principe} W_{12} + Q_{12}$ *avec* $Q_{12} = 0$ *car la transformation est adiabatique, et*

$\Delta U_{12} \underbrace{=}_{G.P.} \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma-1}$

2. ❤️3 Une masse m d'eau passe de l'état solide à −10°C à l'état liquide à +10°C sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $\Delta_{fus}h = 334\ kJ.kg^{-1}$ à $0°C$ sous 1 atm

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}2\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer que le solide est entièrement réchauffé de θ_i à θ_0, puis qu'il est entièrement fondu à la température θ_0, puis que le liquide obtenu est réchauffé de θ_0 à θ_f, soit $\Delta H = m\left(c_s(\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l(\theta_f - \theta_0)\right)$ où $\theta_0 = 0°C$.

3. A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

Exemple du moteur : Bilan issu du 1er principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta U_{cycle} = W + Q_{ch} + Q_{fr} \underbrace{=}_{Cycle+\ U\ fonction\ d'état} 0$ *(1)*

Bilan issu du 2nd principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta S = S_e + S_c \underbrace{=}_{Cycle+\ S\ fonction\ d'état} 0$ *avec d'après le second principe,*

$S_c \geq 0$, *égalité pour une transformation réversible. Il s'agit d'un moteur ditherme, échanges de chaleur avec deux sources aux températures T_{fr} et T_{ch}, d'où :* $S_e = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}}$, *soit* $\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0$ *(2) ; inégalité de Clausius.*

Expression de l'efficacité d'un moteur thermique : $\eta_{moteur} = \left|\frac{grandeur\ d'intérêt}{grandeur\ de\ coût}\right| = \frac{-W}{Q_{ch}}$ *(3)*

Or d'après (1), $-W = Q_{ch} + Q_{fr}$ *soit dans (3) :* $\eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$.

D'après (2) : $\frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq -\frac{T_{fr}}{T_{ch}}$. *soit :* $\eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

Efficacité de Carnot : $\boxed{\boldsymbol{\eta_{carnot,m} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}}}$,

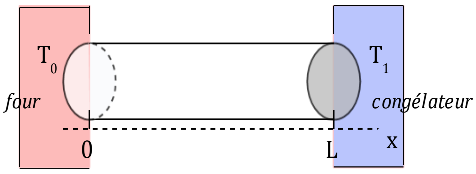
*obtenue pour un fonctionnement **réversible,** correspondant à **l'efficacité maximale** pouvant être atteinte.*

4. ❤️ Compléter le tableau des principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1er principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

Machine cyclique ditherme	**Moteur**	**Réfrigérateur**	**Pompe à chaleur**
Formes du premier principe sur un cycle pour les machines cycliques dithermes $\Delta U_{cycle} \underbrace{=}_{cycle+\ U\ fonction\ d'état} 0 \underbrace{=}_{1er\ principe} W + Q_c + Q_f \Leftrightarrow \mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{th,c} + \mathcal{P}_{th,f} \underbrace{=}_{1er\ principe\ +cycle+\ U\ fonction\ d'état} 0$			
Signe du travail reçu W reçu par le système	$W < 0$	$W > 0$	$W > 0$

Signe de la quantité de chaleur Q_f reçue en provenance de la source froide	$Q_f < 0$	$Q_f > 0$	$Q_f > 0$
Signe de la quantité de chaleur Q_c reçue en provenance de la source chaude	$Q_c > 0$	$Q_c < 0$	$Q_c < 0$
Expression de l'efficacité *expression toujours vérifiée*	$e_m = r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{-\mathcal{P}_{méca}}{\mathcal{P}_{th,c}}$	$e_{frig} = CoP_{frig} = \frac{Q_f}{W} = \frac{\mathcal{P}_{th,f}}{\mathcal{P}_{méca}}$	$e_{PAC} = CoP_{PAC} = -\frac{Q_c}{W} = -\frac{\mathcal{P}_{th,}}{\mathcal{P}_{mé}}$
Efficacité de Carnot = efficacité théorique maximale vérifiée dans le cas d'un cycle réversible	$e_{mot,c} = r_{mot,c} = 1 -$	$e_{frig,max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_{PAC,max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

5. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.



- *Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx :* $d^2H \underbrace{=}_{1er\ principe\ monobare} \delta^2 Q$
- *En régime stationnaire,* $d^2H \underbrace{=}_{stationnaire} 0$ *soit* $\delta^2 Q = 0$
- *En exprimant la quantité d'énergie thermique reçue (entrée en x – sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :*

$\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx))\, dt = 0$ *soit* $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$

- *En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :*

$\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J_Q}(x) d\vec{S} \underbrace{=}_{loi\ de\ Fourier} \iint_{section} -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T) d\vec{S} \underbrace{=}_{vecteurs\ colinéaires\ gradient\ uniforme\ sur\ S} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$

- *soit* $\frac{dT}{dx} = cte$ *et* $T(x) = ax + b$ *(ou* $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ *)*
- *Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :*

$T(x = 0) = T_0$ *et* $T(x = L) = T_1$ *d'où* $T(x) = (\frac{T_1 - T_0}{L})x + T_0$

6. ❤ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ'. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{air} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = \Phi$, *avec* $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j_Q} \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ *soit* $j_{Qx} = cte$

Méthode N°1 :

Loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{grad} T$ *soit en cartésiennes à 1D :* $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underbrace{=}_{j_{Qx} = cte} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$\Phi \underbrace{=}_{\text{convention récepteur}} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

Méthode N°2

$$\Phi = j_{Qx} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

Par séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda}\int_0^e dx \qquad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda} e$$

$\Phi \underbrace{=}_{\text{convention récepteur}} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

Association série : $(R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10 R_{th} = 10\frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e\frac{\lambda'}{\lambda}$

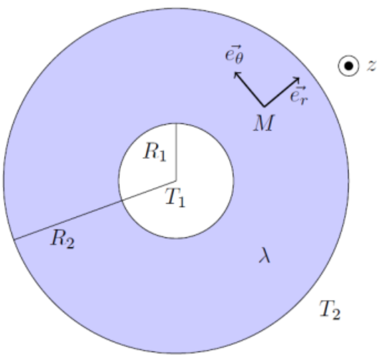
c) Flux sortant par conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_2 - T_{air})$ d'où $R_{cc} = (T_2 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/hS$

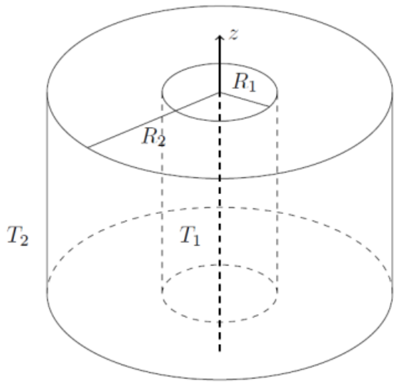
Association série : $R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{hS}$

7. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.

résistances thermiques en série : $\Phi = \frac{T_1 - T_c}{R_1} = \frac{T_c - T_2}{R_2}$ avec $R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S}$ d'où $T_c = \dfrac{\frac{\lambda_1}{L_1}T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2}T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$

8. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h, faite dans un matériau de conductivité λ. On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée



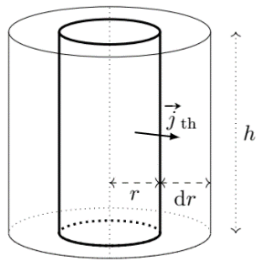


cylindrique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

Bilan sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur h, tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe\\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dr}\,\vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :

$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r)\,\vec{e}_r dS\vec{e}_r = j_Q(r)S_r = j_Q(r)2\pi rh \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda\frac{dT}{dr}2\pi rh = \phi$$

Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et R_2 :

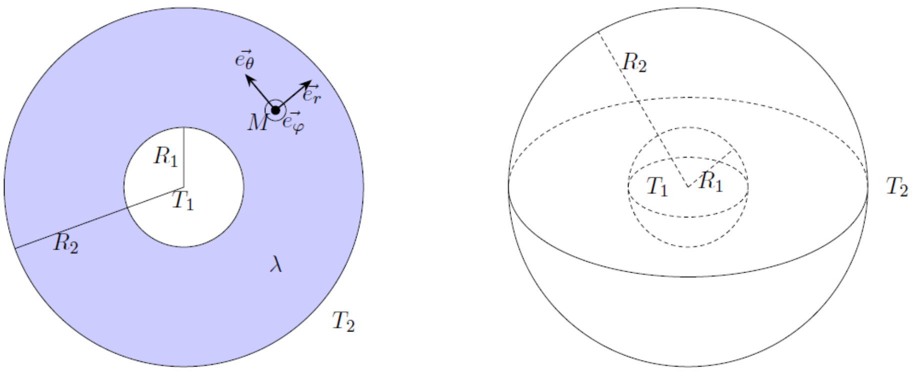
$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h\lambda} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On définit alors la résistance thermique en géométrie cylindrique

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} = \frac{ln(R_2/R_1)}{2\pi h\lambda}}$$

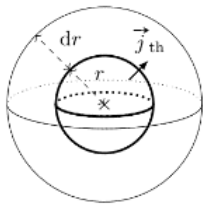
9. On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ. On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe\\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dr}\,\vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r)\,\vec{e}_r dS\vec{e}_r = j_Q(r)S_r = j_Q(r)4\pi r^2 \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2 = constante$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2\lambda}$$

Par séparation des variables, e n intégrant entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = T_2 - T_1$$

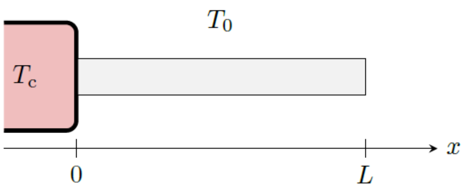
D'où

$$\frac{\phi}{4\pi\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$:

$$\boxed{T(r) = (T_2 - T_1)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1}$$

10. On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



Sur la tranche entre x et $x + dx$, 1^er^ principe en régime stationnaire :

$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x + dx) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)dx)dt$ *soit*

$$\delta Q = \Big(\big(j_x(x) - j_x(x + dx)\big)ab - 2h(T(x) - T_0)abdx\Big)\,dt = -\left(\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)\right)dxdt = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)$ *avec d'après la loi de Fourier :* $j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}$, *soit* $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab}(T(x) - T_0)$

Avec $\boxed{\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}}$ *:*

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0}$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

11. On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S, repéré par l'axe (Ox). On supposera que le problème ne dépend que de x. Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1. De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I. On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) ❤️ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.

2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

$$p_J = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{reçu,total} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \delta^2 Q_{entrant} + \delta^2 Q_{sortant} + \delta^2 Q_{Joule}$$

Avec $\delta^2 Q_{Joule} = p_J S dx dt$

$$\frac{\delta^2 Q_{reçu,total}}{dt} = 0 = \ \Phi(x) - \Phi(x+dx) + p_J S dx = -\frac{d\Phi}{dx}dx + p_J S dx = 0 \ \Leftrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dx} = p_J S \quad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier : $\Phi(x) = j_{th}(x)S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$ *Soit* $\frac{d\Phi}{dx} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie : $\frac{d\Phi}{dx} = p_J S = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Soit $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}x^2 + Ax + B$$

12. ❤ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne

- *Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre* x *et* $x+dx$, *entre* t *et* $t+dt$ *en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :* $d(\delta H) = d^2H = \delta^2 Q$
- *Dans le cas d'un système monophasé :* $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho\ S dx\ c\ dT$ ***; x fixé :*** $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$ *;*
- $\delta^2 Q$ *: flux entrant moins flux sortant, soit* $\delta^2 Q = \big(\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)\big)\, dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx\ dt$
- *Avec* $\Phi(x) = \iint_{section} \vec{j_Q}(x) d\vec{S} = j_{Qx} S, \quad \delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S\ dx\ dt$
- *Loi de Fourier :* $\vec{j_Q}(x) = -\lambda\ \overrightarrow{grad}(T), d'où\ j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$ *;*
- *finalement : équation de la chaleur* $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ *avec* $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ *diffusivité, telle que* $\tau \sim \frac{L^2}{D}$

13. ❤ A) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}$ m^2·s^{-1}. diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}$ m^2·s^{-1}.

1) Temps de diffusion sur 1 cm	$\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D}$	$\tau_1 \approx 10$ s	
Temps de diffusion sur 1 m	$\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D}$	$\tau_2 \approx 10^5$ s	$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

2) $L = \sqrt{\tau D}$ *avec cuisson des pâtes :* $\tau \approx 10\ min = 600\ s$ *d'où* $L = \sqrt{\tau D} \approx 10\ cm$ *: mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement…*

14. ❤ Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique) .

Equation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On approxime alors les dérivées spatiales et temporelles aux taux de variations des fonctions sur Δx *et* Δt *:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2\,T(x_j\,, t_i)}{\Delta x^2}$$

soit

$$\frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t} \simeq D\,\frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2\,T(x_j\,, t_i)}{\Delta x^2}$$

On admet que cette méthode converge si $D\Delta t < \frac{1}{2}\Delta x^2$.

La température au cours du temps est stockée dans une liste de listes T

$T[i]$ est une liste donnant $T(x, t = i\Delta t)$, c'est-à-dire la température en tout point de l'espace à l'instant $i\Delta t$;

$T[i][j]$ est un flottant donnant $T(x = j\,\Delta x, t = i\Delta t)$ la température à l'instant $i\Delta t$ et à la position $j\;\Delta x$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq\simeq \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{(\Delta x)^2}$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors dans cette ***méthode*** *des* ***différences finies*** *:*

$$\frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t} = D\,\frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{\Delta x^2}$$

Relation de récurrence de la résolution numérique :

$$\boldsymbol{T[i+1][j] = T[i][j] + A(T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j])} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{A = D\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}$$