TD CHAPITRE THM.2 : DIFFUSION THERMIQUE - CORRIGES

Exercice 1. Dimension de la diffusivité thermique

Exercice 2. Temps et longueur de diffusion

1) Temps de diffusion sur 1 cm	$\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D}$	$\tau_1 \approx 10$ s	
Temps de diffusion sur 1 m	$\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D}$	$\tau_2 \approx 10^5$ s	$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

2) $L = \sqrt{\tau D}$ avec cuisson des pâtes : $\tau \approx 10\,\text{min} = 600\ s$ d'où $L = \sqrt{\tau D} \approx 10\ cm$: mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement…

3) $\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D} \approx 150\ jours$

Exercice 3. Conductivité dans la croute terrestre (oral ATS)

Modélisation géométrie plane ($1\ km \ll 6400\ km$), en choisissant un axe vertical ascendant depuis la surface terrestre.

Bilan enthalpique sur une surface S petite à l'échelle terrestre, **pour une tranche d'épaisseur** dz : $\mathrm{d^2H} = \delta^2\mathrm{Q}$

En régime stationnaire, $\mathrm{d^2H} = 0$ **soit** $\delta^2\mathrm{Q} = 0$

En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en z – sortie en $\mathrm{z + dz}$) à l'aide des flux thermiques :

$\delta^2\mathrm{Q} = (\Phi(\mathrm{z}) - \Phi(\mathrm{z+dz}))\,\mathrm{dt} = 0$ soit $\Phi(\mathrm{z}) = \Phi(\mathrm{z+dz}) = \mathrm{cte}$

En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$\Phi(\mathrm{z}) = \iint_{\mathrm{section}} \overrightarrow{\mathrm{j_Q}}(\mathrm{z})\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{section}} -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{T})\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$ soit $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{cte}$ et $\mathrm{T(z) = az + b}$ (ou $\frac{\mathrm{d^2T}}{\mathrm{dz^2}} = 0$)

Détermination de a **et** b **à l'aide des conditions aux limites :**

$\mathrm{T(z=0) = T_0} = b$ et $\mathrm{T(z=-d)} = T_1 = T_0 + \Delta T = -ad + T_0$ d'où $a = -\frac{\Delta T}{d} = -\left(\frac{\mathrm{T_1 - T_0}}{\mathrm{d}}\right)$

finalement : $T(z<0) = -\frac{T_1 - T_0}{d}z + T_0 = -\frac{\Delta T}{d}z + T_0$;

Pour la surface S, la puissance mesurée dans le sens des z croissants :

$$\Phi_{th} = j_{Qz}\,S = -\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}\mathrm{S} = \lambda\frac{T_1 - T_0}{d}S = \lambda\frac{\Delta T}{d}S$$

Soit $\boxed{\Phi_{th} = \lambda\frac{\Delta T}{d} \times 4\pi R_T^2} = 33 \times \frac{30}{1.10^3} \times 4\pi \times (6{,}4.10^6)^2 = 1 \times 4\pi \times (6{,}4)^2 \times 10^{12}$

$\boldsymbol{\Phi_{th} \approx 5.10^{14}\ W}$ positive si comptée de la Terre vers l'atmosphère.

3. Analyse dimensionnelle de la diffusivité thermique D :

équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ *avec* $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité, avec $D \approx \frac{L^2}{T} \Rightarrow L \approx \sqrt{D \times T} \approx 1\ m.$

Exercice 4. Tongs sur la plage au soleil (Oral ATS, 2022)

Loi de Fourier $\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$.

Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système correspondant à une tranche de tong comprise entre z et $z + dz$ (hypothèse flux unidimensionnel dans la direction verticale) entre les instants t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :

$$d(\delta H) = d^2H = \delta^2 Q$$

Dans le cas d'un système monophasé : $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho\, S dx\, c\, dT$ ***;à zx fixé :*** $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z dt$;

$\delta^2 Q$: flux entrant moins flux sortant, soit $\delta^2 Q = \big(\Phi(z,t) - \Phi(z+dz,t)\big)\,dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_t dz\,dt$

Avec $\Phi(z,t) = \iint_{section} \overrightarrow{j_Q}(z) d\vec{S} = j_{Qz}S, \quad \delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\right)_t S\, dz\, dt$

Loi de Fourier : $\overrightarrow{j_Q}(z) = -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T), d'où\, j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_t$ et $\delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\right)_t S\, dz\, dt = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t S\, dz\, dt$

finalement : équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z - \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité thermique, telle que $\tau \sim \frac{L^2}{D}$, soit D en m^2.s^{-1}. A.N. : $D = \frac{\lambda}{c\,\rho} = \frac{2}{2.10^6} = 10^{-6}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$

$D = \frac{\lambda}{c\,\rho} = \frac{L^2}{\tau_c} = \frac{e^2}{\tau_c}$. on a donc $\tau_c = \frac{e^2}{D}$

A.N. : $\tau_c = \frac{e^2}{D} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 100\ s.$

(remarque : Conducto-convection de l'air sur la tong négligée)

Si on se place en régime stationnaire et qu'on néglige la conducto-convection de l'air :
En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(z) = \Phi(z+dz) = \Phi$, avec $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ soit $j_{Qx} = cte$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{grad} T$ soit en cartésiennes à 1D : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dz} \underbrace{=}_{j_{Qx}=cte} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

On peut évaluer la surface d'une tong : longueur d'environ 25 à 40 cm, largeur 20 à 30 cm, soit une surface d'environ $S \approx 30 \times 25 = 750\ \mathrm{cm^2} = 7{,}5.10^{-2}\ \mathrm{m^2}$

A.N. : $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \approx \frac{10^{-2}}{2 \times 7{,}5.10^{-2}} = \frac{1}{15} \approx 8.10^{-2} K.W^{-1}$

En régime stationnaire, $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{\Delta T \lambda S}{e}$ en prenant $\Delta T = T_{sable} - T_{peau}$ et $T_{peau} = 40°C$ par exemple pour éviter tout inconfort, ou 50°C pour éviter les brûlures

$\Phi = \frac{T_{sable} - T_{peau}}{R_{th}}$; $T_{peau} < T_{max}(40°C\ ?) \Rightarrow \Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}}$

A.N. avec $T_{max}(40°C)$: $\Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}} = \frac{30}{8}.10^2 \approx 400\ W$

A.N. avec $T_{max}(50°C)$: $\Phi > \frac{T_{sable} - T_{max}}{R_{th}} = \frac{20}{8}.10^2 \approx 250\ W$

Exercice 5. Temps de cuisson d'un poulet dans un four (ATS 2018)

1) Analyse dimensionnelle :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = \frac{\Theta}{T} \quad et \quad [\Delta T] = \frac{\Theta}{L^2}$$

D'après l'équation de la chaleur,

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = \left[\frac{\lambda}{\rho c}\right][\Delta T] \Rightarrow \frac{\Theta}{T} = \left[\frac{\lambda}{\rho c}\right]\frac{\Theta}{L^2} \Rightarrow T = L^2\left[\frac{\rho c}{\lambda}\right]$$

Or, $[\tau] = T$ et $[\delta] = L$, d'où on a une relation de la forme $\tau = K_1 \delta^2$ avec $\boxed{K_1 = \frac{\rho c}{\lambda}}$

(K_1 est l'inverse du coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda}{\rho c}$)

2) Le lien entre la distance δ et la durée τ sur laquelle diffuse la chaleur est donné par le biais du coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda}{\rho c}$, ou du coefficient associé K_1. ordre de grandeur : $\boldsymbol{\tau \sim \frac{\delta^2}{D}} = K_1 \boldsymbol{\delta^2}$

Assimilons un poulet à une sphère de rayon R. Sa masse m vérifie :

$$m = \rho V = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3 \quad \Rightarrow m \propto R^3 \Rightarrow R \;\propto m^{1/3}$$

En doublant la masse d'un poulet, on multiplie donc son rayon par un facteur $2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}3$

Pour le poulet de $m_1 = 1\, kg$, on a : $\delta_1 = R_1 = \alpha\, {m_1}^{1/3}$ et $\tau_1 = K_1 {\delta_1}^2 \quad \Rightarrow K_1 = \frac{\tau_1}{{\delta_1}^2}$

Pour le poulet de $m_2 = 2\, kg$, on a : $\delta_2 = R_2 = \alpha\, {m_2}^{1/3}$ et $\tau_2 = K_1 {\delta_2}^2$

$$\tau_2 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \tau_1 = \left(\frac{{m_2}^{1/3}}{{m_1}^{1/3}}\right)^2 \tau_1 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{3}} \tau_1 = 2^{\frac{2}{3}}\tau_1 = 1{,}6\ \times 1 = 1{,}6\text{ h} \sim \underline{1\text{ h }30\text{ min}}$$

Cette durée correspond à un processus de diffusion thermique dans un solide, donc à une cuisson à l'aide d'un four traditionnel (sans chaleur tournante [convection], sans micro-onde [rayonnement]).

Exercice 6. **Refroidissement progressif d'un supraconducteur (CMP MP 2024)**

Exercice 7. Relaxation d'une répartition sinusoïdale de température ***(J. Kieffer)***

L'équation de diffusion s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En injectant la forme de $T(x,t)$ dans cette équation, on obtient

$$\cos(\alpha x) \times \left[\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -D\alpha^2\theta\right] \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + D\alpha^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \exp(-D\alpha^2 t)$$

L'équation étant linéaire, on peut appliquer le principe de superposition. Chaque sinusoïde relaxe alors avec une fonction de la forme $\exp(-D\alpha^2 t)$. Soit un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{D\alpha^2}$

Un créneau ne contient que des harmonique impaires du fondamental, le premier harmonique après le fondamental est donc celui de rang 3 et on peut comparer les temps caractéristiques de relaxation des deux premiers harmoniques

$$\frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{1}{9}$$

On voit donc que le fondamental relaxe beaucoup plus lentement (au moins 9 fois plus lentement!) que les harmoniques suivant et donc on retrouve très vite un profil quasi sinusoïdal...

Exercice 8. Chauffage d'une maison (Centrale ; *J. Kieffer*)

1) h s'apparente au coefficient d'une loi de Newton quant à K il peut s'interpréter comme une résistance thermique (une conductance thermique plus précisément). Etant données les orientations, on a $K < 0$ (si $\theta_i > \theta_e$ $P_{Qe} > 0$) et $h > 0$ si (si $T(e) > \theta_i$ $P_{Qs} > 0$).
h est en $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ et K est en $\mathrm{W \cdot K^{-1}}$

2) L'équation de conservation dans le sol s'écrit :

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_{th} = p = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

3) Si on fait un bilan sur l'ensemble sol+maison, on a les termes de variation qui se compensent soit :

$$P = peS = |K|(\theta_i - \theta_e) \quad AN\ :\ P = 400\,\mathrm{W}$$

4) On a également en faisant un bilan sur la dalle :

$$P = P_{Q_s} = hS(T(e) - \theta_i) \Rightarrow T(e) = \frac{P}{hS} + \theta_i = 23\,°\mathrm{C}$$

Le calcul de $T(0)$ est un peu plus délicat... Il faut résoudre l'équation trouvée précédemment en stationnaire soit

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{p}{\lambda} \Rightarrow T = Az + B - \frac{p}{2\lambda}z^2$$

On a alors avec les CL :

$$j_{th}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(0) = 0 = A \quad T(e) = B - \frac{p}{2\lambda}e^2 \Rightarrow T = T(e) + \frac{p}{2\lambda}(e^2 - z^2)$$

On a donc

$$T(0) = T(e) + \frac{p}{2\lambda}e^2 = T(e) + \frac{P}{2\lambda S}e$$

Il manque λ pour faire l'AN mais l'idée y est. Au passage, la formule est bien homogène puisqu'on a fait apparaître la résistance thermique "classique"...

Exercice 9. Problème ouvert : Combinaison de plongée [oral CCP PSI] *(E. Thibierge)* 3 | 2

On est a priori dans un régime transitoire, mais au vu des données disponibles on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

1 La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\mathrm{conv}} = 1/\alpha S = 0{,}05\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$ en prenant $S \sim 2\ \mathrm{m^2}$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\mathrm{tot}} = R_{\mathrm{conv}} + R_{\mathrm{peau}} = 8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne :

$$\mathrm{d}H = mc_{corps}\,dT = -\Phi_{\mathrm{tot}}dt + P_{\mathrm{corps}}dt = \frac{T_{mer}-T}{R_{tot}}dt + P_{\mathrm{corps}}dt$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de température entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant

$T_{\mathrm{mer}} - T(t) \approx T_{\mathrm{mer}} - T_0 = 20\ °\mathrm{C}$. Alors, $\quad mc_{corps}\,\Delta T = \left(\frac{T_{mer}-T}{R_{tot}} + P_{corps}\right)\Delta t$

soit

$$\Delta t = \frac{mc_{corps}}{\frac{T_{mer} - T_0}{R_{tot}} + P_{corps}}\Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70$ kg, $\quad \Delta t \approx 3{,}2 \cdot 10^3$ s = 53 minutes, ce qui semble cohérent.

la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{combi} = \frac{e}{\lambda_{néo}S}$$

Premier principe mis sous forme d'une équation différentielle :$mc_{corps}\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{tot}} = \frac{T_{mer}}{R_{tot}} + P_{corps}$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$0 + \frac{T_\infty}{R_{tot}} = \frac{T_{mer}}{R_{tot}} + P_{corps}$ $\quad$ soit $\quad T_\infty = T_{mer} + R_{tot}P_{corps}$

On veut $T_\infty > T_{hypo} = 35°C$. Il ne reste qu'à résoudre pour trouver e