CHAPITRE EM.4 : INDUCTION – RAPPELS ET COMPLEMENTS

ERREURS CLASSIQUES ET CONSEILS UTILES

1. Il est indispensable d'orienter le ou les circuit(s) via l'intensité les(s) traversant, ce qui définit l'orientation de la surface puis celle de la f.é.m. induite : La normale $\vec{n}$ d'une surface ouverte S quelconque s'appuyant sur le contour $\mathcal{C}$ est orientée à partir de l'orientation + par la «règle du tire-bouchon». Il faut impérativement choisir une orientation pour le contour (ici, via l'intensité) et présenter ce choix sur un schéma.
2. Le flux magnétique est une grandeur scalaire algébrique (et non forcément positive !)
3. Ne pas hésiter à redessiner le schéma électrique équivalent en y incluant une source de tension de fém e_{AB} orientée en convention générateur (et ceci quel que soit le signe de e_{AB} !) avant d'écrire l'équation électrique. Dans un tel schéma, il faut aussi dessiner la bobine pour tenir compte de l'auto- induction ; ceci conduit à écrire $u = (Ri + \frac{Ldi}{dt}) - e_{ext}$, où e_{ext} est la force électromotrice induite par un champ extérieur.
4. Pour le calcul de la force élémentaire de Laplace, il est impératif de représenter les trois vecteurs sur une figure afin d'obtenir le sens de d$\vec{f}$, ce qui oblige à choisir sur la figure une orientation pour i (dans les calculs, i reste algébrique). On calcule ensuite soit la résultante (pour un mouvement de translation). Attention à l'orientation de la base orthonormée, qui doit être directe !
5. Le sens de la force de Laplace ne dépend évidemment pas du choix de l'orientation positive de i.
6. Il est très fortement conseillé de prévoir (ou à défaut de confirmer) l'évolution des phénomènes par application de la loi de Lenz (s'agissant d'une loi qualitative, elle ne nécessite pas d'orienter le contour du circuit contrairement à la loi de Faraday).
7. Il faut être précis en expliquant les phénomènes d'auto-induction ou d'induction mutuelle : « Calcul du flux du champ magnétique créé par … à travers … ».
8. N'oubliez pas de tenir compte du nombre de spires des circuits dans les calculs de flux !
9. Une inductance est toujours positive, tandis que le signe d'une inductance mutuelle est arbitraire, et lié aux orientations des deux circuits.
10. L'induction s'oppose à la variation d'un courant (et non au courant lui-même !) ; ainsi, s'il est bien connu qu'une inductance dans un circuit retarde l'établissement d'un courant, il faut également avoir présent à l'esprit que lorsqu'un courant est établi et qu'on ouvre le circuit, elle s'oppose également à sa diminution, donc favorise son maintien, et que lorsque le courant est constant, elle n'a aucun effet et se comporte comme un fil.
11. Les exercices d'induction doivent être traités avec une grande vigilance pour éviter les erreurs de signe, aussi bien dans les équations électriques que mécaniques !
12. Dans le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent, il est conseillé de vérifier le « bilan auxiliaire » de puissance $P_{\text{Lapl.}} + P_{\text{induction}} = 0$; cela confirme la cohérence des expressions de la force de Laplace (ou du moment résultant) et de la force électromotrice, obtenues séparément.

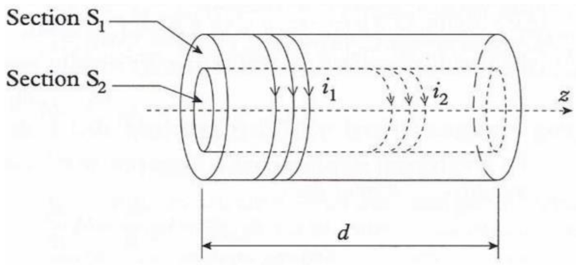
APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Inductance propre d'un solénoïde IMPORTANT | 2 | 1

Considérons un solénoïde d'axe Oz, de longueur ℓ = 40 cm, de section S = 20 cm^2, contenant N = 200 spires. Exprimer et calculer son inductance propre L. Donnée : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

Exercice 2. Coefficient d'inductance mutuelle entre 2 solénoïdes imbriqués *(D'après Oral CCINP PSI)*

IMPORTANT | 2 | 1 ou 2

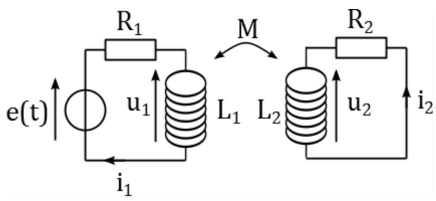


On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires.

1) Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.
2) On se place dans le cas où les 2 bobines ont même rayon (les 2 bobinages sont alors imbriqués l'un dans l'autre et $S_1 = S_2 = S$). Exprimer M en fonction de L_1 et L_2, inductances propres des 2 bobines.
3) Calculer M avec $N_1 = N_2 = 200$, $d = 40$ cm, $S_1 = S_2 = 20$ cm^2, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.
4) La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_2(t) = I\,cos(\omega t)$, avec $I = 1A$, avec ω une pulsation suffisamment basse pour que l'ARQS magnétique s'applique. La bobine extérieure est en court-circuit. En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_1(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
5) Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

Exercice 3. étude de deux circuits couplés par mutuelle

IMPORTANT | 2 | 2

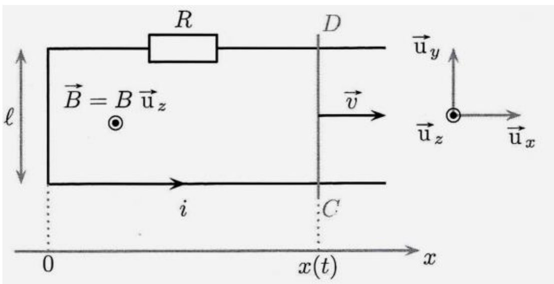


Considérons les deux circuits couplés suivants : un circuit (R_1, L_1) série alimenté par une source de tension $e(t) = v_1(t)$ couplé par mutuelle avec un circuit (R_2, L_2) série.

1) Ecrire les équations différentielles vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2) La source de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = v_1(t) = E\cos(\omega t)$, on suppose le régime sinusoïdal forcé établi. Montrer alors que le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu du circuit 1, à un unique dipôle d'impédance $\underline{Z}$ dans laquelle interviennent les caractéristiques des deux circuits.

Exercice 4. Rails de Laplace générateur

IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2



On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs.

La distance entre les deux points de contact est notée ℓ = CD.

Ainsi posée, la barre referme le circuit électrique. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante et indépendante du déplacement.

On fixe arbitrairement l'orientation du courant i dans le circuit.

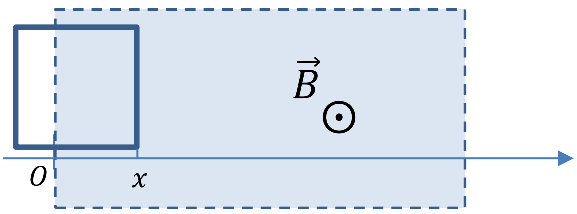
La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement à la vitesse $\vec{v} = v(t)\overrightarrow{u_x}$ par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements.

1) Etablir les équations électrique et mécanique vérifiées par le système.
2) En déduire l'expression de la vitesse de la tige, ainsi que celle de l'intensité circulant dans le circuit.
3) Effectuer un bilan de puissance à partir des équations électrique et mécanique. Montrer que $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

Exercice 5. Freinage d'un cadre

IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2



Un cadre carré, conducteur, de côté a, de masse m, de résistance totale R et d'inductance négligeable, se déplaçant sans frottements avec le sol ou l'air, arrive avec une vitesse initiale v_0 dans une zone au sein de laquelle règne un champ magnétique uniforme, stationnaire et orthogonal au plan du cadre. Le cadre a un mouvement rectiligne selon l'axe (Ox), d'origine O le point correspondant au début de la zone où règne le champ magnétique. On repère la position du cadre par x = position du côté le plus avancé ; à $t = 0$, on considère $x = 0$.

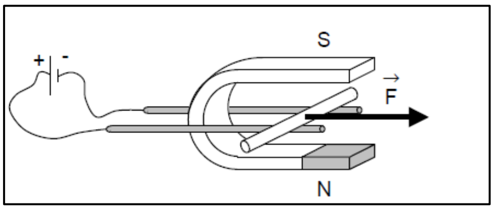
1) Etablir et résoudre l'équation différentielle régissant la vitesse $v(t)$ du cadre.

2) Quand y a-t-il freinage ? A quelle condition le cadre s'arrête-t 'il ?

Exercice 6. Rails de Laplace moteur

IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

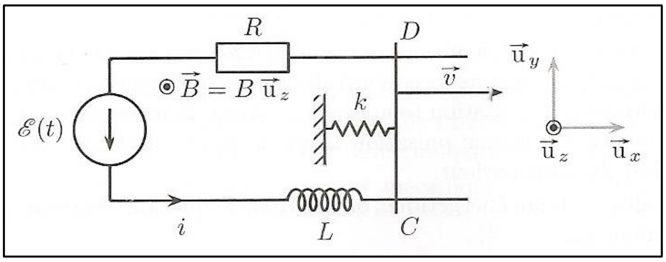
On reprend le dispositif de rail de Laplace décrit dans l'application « rail de Laplace générateur », le dispositif étant cette fois-ci alimenté par un générateur de tension continue E à partir de l'instant initial, sans intervention d'unopérateur extérieur. On négligera à nouveau les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements.



1) Etablir les équations électrique et mécanique vérifiées par le système.
2) En déduire l'expression de la vitesse de la tige, ainsi que celle de l'intensité circulant dans le circuit.
3) Effectuer un bilan de puissance à partir des équations électrique et mécanique. Montrer que $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

Exercice 7. Etude d'un haut-parleur simplifié

IMPORTANT | 2 | 3



Un haut-parleur électrodynamique comporte un aimant permanent et fixe, permettant de créer un champ magnétique radial $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$ de norme constante. L'élément actif du haut-parleur est l'équipage mobile formé de la membrane et d'une bobine mobile.

La bobine mobile peut se translater le long de son axe $x'x$ dans l'entrefer de l'aimant. On la considèrera constituée de N spires identiques de rayon a, de résistance totale R et d'inductance propre L.

Elle est reliée à un générateur de f.é.m. $e(t)$, qui est l'image analogique du signal sonore à émettre.

On considèrera ici que le haut-parleur est excité sinusoïdalement à la pulsation ω par un générateur de fém $e(t) = E\cos(\omega t)$. On notera $i(t)$ le courant circulant dans le haut-parleur et $x(t)$ le déplacement de la membrane.

La bobine est solidaire d'une membrane qui crée des ondes sonores lorsqu'elle est en mouvement dans l'air. La membrane est reliée mécaniquement à l'aimant par une suspension modélisée par un ressort de constante de raideur k. Les frottements de l'air sont représentés par une force de frottement fluide $-h\vec{v}$.

On appelle m la masse de l'équipage mobile bobine + membrane.

La longueur totale de l'enroulement est noté $\ell_{bob} = N\,2\pi a$ pour alléger les équations.

1) Représenter le modèle simplifié classique du haut-parleur électrodynamique.
2) Etablir les équations électrique et mécanique
3) Réécrire les équations couplées associées au haut-parleur en utilisant la notation complexe, et en ne faisant intervenir que les variables $i(t)$ et $x(t)$.

4) Mettre l'impédance d'entrée $\underline{Z} = \frac{\underline{e}}{\underline{i}}$ sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z_m}$ où $\frac{1}{\underline{Z_m}} = \frac{1}{R'} + jC'\omega + \frac{1}{jL'\omega}$, avec $R' = R_m, C' = C_m$ et $L' = L_{m\omega}$ à exprimer en fonction des caractéristiques du haut-parleur étudié. Justifier l'appellation d'impédance motionnelle pour $\underline{Z_m}$.

5) Faire un schéma électrique du système équivalent.

6) On peut également poser que l'impédance du haut-parleur se compose d'une partie réelle R_T et d'une partie imaginaire X_T : $\underline{Z} = R_T + jX_T$.
Montrer alors que l'expression de R_T est la suivante : $R_T = R + \frac{R_m}{1+R_m^2(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})^2}$.
On considère un haut-parleur tel que la masse de l'équipage mobile est $m = 4{,}0$ g, et on donne $B = 1{,}05$ T, $k = 1250$ N.m^{-1} $\ell = 3{,}81\ m$ et $\lambda = 1{,}0$ kg.s^{-1}

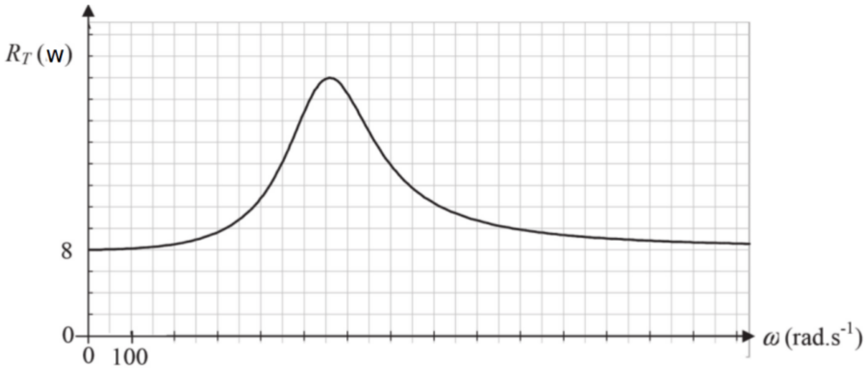


FIGURE 5 – Courbe représentant R_T en fonction de ω

7) En utilisant la courbe $R_T = f(\omega)$ de la figure 5, déterminer la valeur numérique de la résistance R et la valeur de la fréquence de résonance f_0. Vérifier la cohérence de la valeur de f_0 avec les données de l'énoncé.

8) Faire un bilan énergétique du système.

■ EXERCICES

Exercice 8. Calcul de l'inductance d'un solénoïde par une méthode énergétique 2 | 2

Un solénoïde infini, comptant n spires circulaires par unité de longueur suivant l'axe, est parcouru par un courant d'intensité I.

Rappeler l'expression du champ magnétique créé ; en déduire la densité volumique d'énergie magnétique.

Évaluer l'énergie magnétique contenue dans une tranche d'épaisseur h suivant l'axe ; le rayon des spires sera noté a.

En déduire l'inductance de cette tranche de solénoïde.

Exercice 9. Inductance propre du câble coaxial

On reprend l'exercice du chapitre EM3 dans lequel nous avons établi le champ magnétique créé en tout point d'un câble coaxial, en considérant à présent un câble dont le blindage est de rayon b et d'épaisseur négligeable. On obtient alors :

$$\begin{cases} \vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\vec{e}_\theta \\ \vec{B}(a \leq r \leq b) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta \\ \vec{B}(r \geq b) = \vec{0} \end{cases}$$

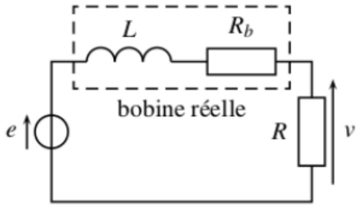
1 - Déterminer l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ stockée dans un tronçon de câble de longueur h.

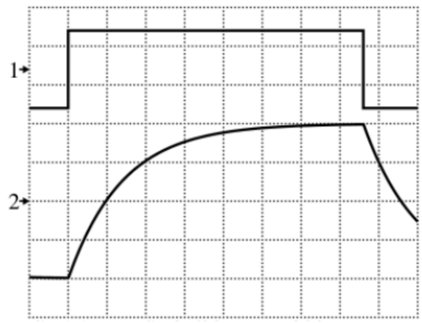
2 - En déduire l'inductance L par unité de longueur du câble.

Rép. : $\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ *et* $L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

Exercice 10. Mesure expérimentale de l'inductance propre d'un circuit   2 | 2

On réalise le montage suivant, avec $R = 1{,}0\ k\Omega$, où le générateur de f.é.m. e délivre une tension créneaux de valeur moyenne nulle. Les tensions e et v sont observées à l'oscilloscope.





CH1 1V   CH2 500mV   200 µs

a. Proposer un montage permettant de mesurer R_b. On dispose de tout l'appareillage classique d'électricité : voltmètre, ampèremètre, oscilloscope, générateur de tension constante ou alternative… On trouve $R_b = 1{,}2\ \Omega$.

b. Déduire des graphes la valeur de l'inductance (ou auto-inductance) L.

Exercice 11. Transformateur torique *(E.Thibierge)*   IMPORTANT | 2 | 2

On s'intéresse dans cet exercice au transformateur représenté ci-dessous, dans lequel les spires du primaire et du secondaire sont bobinées en alternance autour d'un tore de section carrée. Le primaire compte $N_1 \gg 1$ spires, parcourues en série par le courant i_1, et le secondaire $N_2 \neq N_1$spires parcourues par le courant i_2.

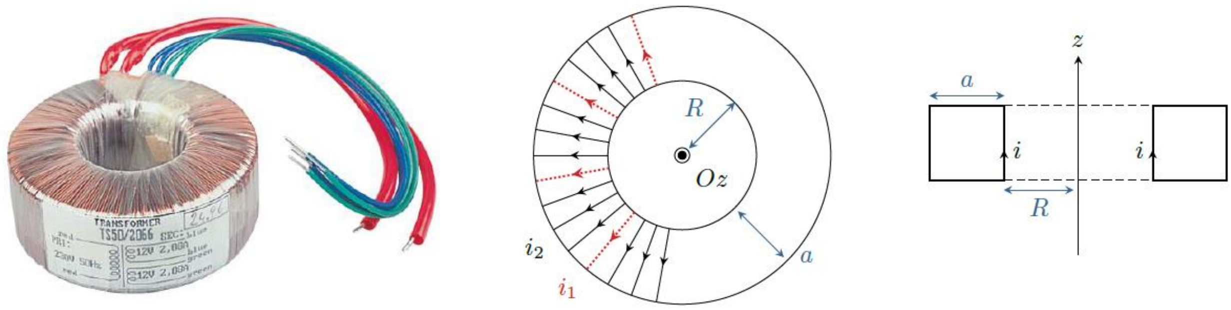


Fig.1 – Transformateur torique à section carrée. Les spires du primaire sont représentées en pointillés et celles du secondaire en traits pleins. Avec ce schéma, on aurait $N_2 = 3N_1$.

1. Calculer le champ $\overrightarrow{B_1}$ créé en tout point de l'espace par le primaire pris seul, puis son inductance propre L_1.
2. En déduire sans calcul l'inductance propre L_2 du secondaire.
3. Calculer l'inductance mutuelle M. Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de L_1 et L_2 uniquement.
4. On impose au primaire une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$, alors que le secondaire est ouvert. Quelle est la tension $u_2(t)$ mesurée aux bornes du secondaire ? Que se passerait-il si u_1 était constante ?
5. Le transformateur annonce une conversion 230 V → 12 V. En déduire la valeur numérique du rapport N_1/N_2 .

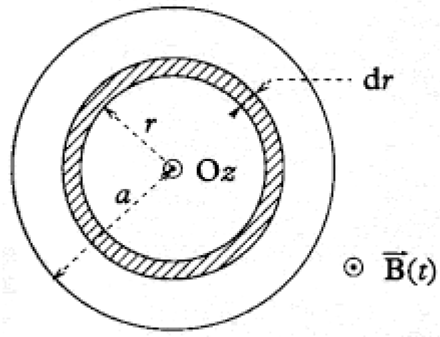
Exercice 12. Plaque à induction   2 | 3

On cherche ici à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction. On assimile le fond de la casserole à un cylindre de rayon a, d'épaisseur h et d'axe Oz.

La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique :
$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\, \vec{u}_z$.
Pour étudier les courants créés dans le fond de la casserole, on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe Oz, d'épaisseur h et de largeur dr. On admettra que la conductance électrique dG (inverse de la résistance) d'une de ces spires, de rayon r, s'écrit :

$$dG = \frac{h}{2\pi r}\gamma\, dr$$

où γ est la conductivité du métal utilisé.



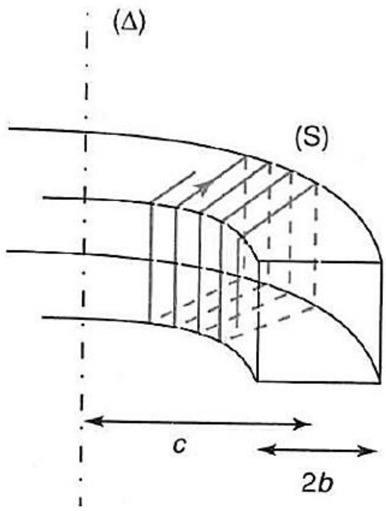
1. Exprimer la f.é.m. induite dans une spire de rayon r.
2. En déduire le courant élémentaire di induit dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance dG.
3. En déduire la puissance moyenne dP dissipée par effet Joule dans une spire.
4. Déterminer alors la puissance totale P, dissipée dans le fond de la casserole en fonction de B_0, ω, h, γ et a.
5. Application numérique : Calculer P avec $\gamma = 10^7\ S.m^{-1}$, $h = 10\ \mu m$ (en raison de l'effet de peau, les courants sont concentrés sur une épaisseur très faible à haute fréquence et ne circulent pas dans toute l'épaisseur du fond de la casserole), $a = 10\ cm$, $B_0 = 5\ mT$, $f = 15\ kHz$.
6. Comment peut-on procéder, en pratique, pour faire varier la puissance reçue par la casserole ?

Exercice 13. Pince ampèremétrique

IMPORTANT | 2 | 3

On considère le système constitué par un cylindre conducteur (C) de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ orienté vers le haut, et un solénoïde torique (S), de section carrée, engendré par la rotation d'un carré de côté $2b$ tournant autour de l'axe Δ du cylindre, à la distance moyenne c. Il comporte une seule couche de N spires jointives supposées planes.

On rappelle le champ magnétique créé par le cylindre infini $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, \vec{e}_\theta$.



a. Les extrémités de l'enroulement sont réunies pour former un circuit fermé. Calculer le flux Φ_{CS} du champ magnétique créé par le cylindre à travers l'ensemble du solénoïde.

b. En déduire le coefficient d'induction mutuelle M entre (C) et (S).
Application numérique : $N = 1000$, $c = 6\ cm$, $b = 1\ cm$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

c. On relie les extrémités de l'enroulement à un voltmètre. Calculer l'amplitude de la f.é.m. d'induction dans le solénoïde. Pourquoi peut-on négliger les phénomènes d'auto-induction ?

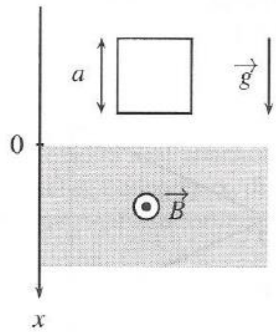
d. Ce dispositif est appelé « ampèremètre à pince ». Expliquer le fonctionnement et l'intérêt du montage.

e. Si le voltmètre est sensible au millivolt (efficace), calculer l'amplitude minimale de l'intensité dans (C) que l'on peut déceler, si la fréquence du courant est de $50\ Hz$?

f. Peut-on utiliser la pince ampèremétrique pour mesurer un courant continu ?

Exercice 14. Freinage d'un cadre

IMPORTANT | 2 | 2



Un cadre carré, conducteur, vertical, de côté a, de masse m, de résistance totale R et d'inductance négligeable est lâché sans vitesse initiale. On repère sa position verticale par x = position du côté DE (le plus bas) ; à $t = 0$, on considère $x = 0$.

L'espace est divisé en deux régions : Δ

- pour $x < 0$, il n'y a pas de champ magnétique ;
- pour $x > 0$, il y a un champ magnétique uniforme, stationnaire et orthogonal au plan du schéma.

1) Etablir et résoudre l'équation différentielle régissant la vitesse $v(t)$ du cadre dans les 2 cas suivants :

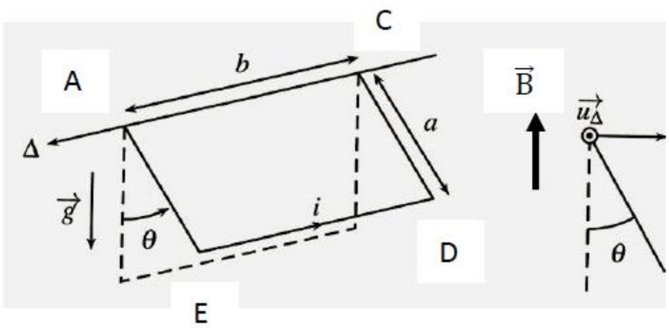
   a) Le bas du cadre est dans la zone où règne le champ magnétique, mais pas le haut.

   b) Le cadre est entièrement immergé dans le champ magnétique.

2) Quand et à quelle condition y a-t-il freinage ?

Exercice 15. Cadre oscillant IMPORTANT | 2 | 2

Un cadre rectangulaire ACDE (AC $= b$ et CD $= a$) de masse m peut tourner autour de l'un de ses côtés, AC, horizontal : axe $Oz = \Delta$. Son moment d'inertie par rapport à Δ est J.



Sa résistance électrique est R et son auto-inductance est négligée.

Son orientation est repérée par l'angle θ.

Il subit l'action d'un champ magnétique uniforme, vertical dirigé vers le haut.

1) Etablir l'expression de la fem induite e.

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ, dans le cas où l'angle reste « petit ».

3) Discuter des solutions possibles et donner l'allure des courbes correspondantes en considérant que à l'instant initial, le cadre est écarté d'un angle θ_0 et est lâché sans vitesse initiale.

Exercice 16. Moteur synchrone 2 | 2

Considérons un modèle simple de moteur synchrone. Le rotor, de moment magnétique $\vec{m}$, tourne avec la même vitesse angulaire ω constante que le champ magnétique $\vec{B}$ qui l'entraîne. On néglige tout frottement interne au moteur. On s'intéresse à l'angle interne du moteur θ orienté de $\vec{m}$ vers $\vec{B}$ et au couple $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ exercé par le champ sur le moment magnétique. On prendra $B = 0{,}2$ T, $m = 8$ A·m^2 et une fréquence de rotation de 50 tours par seconde.

1) Proposer un dispositif simple permettant de réaliser le champ magnétique tournant.

2) Que vaut θ si le moteur fonctionne à vide ?

3) Le moteur doit entraîner une charge mécanique qui exerce un couple résistant $\mathcal{M}_r = 0{,}65$ N·m. Calculer l'angle interne et la puissance mécanique fournie par le moteur. D'où provient cette puissance ?

4) La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

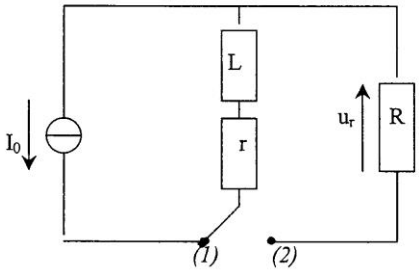
■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 17. Induction de Neumann 2 | 1

Estimer le courant circulant dans une spire de diamètre $10\ cm$ et de résistance $0{,}1\ \Omega$ si le champ magnétique, uniforme et perpendiculaire au plan de la spire, passe de 0 à $0{,}1\ T$ en $15\ ms$.

Exercice 18. Etude expérimentale d'un circuit de type RL 2 | 2

On étudie le circuit représenté sur le schéma ci-contre. A $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position (2).



1) Que vaut la tension $u_r(0^+)$ à l'instant initial ?
2) Trouver l'équation différentielle dont u_r est solution pour $t > 0$ et exprimer la constante de temps τ de ce circuit.
3) On obtient expérimentalement le tableau de valeurs suivant :

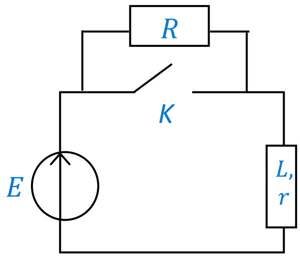
t (ms)	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20
u_r (V)	40	38	36,2	31,1	24,3	14,7	3,3	0,3	0

Quelle courbe doit-on tracer pour trouver la valeur de τ ? Déterminer sa valeur numérique.

4) On donne $R = 40\ \Omega$. Peut-on alors calculer L ? Quel montage peut-on réaliser pour déterminer r ?

Rép. : 3) $\tau = 2$ ms.

Exercice 19. Etincelle de rupture 3 | 2



1) Une bobine d'inductance L et de résistance r est alimentée par un générateur idéal de tension continue, de force électromotrice E. Un interrupteur K fermé est placé en série, et une résistance R est disposée en parallèle à ses bornes.

   Que vaut l'intensité dans la bobine, sachant que le courant est établi depuis longtemps ?

2) À $t = 0$, on ouvre K. Déterminer $i(t)$. Qu'obtient-on si R est très grande ?

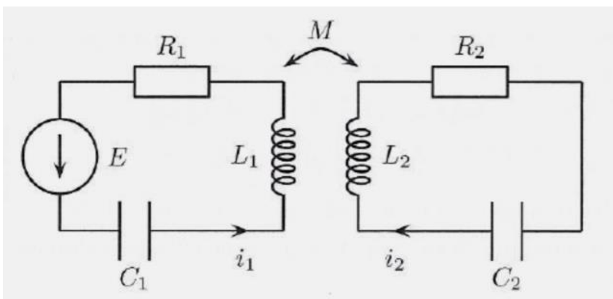
3) Déterminer $u(t)$, tension aux bornes de K. Que se passe-t-il lorsque R est très grande ? Pourquoi parle-t-on d' « étincelle de rupture » ? interpréter l'origine de ce phénomène.

Exercice 20. Inductance propre d'une bobine torique de section rectangulaire IMPORTANT | 2 | 2

On considère une bobine torique de section rectangulaire de hauteur h et de rayons a et b ($a < b$) comportant N spires jointives. Calculer l'inductance propre de cette bobine.

Exercice 21. Circuits électriques couplés : modèle de carte RFID IMPORTANT | 2 | 3

On étudie deux circuits électriques d'inductances propres respectives L_1 et L_2, couplés par l'inductance mutuelle M (cf. schéma ci-dessous).



Le 1er circuit contient un générateur de fém $e(t)$ dépendant du temps, tandis que le 2nd est purement passif. Un tel circuit peut notamment modéliser une carte RFID au voisinage d'une antenne créant un champ magnétique variable temporellement.

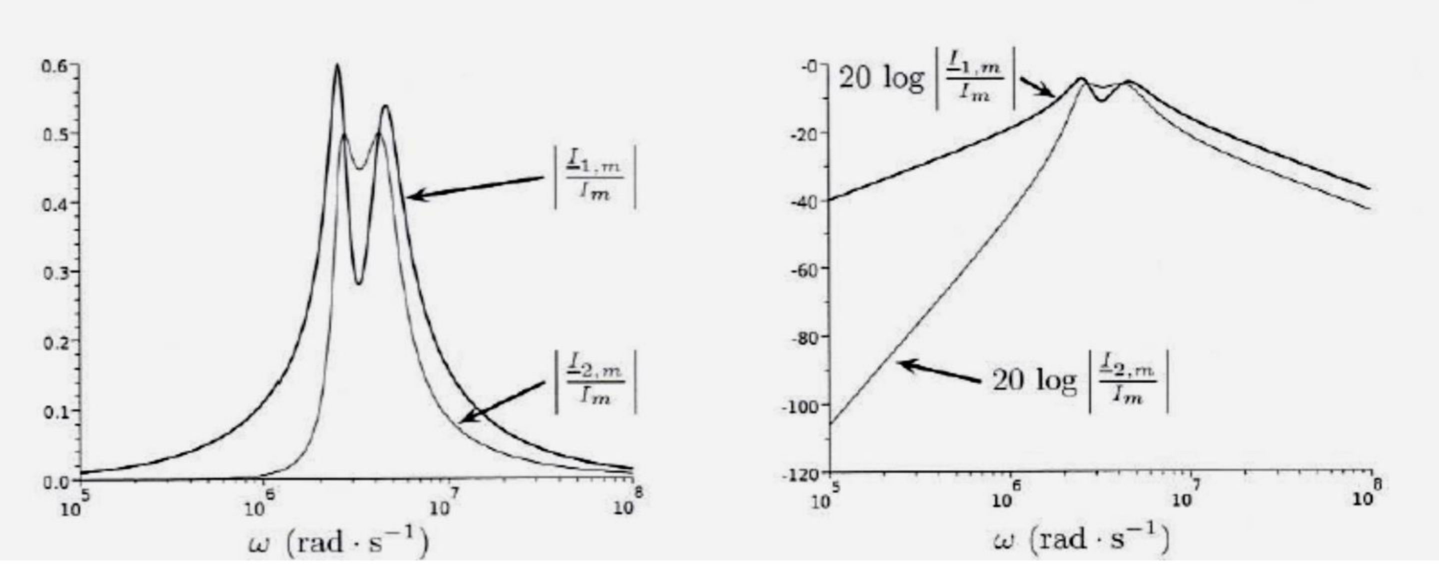
Les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ ont été orientées arbitrairement sur le schéma proposé.

La fém délivrée par le générateur est de la forme $e(t) = E\cos(\omega t)$, et on étudie le système en régime sinusoïdal forcé.

1) Etablir le système d'équations vérifié par les amplitudes complexes des intensités $\underline{I}_{1,m}$ et $\underline{I}_{2,m}$.
2) Pour simplifier les calculs, on suppose que $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L_2 = L$, et $C_1 = C_2 = C$. Exprimer les amplitudes complexes des intensités $\underline{I}_{1,m}$ et $\underline{I}_{2,m}$ en fonction de ω, M, L, R, C et E_m.

3) Le coefficient M est supposé positif. Pour mettre les expressions précédentes sous forme adimensionnelle, on introduit $\omega_a = \frac{1}{RC}$ $\omega_b = \frac{R}{L}$ $\omega_c = \frac{R}{M}$ et $I_m = \frac{E_m}{R}$. Etablir les expressions de $\frac{I_{1,m}}{I_m}$ et de $\frac{I_{2,m}}{I_m}$ en fonction de ω et des trois pulsations caractéristiques introduites.

4) On prend $R = 10\ \Omega$, $C = 1{,}0.10^{-8}$ F, $L = 1{,}0.10^{-5}$ H et $M = \frac{L}{2}$, et on obtient les graphes ci-dessous.



Commenter ces graphes.

Exercice 22. Dimensionnement d'un transformateur 2 | 1

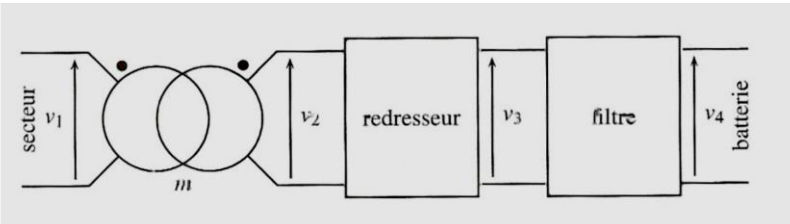
On cherche à dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie, logée dans un boitier placé sur le cordon d'alimentation du portable, se compose successivement :

• de l'alimentation EDF du secteur qui délivre la tension $v_1(t) = V_0.\sin(2\pi f_0 t)$, où $f_0 = 50$ Hz et $V_0 = 240$ V ;

• d'un transformateur, dont la sortie est $v_2(t) = V_{02}\sin(2\pi f_0 t)$, et dont le rapport de transformation est noté m ;

• d'un redresseur, montage qui délivre la valeur absolue v_3 de la tension d'entrée v_2 ;

• d'un filtre moyenneur, dont la sortie v_4 est la valeur moyenne de la tension d'entrée v_3.



La batterie du portable est branchée à la sortie de ce filtre et requiert une tension de charge constante $v_4 = 12\ V$.

1. Que vaut $V_{0,2}$ en fonction de V_0 ?

2. Tracer le graphe de la tension $v_3\ (t)$.

3. Quelle est la nature du filtre utilisé entre v_3 et v_4 (passe-bas, haut, bande...) ? Proposer une valeur pour sa fréquence de coupure.

4. Établir l'expression de la tension v_4 en fonction de V_0.

5. En déduire la valeur de m.

Exercice 23. Rails de Laplace et circuit capacitif 2 | 3

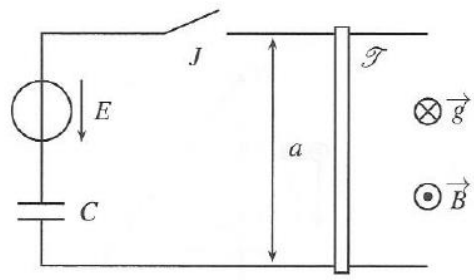
Une tige conductrice $\mathcal{T}$ glisse sur deux rails horizontaux distants de a. Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur J, un condensateur de capacité C et un générateur de fém constante E. $\mathcal{T}$ a une résistance électrique R et une masse m. L'autoinductance du circuit sera négligée (voir schéma ci-dessous).

L'ensemble est plongé dans des champs magnétique et de pesanteur uniformes et stationnaires.

On ferme à l'instant initial l'interrupteur J alors que la tige est immobile.

1) Etablir une équation électrique et une équation mécanique décrivant le circuit.

2) Etablir et intégrer une équation différentielle sur l'intensité du courant dans le circuit pour montrer qu'il s'écrit sous la forme : $i(t) = i_O \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Identifier les valeurs de i_O et τ.



3) En déduire que la vitesse $v(t)$ de la tige se met sous la forme : $v(t) = v_O\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

4) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur entre les instants initial ($t = 0$) et final ($t \to +\infty$), en fonction de E, τ et R.

5) Calculer $u_C(t)$.

6) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_C$ emmagasinée par le condensateur entre les instants initial ($t = 0$) et final ($t \to +\infty$).

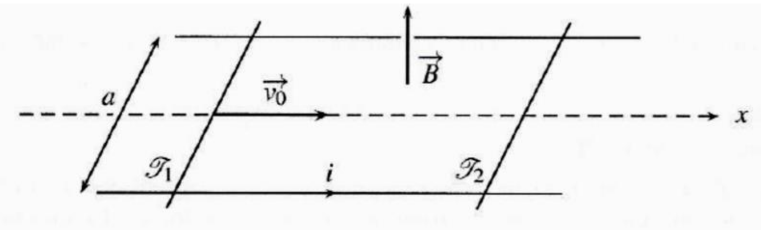
7) Calculer l'énergie $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule entre les instants initial ($t = 0$) et final ($t \to +\infty$).

8) Calculer le travail W des forces de Laplace entre les instants initial ($t = 0$) et final ($t \to +\infty$).

9) Quelle relation existe-t-il entre ces différentes énergies et W ? L'interpréter.

Exercice 24. Interaction entre deux tiges 2 | 3

Deux tiges $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ identiques, de masse m, chacune de résistance électrique $\frac{R}{2}$, sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles horizontaux espacés d'une distance $\boldsymbol{a}$.



La résistance électrique des rails est négligeable devant $\boldsymbol{R}$; l'inductance propre du circuit est négligée. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e_z}$ et un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$.

Initialement, $\mathcal{T}_2$ est immobile et $\mathcal{T}_1$ se déplace vers $\mathcal{T}_2$ avec la vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. Les deux tiges restent parallèles à $\vec{u_y}$ lors de leur mouvement.

1) Expliquer sans calcul pourquoi la tige $\mathcal{T}_1$ ralentit alors que la tige $\mathcal{T}_2$ se met en mouvement.

2) Etablir une équation électrique reliant $i(t)$, intensité du courant dans le système, à $v_1(t)$ et $v_2(t)$ les vitesses des tiges (selon $\vec{u_x}$).

3) Etablir deux équations mécaniques.

4) Etablir un système d'équations différentielles couplées sur $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

5) Découpler et intégrer le système différentiel en utilisant les fonctions somme $\sigma = v_1(t) + v_2(t)$ et différence $\delta = v_2(t) - v_1(t)$. Représenter graphiquement sur un même schéma $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

6) Calculer l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans les deux tiges.

7) Calculer la charge totale Q qui circule entre $t = 0$ et $t \to +\infty$.

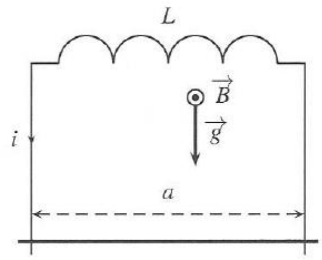
8) Calculer, en utilisant $i(t)$, l'énergie dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t \to +\infty$.

9) Calculer la variation d'énergie mécanique du système entre $t = 0$ et $t \to +\infty$. Commenter.

Exercice 25. Tige qui chute 2 | 3

Une tige rectiligne de longueur a, de masse m et de résistance R effectue un mouvement de translation verticale tout en fermant le circuit électrique qui comporte la bobine d'inductance L.

On confond la résistance totale du circuit avec R et son inductance totale avec L.

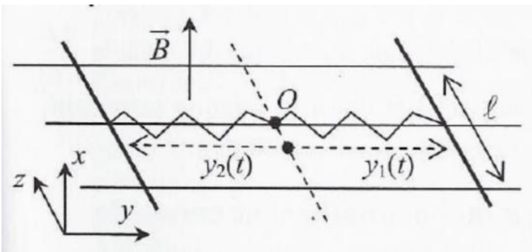


L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$ et un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_y}$, uniformes et constants.

Le mouvement de la tige est sans frottements. Elle est abandonnée à t = 0 sans vitesse.

1) Etablir l'équation différentielle relative uniquement à l'intensité du courant traversant la tige.
2) Dans l'hypothèse d'une résistance R nulle, calculer explicitement l'intensité du courant puis la vitesse en fonction du temps.
3) Dans le cas d'une résistance « assez grande » (on précisera devant quelle grandeur R doit être grande), décrire qualitativement l'évolution du courant en traçant l'allure de l'intensité du courant $i(t)$. Quelles sont les valeurs de $i(t)$ et $v(t)$ en régime permanent ?

Exercice 26. Rails de Laplace et ressort 2 | 3



Deux rails de Laplace identiques, de masse $\boldsymbol{m}$, chacun de résistance électrique $\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2}}$, sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles et horizontaux. La résistance électrique des fils est négligeable devant $\boldsymbol{R}$; l'inductance propre du circuit est négligée. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{e_z}}$ et un champ de pesanteur $\vec{\boldsymbol{g}} = -\boldsymbol{g}\vec{\boldsymbol{e_z}}$.

Les deux rails sont liés (séparément) au point O fixe par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On repère leur position $y_1(t)$ et $y_2(t)$ par rapport au point de fixation commun O.

A l'instant $t = 0$, le rail (1) est écarté de sa position d'équilibre d'une distance a vers la droite, et lâché sans vitesse initiale. Au même instant, le rail (2) est immobile à sa position d'équilibre.

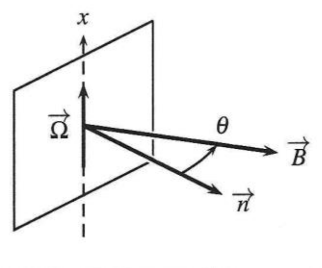
Analyser qualitativement le système et son évolution.

Ecrire les équations électromécaniques couplées liant les positions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ ainsi que l'intensité $i(t)$.

Eliminer l'intensité $i(t)$ pour obtenir un système de deux équations différentielles couplées vérifiées par $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

1) La symétrie du système différentiel précédent permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires $S(t) = y_1(t) + y_2(t)$ et $D(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Ecrire les équations différentielles vérifiées par $S(t)$ et $D(t)$.
2) Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $S(t)$ et discuter rapidement les différents cas pour celle vérifiée par $D(t)$. Dans tous les cas, quelle est la limite de $D(t)$ au bout d'un temps suffisamment long ? Décrire le mouvement des deux rails quand ce régime permanent est atteint. La loi de Lenz est-elle vérifiée ?
3) Déterminer l'énergie mécanique du système dans son état initial puis au bout d'un temps suffisamment long pour ne prendre en compte que le régime permanent. Qu'est devenue l'énergie mécanique manquante ?

Exercice 27. Moteur asynchrone 3 | 3



Une spire plate de résistance R, d'auto-inductance L et de surface S, tourne à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe (Oz). La normale $\vec{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz).

La spire est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz), de norme constante tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de (Ox).

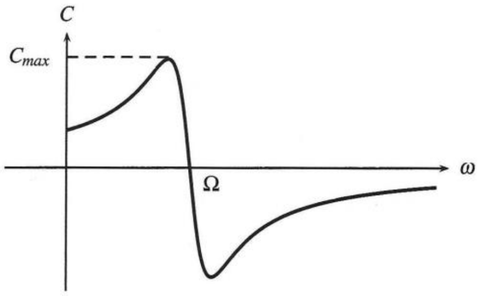
Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraine la bobine.

1. Comment réaliser un champ tournant ?

2. Expliquer sans équation pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et Ω peuvent-elles être identiques ?

3. Calculer l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans la bobine en fonction de l'angle instantané θ entre le champ magnétique $\vec{B}$ et la normale $\vec{n}$ à la spire. L'intégrer en régime harmonique.

4. En considérant le moment magnétique $\vec{m}$ de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple $\mathcal{C}$ moyen au cours du temps s'exerçant sur la bobine.



5. L'allure du couple $\mathcal{C}(\omega)$ est donnée sur la figure. Le moteur peut-il démarrer seul ? Etudier graphiquement la stabilité des points de fonctionnement si le moteur entraine une charge de couple résistant constant connu.