

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Un courant variable peut être source de champ électrique (courant variable → champ magnétique variable → champ électrique), et dans ce cas, ce sont les symétries et invariances de la distribution de courant qui donneront direction et variable utile du champ électrique.
2. De façon analogue, un champ magnétique peut être créé par une distribution de charge variable dans le temps.
3. Il faut savoir que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface S représente la puissance électromagnétique, et connaître sa dimension ; attention ! Le flux à travers une surface fermée correspond à la puissance sortant du volume ainsi défini !

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Champ électrique induit par un solénoïde infini

IMPORTANT | 💡 2 | ✖ 2

- a. Rappeler la valeur du champ magnétique créé par un solénoïde infini d'axe $z'z$, de rayon a , comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ variable (dans le cadre de l'ARQS).
- b. On peut montrer par des considérations de symétrie et d'invariance que le champ électrique créé est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$. Déterminer le champ électrique à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur du solénoïde.

Donnée : Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta} \right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right)_{r,\theta} \right] \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} \right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r} \right)_{\theta,z} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)_{z,r} \right] \vec{e}_z$$

Exercice 2. Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

IMPORTANT | 💡 1 | ✖ 2

Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le vide. Etablir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et définir la célérité c de ces ondes.

Donnée : Formule du double rotationnel : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{a})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a}$

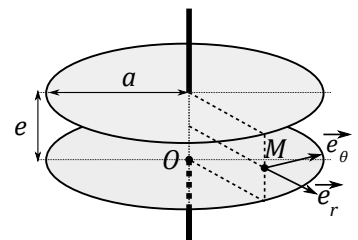
Exercice 3. Aspect énergétique de la charge d'un condensateur

IMPORTANT | 💡 2 | ✖ 2 ou 3

Soit un condensateur à faces parallèles, il est constitué d'armatures circulaires planes de rayon a , distantes de e .

Un circuit électrique permet de charger lentement le condensateur. On suppose que le champ électrique est uniforme entre les armatures et nul en dehors. On travaillera en coordonnées cylindriques avec la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

- a. Déterminer l'énergie électrique W entre les plateaux lorsque le champ est égal à $\vec{E}(M, t) = E_z(t) \vec{e}_z$.
- b. Lorsque le condensateur se charge, le champ varie avec le temps. Déterminer l'expression de la variation de l'énergie : $\frac{dW}{dt}$.
- c. La variation du champ électrique est couplée avec celle d'un champ magnétique dont les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du condensateur : $\vec{B}(M, t) = B_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$.



- ⇒ À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique en M au bord du condensateur.
- ⇒ En déduire l'expression du vecteur de Poynting sur la surface latérale du condensateur et la puissance électromagnétique à travers la surface latérale du condensateur.

d. Comparer ce dernier résultat à $\frac{dW}{dt}$. Conclure.

Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta} \right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right)_{r,\theta} \right] \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} \right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r} \right)_{\theta,z} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)_{z,r} \right] \vec{e}_z$$

EXERCICES

Equations de Maxwell

Exercice 4. Chauffage par induction



On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ . Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

- 1 - Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.
- 2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.
- 3 - On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$. Établir son expression en fonction notamment de r et I_0 .
- 4 - En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

Donnée : expression du rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta} \right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right)_{r,\theta} \right] \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} \right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r} \right)_{\theta,z} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)_{z,r} \right] \vec{e}_z$$

Exercice 5. Décharge d'un cylindre dans un autre (oral banque PT) 2 | 2

Considérons deux cylindres de même axe (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre de rayon R_1 porte initialement une charge Q_0 en surface. Pour $t < 0$, l'espace entre les cylindres est assimilé au vide. À $t = 0$ on introduit entre les deux cylindres un fluide de conductivité γ , qui entraîne la décharge du cylindre de rayon R_1 . On note $Q(t)$ la charge portée par ce cylindre.

- 1 - Déterminer la direction du champ électrique $\vec{E}$ et déterminer la variable dont dépend sa norme.
- 2 - Montrer que le champ magnétique est nul.
- 3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction de $Q(t)$.
- 4 - En utilisant une équation de Maxwell, déterminer une équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. En déduire un temps caractéristique de décharge.

5 - Que ce serait-il passé si c'était le cylindre de rayon R_2 qui avait été initialement chargé ?

■ Energie électromagnétique, puissance et vecteur de Poynting

Exercice 6. Énergie reçue par le toit d'une maison 2 | 1

Le soleil rayonne au niveau de la Terre un champ électrique d'amplitude environ $1,0 \cdot 10^3$ V/m ; nous montrerons qu'alors, la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit : $\langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$

- 1) Déterminer la puissance moyenne reçue par unité de surface sur la Terre.
- 2) Trouver alors un ordre de grandeur de la puissance que reçoit le toit d'une maison.
- 3) Quelle est l'énergie récupérable au cours d'une journée en supposant un éclairage effectif pendant le quart d'une journée ? Le résultat peut être exprimé dans une unité hors SI.
- 4) Comparer ce résultat à la consommation électrique journalière d'une famille.

On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Ordres de grandeur de la puissance de quelques appareils domestiques

10 kW	cuisinière	2 kW	radiateur électrique, chauffe-eau
3 kW	lave-linge, sèche-linge	1 kW	micro-ondes, cafetière, grille-pain, fer à repasser, aspirateur
2,5 kW	four	200 W	ordinateur, TV, réfrigérateur, congélateur

Exercice 7. Bilan de puissance d'un conducteur (oral banque PT) 2 | 2 |

Bilan d'énergie électromagnétique.

Considérons un conducteur cylindrique de rayon R , de longueur infinie, d'axe Oz , soumis à un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\vec{u}_z$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur ℓ .

1 - Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur électrique d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.

2 - Calculer l'intensité traversant le cylindre. On rappelle que le champ magnétique créé par le cylindre est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{e}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 \pi R r^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{e}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

3 - Déterminer la puissance dissipée par effet Joule, la puissance volumique dissipée par effet Joule étant de la forme :

$$p_{\text{Joule},v} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

4 - Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.

5 - En déduire le bilan de puissance et le commenter.

Exercice 8. Champ du vide ? 2 | 2

Thalia, en train de recopier les notes que lui a fournies son amie Justine, reste perplexe devant l'expression du champ électrique suivant : $\vec{E}(x, y, t) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_x$ avec $E_0 > 0$. Justine lui affirme en effet que ce champ peut exister dans un milieu vide de charges.

- 1) Justifier pourquoi Thalia a raison de remettre en cause les notes prises par son amie.
- 2) Thalia propose de rajouter à ce champ une composante $E_y(x, y, t)$ dans la direction $\vec{u}_y$. En supposant que la valeur moyenne temporelle de ce champ électrique reste nulle, déterminer l'expression de $E_y(x, y, t)$.
- 3) En déduire l'expression globale du champ électrique puis celle du champ magnétique associé, en supposant de même que la valeur moyenne temporelle du champ magnétique est nulle.

- 4) Cette région vide de charges peut-elle être également vide de courants ? on déterminera si besoin l'expression du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(x, y, z, t)$.
- 5) Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique ainsi que l'expression du vecteur de Poynting.

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 9. Puissance rayonnée par le Soleil 1 ou 2 | 1

Le **flux solaire reçu sur Terre** est $1,4 \text{ kW.m}^{-2}$. Si on tient compte de l'absorption par l'atmosphère, on mesure en fait $0,9 \text{ kW.m}^{-2}$. Retrouver la puissance rayonnée par le Soleil, sachant qu'il est à 8 minutes – lumière de la Terre.

Exercice 10. Décharge d'une boule chargée dans l'air (E. Thibierge) 3 | 2

Une boule porte une charge uniformément répartie sur sa surface. Cette boule se trouve dans l'air, gaz légèrement conducteur, au travers duquel la boule se décharge progressivement.

On rappelle l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

- 1 - Analyser les symétries du problème. Conclure sur les champs.
- 2 - Interpréter physiquement chaque terme de l'équation de Poynting. En déduire le champ électrique à l'extérieur de la boule à tout instant.
- 3 - Déterminer la charge portée par la boule à tout instant.
- 4 - Déterminer l'énergie dissipée dans le milieu au cours du processus. Interpréter le résultat.