

NOM :

INTERROGATION DE COURS N°4
MPI – 2024-2025

NOTE :

1. ❤ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne. Introduire la diffusivité thermique et exprimer le temps caractéristique de diffusion en fonction de la longueur caractéristique du système.

- Schéma du système : tranche de surface S comprise entre x et $x + dx$
- Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique : $d(\delta H) = d^2 H = \delta^2 Q_{re\acute{c}ue}$
- Dans le cas d'un système monophasé (phase condensée incompressible et indilatable) :

$$d(\delta H) = \delta m c dT = \rho S dx c dT ; x \text{ fixé} : dT = T(x, t + dt) - T(x, t) = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt ;$$

$$\delta^2 Q_{re\acute{c}ue} = \delta^2 Q_{entr\acute{e}es} - \delta^2 Q_{sorties} = (\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)) dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx dt$$

$$\text{Avec } \Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} = j_{Qx} S, \quad \delta^2 Q_{S=cte} \equiv -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S dx dt$$

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{J}_Q(x) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T), d'o\grave{u} j_{Qx} \underset{1D \text{ cartésiennes}}{\equiv} -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t ;$$

$$\text{finalement : équation de la chaleur } \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0 \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\rho c} \text{ diffusivité}$$

$$D = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x / \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t \text{ or } \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x \sim \frac{T}{\tau} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t \sim T/L^2 \quad \text{soit } D = L^2/\tau$$

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

2. Rappeler les 4 équations de Maxwell en régime variable en présence de charges et de courants.

		Equation locale
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_D}$
Maxwell-flux	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$

3. Etablir l'équation de propagation du champ électrique.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

$$\text{Avec (MG) dans le vide : } \text{div}(\vec{E}) = 0 \text{ soit } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{Avec (MF) : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ soit } \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E} \text{ ou}$$

Indépendance des variables d'espace et de temps : on peut inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$