TD Chapitre EM.6 : Dipoles electrostatiques et magnetostatiques

Applications de cours

Exercice 1. Potentiel créé par un dipôle électrostatique IMPORTANT | 1 | 2 ou 3

1 - Considérons un dipôle électrostatique formé des charges $\pm q$ distantes de a, situées en P et N. Le point O correspondant au centre du segment PN est choisi comme origine du repère. Un point M quelconque est alors repéré en coordonnées sphériques. On se place dans le cadre de l'approximation dipolaire : $r \gg a$.

2 - Faire un schéma du problème et étudier l'invariance de la distribution de charges. Que peut-on en déduire pour le potentiel $V(M)$?

3 - Rappeler l'expression du potentiel créé en un point M quelconque par une charge ponctuelle q placée en P.

4 - Etablir l'expression du potentiel total créé par le dipôle. Que peut-on dire du plan médiateur ?

5 - Simplifier l'expression du potentiel à grande distance r du doublet, telle que $r \gg a$ (cadre de l'approximation dipolaire) puis établir l'équation des équipotentielles.

6 - Etudier les symétries et invariances du champ électrique créé par le dipôle électrostatique

7 - Déterminer l'expression de ce champ électrique dans l'approximation dipolaire.

Données : gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Formule de dérivation de produit $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}g + g\overrightarrow{\text{grad}}f$

Rappel : $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + o(\varepsilon)$

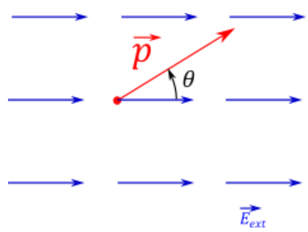
Exercice 2. Equipotentielles et lignes de champ du dipôle électrostatique 1 | 2

1 - Etablir l'expression des courbes équipotentielles

2- Montrer que l'équation vérifiée par les lignes de champ est de la forme $r(\theta) = K\sin^2(\theta)$.

3- Donner l'allure des cartes de champ

Exercice 3. Energie potentielle d'un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique extérieur 2 | 2



1 - Etablir l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_{p,ext}$ d'un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique extérieur uniforme.

2- Tracer la courbe d'énergie potentielle en fonction de l'angle entre le dipôle et le champ électrique et repérer les positions d'équilibre du dipôle en discutant de leur stabilité. Commenter les résultats obtenus

---

Exercice 4. Champs et moments dipolaires créés par une bobine longue ou par des aimants permanents 1 | 1

1. On considère une bobine de longueur $L = 60$ cm et de rayon $R = 4$ cm, parcourue par un courant d'intensité $I = 0{,}6$ A.

a. La formule du champ magnétique créé dans un solénoïde est-elle valable ? Déterminer le nombre de spires nécessaire pour obtenir un champ magnétique de $0{,}1.10^{-2}$ T.

b. La bobine est réalisée en enroulant un fil de 1,5 mm de diamètre autour d'un cylindre en carton. Combien faut-il bobiner de couches pour obtenir le champ précédent ?

c. Déterminer le moment magnétique créé par cette bobine.

2. On trouve sur un site commercial les ordres de grandeur suivants pour des aimantations d'aimants permanents. L' « aimantation » correspond à un moment dipolaire magnétique par unité de volume.

Aimant	aimantation
AlNiCo 200	600 $kA.m^{-1}$
Ferrite 1000	1700 $kA.m^{-1}$
NdFeB	2000 à 4000 $kA.m^{-1}$
SmCo5	2000 à 3000 $kA.m^{-1}$
SmCo17	3500 à 5000 $kA.m^{-1}$

a. Rappeler la dimension d'un moment dipolaire magnétique.

b. Vérifier si les unités sont cohérentes avec la définition donnée de la grandeur aimantation.

c. Considérons un aimant en forme de disque d'épaisseur $e = 1{,}0$ mm et de rayon $R = 5{,}0$ mm. Calculer l'ordre de grandeur du moment dipolaire d'un tel aimant en NdFeB.

d. Combien de spires de rayon R parcourues par une intensité de 0,1 A faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment dipolaire ?

Exercice 5. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène IMPORTANT | 2 | 2

On étudie un atome d'hydrogène qui, dans le cadre du modèle de Bohr, est constitué d'un noyau (charge $+e$, masse m_p) supposé fixe en un point O et d'un électron (charge $-e$, masse m_e). On considère que l'électron n'est soumis qu'à la force d'attraction électrostatique de la part du noyau.

Données : masse de l'électron : $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg ; charge du proton : $e = 1.6\ 10^{-19}$ C ; constante de Planck : $h = 6.63\ 10^{-34}$ J.s ; célérité de la lumière dans le vide $c = 3{,}00.10^{8}$ $m.s^{-1}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ $F.m^{-1}$.

1 - Montrer que le mouvement est plan.

On travaillera alors avec les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire.

On considère que l'électron a une trajectoire circulaire de rayon r.

2- Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de l'électron. Etablir la relation entre elles (théorème du viriel).

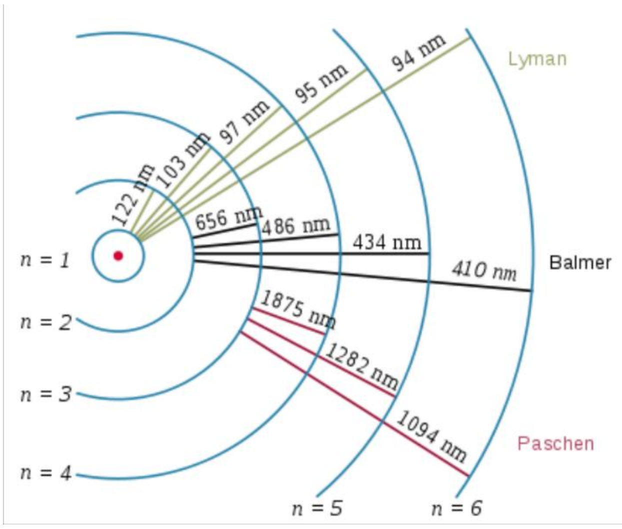
Pour expliquer le spectre de raies de l'atome d'hydrogène observées expérimentalement, N.Bohr a proposé un modèle qui s'appuie sur les hypothèses suivantes : dans un référentiel galiléen lié au noyau O,

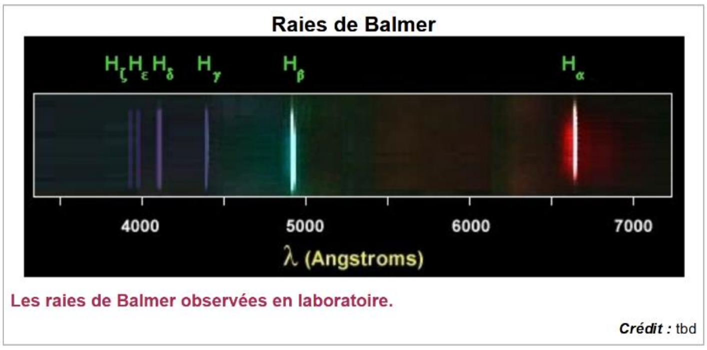
• l'électron décrit une trajectoire circulaire sur laquelle il ne rayonne pas d'énergie

• l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de photon lorsqu'il change de trajectoire circulaire ;

• le module du moment cinétique de l'électron est quantifié et ne peut prendre que des valeurs discrètes vérifiant la relation : $L_{O_n} = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$

Une orbitale électronique correspond à une valeur de l'entier n. Elle est caractérisée par un rayon r_n, une vitesse v_n et une énergie mécanique $E_m(n)$. Ce modèle semi-classique n'est pas complètement satisfaisant mais il prédit le spectre de raies de l'atome d'hydrogène et a permis de banaliser l'idée que la quantification des grandeurs physiques est nécessaire à l'échelle atomique.





Les raies de Balmer observées en laboratoire.

Crédit : tbd

3- Utiliser la quantification du moment cinétique pour exprimer la quantification du rayon de la trajectoire. Calculer sa valeur pour $n = 1$.

4- Exprimer l'énergie mécanique $E_m(n)$ de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme :

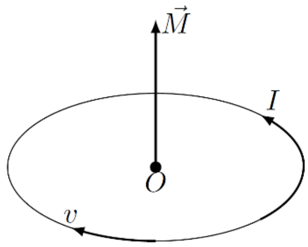
$$E_m(n) = -\frac{A}{n^2}.$$

Donner l'expression et la valeur numérique de la constante A en électron-volts.

5- Sachant que le passage d'un niveau d'énergie $E_m(n_1)$ à un autre $E_m(n_2)$ se traduit par l'émission d'un photon de fréquence ν, en déduire que les longueurs d'onde λ émises vérifient : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$. Donner l'expression de la constante de Rydberg R_H ainsi que sa valeur numérique.

6- Quelles sont les longueurs d'onde dans le visible pour les séries de Lyman ($n_2 = 1$) et de Balmer ($n_2 = 2$)

Puisque l'électron est une particule chargée en mouvement, on peut maintenant interpréter le système comme une "spire" de courant de rayon a, parcouru par un courant équivalent I. Afin de déterminer ce courant équivalent, considérons un temps t quelconque (mais "grand" devant la période de révolution T). Au cours de son mouvement, l'électron N tours pendant cette durée t. La charge q qui traverse un point quelconque de la spire s'écrit : $q = -Ne = It$.



7- Exprimer l'intensité I en fonction des caractéristiques du système, et en déduire le moment magnétique microscopique équivalent à la spire également appelé magnéton de Bohr.

8- Quel est l'ordre de grandeur du moment magnétique d'une mole d'atome d'hydrogène ?

9- Le moment magnétique est directement proportionnel au moment cinétique de l'électron. Le facteur de proportionnalité γ est appelé rapport gyromagnétique. Etablir son expression.

Exercice 6. Champ géomagnétique et moment magnétique terrestre IMPORTANT | 2 | 2

À Rouen (latitude $\lambda \approx 49°$), le champ magnétique terrestre a une composante horizontale $B_h = 2{,}05.10^{-5}$ T, et l'inclinaison de $\vec{B}$ sur le plan horizontal est $I = 64°$ vers le bas. On essaie de rendre compte de ces caractéristiques en supposant que le champ géomagnétique est celui d'un dipôle situé au centre de la Terre, que l'on suppose en première approche parallèle à l'axe des pôles géographiques.

a. Faire une figure et en déduire le sens du dipôle considéré. Montrer que ce modèle très simple permet de prédire une valeur de l'inclinaison I. Comparer au résultat expérimental.

b. Évaluer le moment magnétique du dipôle terrestre (rayon terrestre $R = 6{,}4.10^3$ km).

EXERCICES

Dipôle électrostatique

Exercice 7. Dipôle électrostatique entre les armatures d'un condensateur plan IMPORTANT | 2 | 2

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en $x = 0$ et $x = e$. L'isolant entre les deux armatures est supposé avoir une permittivité ε_0 (air par exemple). Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées. On rappelle que le champ électrostatique $\vec{E}$ à l'intérieur du condensateur est de la forme : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_x}$ et il est nul à l'extérieur.

1 - On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = \frac{e}{2}$. Il peut tourner autour de l'axe (Oz). Déterminer par deux méthodes les positions d'équilibre, ainsi que leur stabilité.

3- Etablir par deux méthodes l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe (Oz).

4- Etudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

Exercice 8. Dipôle électrique à 2 dimensions 2 | 2

Quel est le champ électrique créé par 2 répartitions linéiques de charge λ et $-\lambda$ parallèles et distantes de a ?

Indication : utiliser le potentiel V et le principe de superposition

Dipôle magnétostatique

Exercice 9. Mesure du champ magnétique terrestre 2 | 1

On dispose d'un solénoïde comportant $n = 100$ spires par mètre, parcouru par un courant d'intensité $I = 100$ mA. On le place sur un support horizontal et on oriente son axe dans la direction Est-Ouest et on suppose en première approximation que le champ géomagnétique est celui d'un dipôle situé au centre de la Terre, parallèle à l'axe des pôles géographiques. On introduit à l'intérieur du solénoïde une aiguille aimantée mobile en rotation autour de son axe vertical.

1- En l'absence de courant, comment est orientée l'aiguille aimantée ?

2- Calculer la valeur du champ magnétique créé par le solénoïde.

3- Sachant que en présence de courant, l'aiguille aimantée fait un angle $\theta = 58°$ avec l'axe du solénoïde, déterminer la valeur de la composante horizontale B_{H} du champ magnétique terrestre.

Exercice 10. Champ sur l'axe d'une spire 1 ou 2 | 2

Considérons une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité I constante. Le champ sur l'axe de la spire à la distance z du centre s'écrit, avec α l'angle sous lequel on voit la spire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\,\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

1- Que devient l'expression de ce champ $\vec{B}$ pour $z \gg R$? Commenter le résultat obtenu.

2- Pour quelle valeur du rapport $\frac{z}{R}$ le champ $\vec{B}$ exact créé par la spire et le champ dans l'approximation dipolaire peuvent-ils être confondus à 1% près ?

Exercice 11. Oscillations d'une boussole | 2 | 2

Une boussole est formée d'un aimant permanent solide en forme d'aiguille qu'on peut modéliser par un petit dipôle magnétique $\vec{m}$ de norme constante m, la direction du vecteur $\vec{m}$ étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur $\vec{e}_r$ local et formant une liaison pivot qu'on peut supposer idéale (frottements négligeables).

Le champ magnétique terrestre possède une composante horizontale et une composante verticale.

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ). Légèrement écartée de sa position d' équilibre, l'aiguille aimantée oscille avec une pseudopériode τ_{osc}.

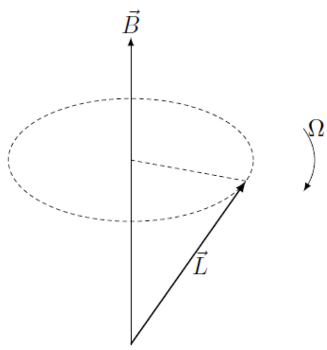
Montrer que la connaissance de m, τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle?

Exercice 12. Précession d'un magnéton dans un champ magnétique | 2 | 2 ou 3

On considère un électron d'un atome de d'hydrogène qui, selon le modèle de Bohr, vérifie la relation $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}$ où $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique et $\vec{L}$ le moment cinétique de l'électron, tandis que γ est une constante appelée rapport gyromagnétique.

Cet électron est plongé dans un champ uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

1- Etablir l'équation du mouvement du moment cinétique de l'électron à l'aide du théorème du moment cinétique (TMC).



2- Montrer la conservation de la composante $L_z = \vec{L}.\vec{e}_z$ puis celle de L. En déduire les positions possibles de $\vec{L}$.

3- Notons L_x et L_y les composantes de $\vec{L}$ dans un plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$. Projeter le TMC dans ce plan.

4- En posant $u = L_x + iL_y$, montrer que u vérifie l'équation :

$\frac{du}{dt} + i\Omega u = 0$; donner l'expression de Ω en fonction des grandeurs caractéristiques du système et résoudre cette équation. En déduire que $\vec{L}$ tourne à vitesse $-\Omega$ constante autour de $\vec{e}_z$.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 13. Moment dipolaire de la molécule d'eau 1 ou 2 | 2

En considérant l'électronégativité des atomes constituants la molécule d'eau, on peut modéliser celle-ci par un atome d'oxygène portant la charge -2δ relié à deux atomes d'hydrogène portant chacun une charge $+\delta$. δ vaut 33% de la charge élémentaire, l'angle entre les deux liaisons $O - H$ est noté α, la distance entre un atome d'oxygène et un atome d'hydrogène est notée d.

Déterminer l'expression vectorielle du moment dipolaire de la molécule d'eau $\vec{p}$ et calculer sa norme en $C.m$ et en Debye D.

Données :

- Charge élémentaire : $e = 1{,}60.10^{-19}\ \mathrm{C}$
- Distance $O - H$: $d = 0{,}952.10^{-10}\ \mathrm{m}$
- Angle α : $\alpha = 104°45'$

Exercice 14. Moment magnétique terrestre 1 ou 2 | 2

Sachant que la norme du champ magnétique terrestre en France est de l'ordre de $5{,}1.10^{-5}$ T (0,51 gauss), retrouver l'odg du moment magnétique terrestre (on prendra pour le rayon de la Terre $R = 6\,300$ km et $\theta = 43°$ à Nantes car la latitude y est égale à 47°).