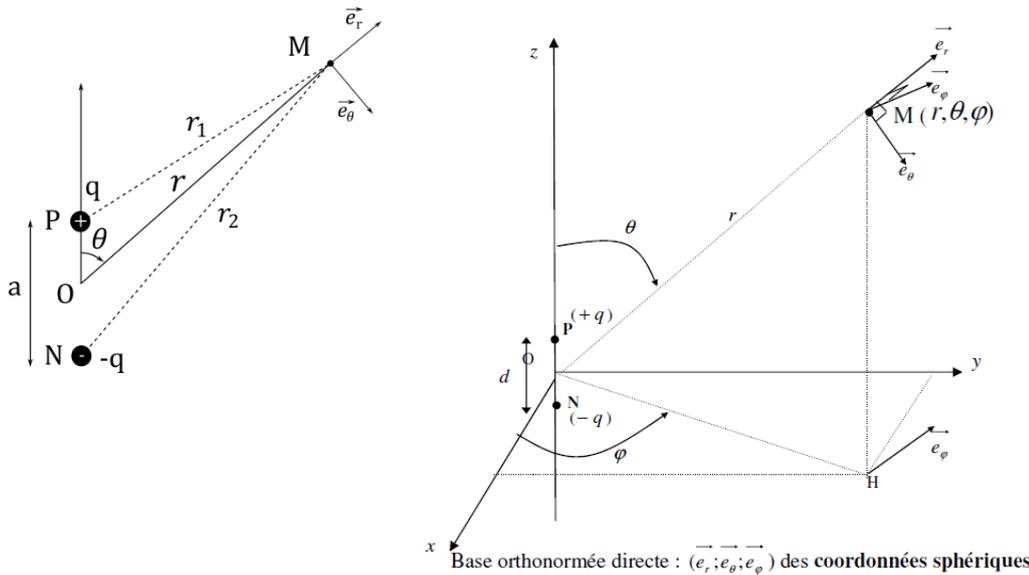


■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Potentiel créé par un dipôle électrostatique



Tout plan méridien est plan de symétrie des charges donc du champ électrique, celui-ci est donc contenu dans ces plans et ne possèdera pas de composante selon  $\vec{e}_\varphi$ . L'invariance de révolution autour de l'axe  $Oz$  annule toute dépendance à l'angle  $\varphi$ .

Afin de déterminer le champ électrique, nous allons partir de l'expression du potentiel total qui s'exprime simplement à partir du théorème de superposition :

$$V(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_N} \right)$$

On peut déjà remarquer que le plan médiateur de  $[AB]$  est le plan équipotentiel  $V = 0$ .

$$r_p^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} = PO^2 + OM^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$r_p^2 = PO^2 + OM^2 - \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{OM} = PO^2 + OM^2 - \vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ra \cos(\theta) = r^2 \left[ \left(\frac{a}{2r}\right)^2 + 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) \right]$$

$$\frac{1}{r_p} = (r_p^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Avec  $a \ll r$  soit  $a/r \ll 1$ , on peut faire un développement limité à l'ordre 1 de  $\left[ 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ , de la forme

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + o(\epsilon) \text{ soit ici } (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\epsilon}{2} + o(\epsilon)$$

$$\frac{1}{r_p} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right)$$

De même, on trouve que

$$\frac{1}{r_N} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right)$$

Et on en déduit que

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_N} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) - \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) = \frac{a}{r^2} \cos(\theta)$$

D'où finalement par un développement limité à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{r_N} = (r_N^2)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{a^2}{4} + r^2 + \vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{r_P} = (r_P^2)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{a^2}{4} + r^2 - \vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

On trouve alors l'expression du potentiel :

$$V = V_N + V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} \right) = \frac{q\vec{a} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{avec } \vec{p} = q\vec{a}$$

Expression du potentiel  $V(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} \right)$  :

$$V(M) \simeq \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\theta) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right]$$

Formule de dérivation de produit  $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}g + g\overrightarrow{\text{grad}}f$

On obtient

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{p} \cdot \vec{r} \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{1}{r^3} \right] + \frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}[\vec{p} \cdot \vec{r}] \right)$$

Or  $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = \vec{p}$  et d'autre part  $\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{e}_r}{r^4}$

Finalement, on obtient

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \vec{p} - (\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \frac{3\vec{e}_r}{r^4} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (p \cos(\theta) \vec{e}_r - p \sin(\theta) \vec{e}_\theta - 3p \cos(\theta) \vec{e}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2p \cos(\theta) \\ p \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière expression est obtenue en orientant le dipôle selon l'axe (Oz) et en repérant le point M en coordonnées sphériques. Il faut noter que le champ décroît désormais en  $\frac{1}{r^3}$  et qu'il n'est pas isotrope.

Ce résultat peut se déduire directement de l'expression du potentiel si on connaît la forme du gradient en coordonnées sphériques.

Données : gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi$$

Avec  $V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta = -2 \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = 2 \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos(\theta) \vec{e}_r + p \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$$

À grande distance  $r$  devant la dimension  $a$  du dipôle, on trouve que le potentiel électrostatique vaut approximativement

$$V(r, \theta) \simeq \frac{qacos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On trouve également que le champ électrostatique vaut approximativement

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}] = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

Cette approximation constitue l'**approximation dipolaire**.

On peut remarquer que le potentiel décroît en  $\frac{1}{r^2}$  tandis que le champ décroît en  $\frac{1}{r^3}$ , i.e. plus rapidement que le potentiel et le champ d'une des deux charges seules, on parle **d'écrantage** des charges pour signifier que l'effet des charges tend à se compenser à grande distance de celles-ci.

## Exercice 2. Equipotentielles et lignes de champ du dipôle électrostatique

**Equation des équipotentielles :** Une équipotentielle est donnée par  $V = cste$  soit :

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 = cte$$

D'où

$$\frac{\cos(\theta)}{r^2} = cte \quad \Rightarrow \quad r = r_0 \sqrt{|\cos(\theta)|}$$

**Equation des lignes de champ :**

Les lignes de champs sont quant à elles tangentes en tout point au champ électrique  $\vec{E}$  et sont donc perpendiculaires aux équipotentielles (puisque  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ , i.e. le champ est perpendiculaire aux équipotentielles).

Soit  $\overrightarrow{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$  le déplacement le long d'une ligne de champ ;  $\overrightarrow{dl}$  et  $\vec{E}$  sont nécessairement colinéaires soit :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{dl} = \vec{0} = \begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ 0 \end{vmatrix} = (E_r r d\theta - E_\theta dr) \vec{e}_\varphi = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

Soit

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{d \ln(r)}{d\theta}$$

Or

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos(\theta) \vec{e}_r + p \sin(\theta) \vec{e}_\theta) = \underbrace{\frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}}_{E_r} \vec{e}_r + \underbrace{\frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}}_{E_\theta} \vec{e}_\theta$$

D'où

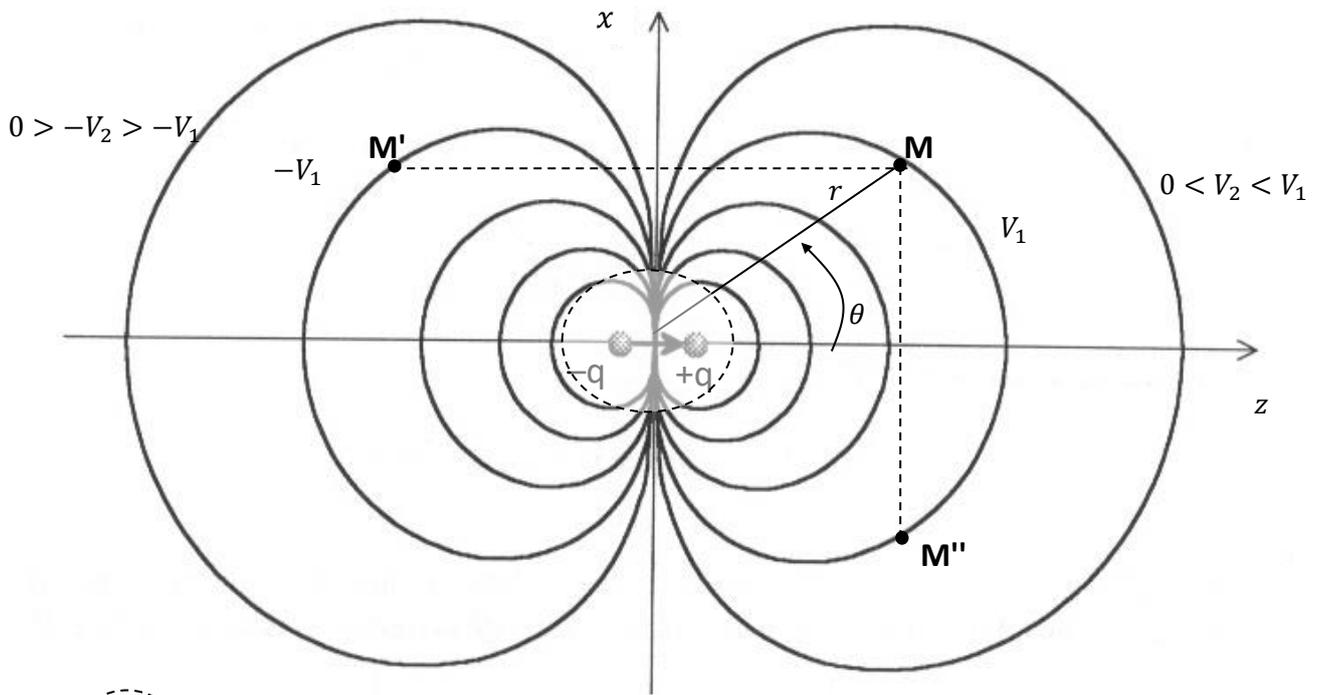
$$\frac{E_r}{E_\theta} = 2 \cotan(\theta)$$

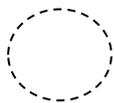
Finalement

$$\frac{d \ln(r)}{d\theta} = 2 \cotan(\theta) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -2 \ln(\sin(\theta)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = r_0 \sin^2(\theta)}$$

**Courbes équipotentielles**

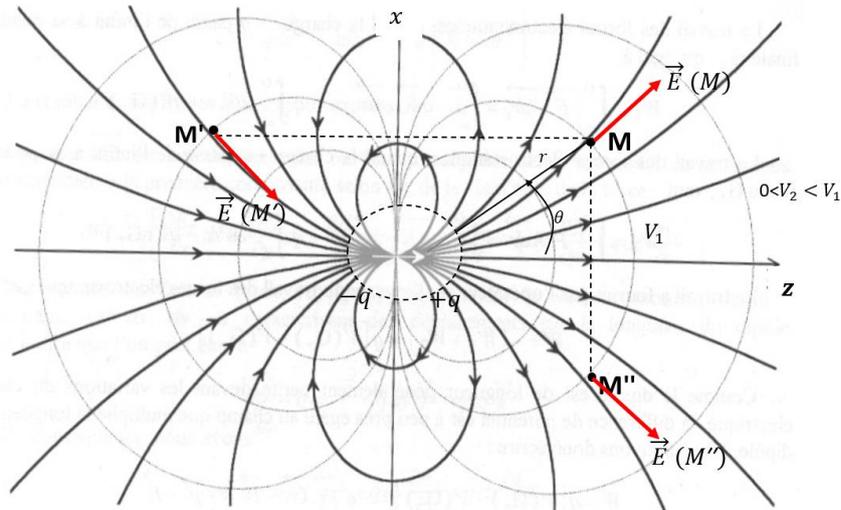
Les équipotentielles sont des courbes d'équations  $r \propto \sqrt{|\cos(\theta)|}$




 Zone de champ proche, l'approximation dipolaire  $d \ll r$  n'est plus valable.

1) Lignes de champ et cartes complètes

Les lignes de champ sont bien orthogonales aux surfaces équipotentielles, et ont pour équation  $r = r_0 \sin^2(\theta)$ .



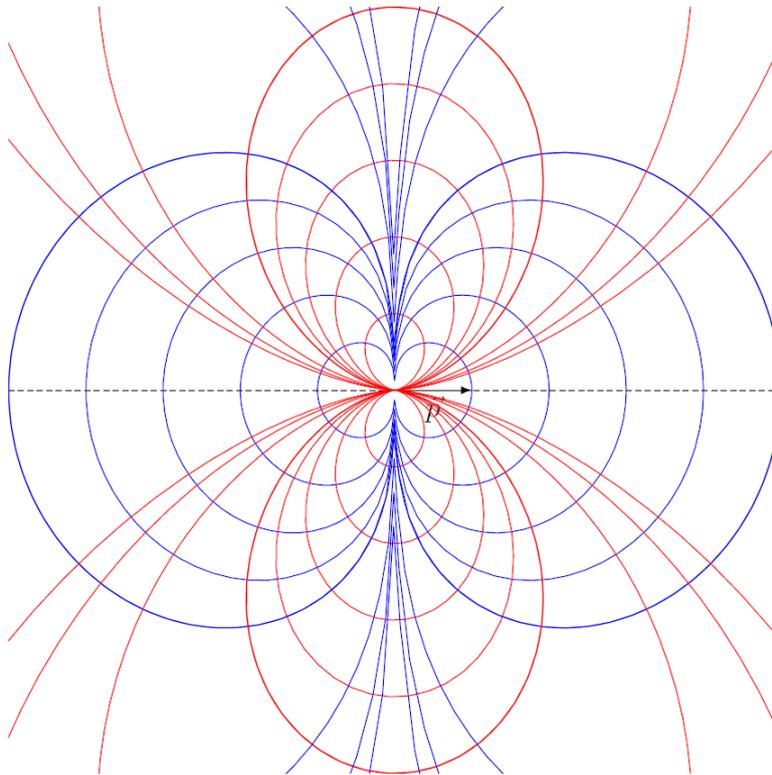


FIGURE 1 – Équipotentiels (en rouge) et lignes de champ (en bleu) dans le cas d'un dipôle. On pourra en particulier remarquer que les lignes de champ sont bien perpendiculaires en tout point aux équipotentiels.

Simulation J. Kieffer

### Exercice 3. Énergie potentielle d'un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique extérieur

Commençons par rappeler que l'énergie potentielle d'une charge unique dans un champ électrique extérieur vaut  $\mathcal{E}_{p,ext} = qV$ . Reprenons la modélisation précédente du dipôle par deux charges opposées "proches". On a alors par superposition :

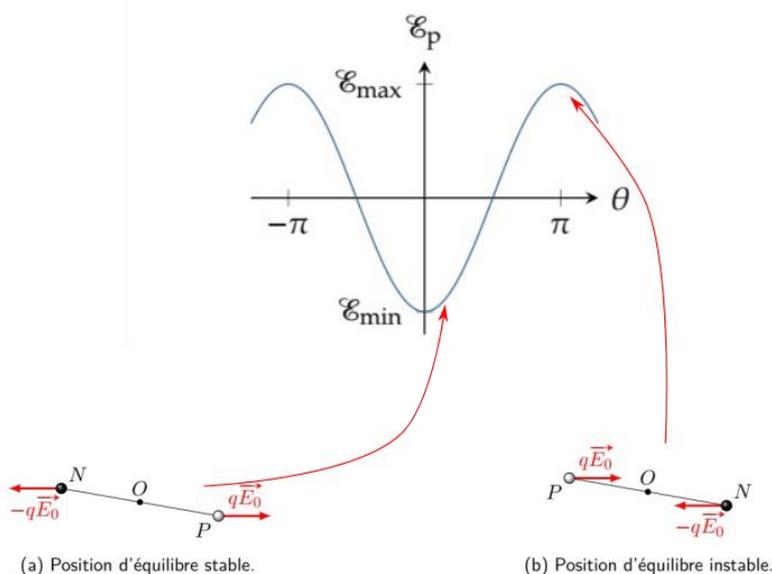
$$\mathcal{E}_{p,ext} = qV(P) - qV(N)$$

Les points P et N étant "aussi proches" que l'on souhaite, on peut écrire par définition du gradient

$$\mathcal{E}_{p,ext} \simeq q(V(O) + \overrightarrow{\text{grad}}V(O) \cdot \overrightarrow{OP}) - q(V(O) + \overrightarrow{\text{grad}}V(O) \cdot \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{\text{grad}}V(O) \cdot q\overrightarrow{NP} = -\vec{E}_{ext}(O) \cdot q\overrightarrow{NP}$$

$$\mathcal{E}_{p,ext} = -q\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}_{ext}(O) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

Dans le cas d'un champ électrique uniforme,  $\mathcal{E}_{p,ext} = -pE \cos \theta$



Pour minimiser son énergie potentielle, le dipôle va tendre vers  $\theta = 0$ . Le dipôle a donc tendance à **tourner** pour s'aligner avec le champ  $\vec{E}_{ext}$

### Exercice 4. Champs et moments dipolaires créés par une bobine longue ou par des aimants permanents

1) Etude d'une bobine

une bobine sera considérée infiniment longue si  $\frac{l}{r} \geq 10$ .

a) Le rapport  $\frac{l}{R} = 15 > 10$ , donc le critère précédent est vérifié.

Ainsi  $B_{int} = \mu_0 nI$  et  $B_{ext} = 0$  (modèle bobine infiniment longue)

On veut obtenir un champ magnétique de  $B = 0,1 \cdot 10^{-2} T$ , donc  $n$  doit vérifier  $B = \mu_0 nI$ , or  $n = \frac{N}{l}$ , donc le nombre de spires nécessaires est  $N = \frac{Bl}{\mu_0 I} = 796$  spires.

b) Sur une couche on peut juxtaposer  $l/d$  spires, soit 400 spires. Il faut donc **2 couches**.

c) L'expression de la norme du moment dipolaire magnétique créé est  $\mathcal{M} = IS = I\pi R^2$ .

4) a)  $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$  homogène à :  $[\mathcal{M}] = [I][L]^2$  soit en  $A \cdot m^2$   
 $[\frac{\mathcal{M}}{V}] = \frac{[I][L]^2}{[L]^3} = \frac{[I]}{[L]}$  d'où en  $A \cdot m^{-1}$  : unités cohérentes

b) soit  $m$  l'aimantation :  $m = \frac{\mathcal{M}}{V}$  soit  $\mathcal{M} = mV = m\pi R^2 e$   
 avec  $m = 3 \cdot 10^6 A \cdot m^{-1}$  (aimantation moyenne du NdFeB) :  
 $\mathcal{M} = 0,2 A \cdot m^2$ .

c) Moment dipolaire d'une bobine :  $\mathcal{M} = NIS = N I \pi R^2$   
 on cherche  $\mathcal{M} = N I \pi R^2 = m \pi R^2 e \Leftrightarrow N = \frac{m e}{I}$  soit  
 $N = 3 \cdot 10^4$  spires  $\Rightarrow$  aimantation  $\uparrow$  !

### Exercice 5. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1) Dans un référentiel d'étude considéré galiléen, d'origine O, position du noyau considéré fixe, l'électron ne subit que la force d'attraction électrostatique de la part du noyau :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ qui peut s'écrire } \vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ avec } k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \text{ constante positive.}$$

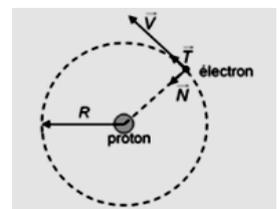
Le vecteur force est selon le vecteur  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$ , donc est colinéaire au vecteur  $\vec{OM}$ . Ainsi la droite d'action de la force subie par l'électron passe toujours par le même point O. **La force est donc centrale de centre O.**

**La force est donc centrale de centre O.**

Théorème du moment cinétique vectoriel dans ce référentiel galiléen d'étude par rapport au point O fixe :

$$\frac{d\vec{L}(M)/O,R}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \underset{\text{colinéaires}}{=} \vec{0}, \text{ donc le vecteur } \vec{L} \text{ est constant au cours du temps.}$$

Dans le cas où  $\vec{OM}_0$  et  $\vec{v}_0$  (vecteur position et vecteur vitesse à  $t = 0$ ) sont non colinéaires, le vecteur moment cinétique initial  $\vec{L}_0 = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0$  est perpendiculaire au plan défini par les vecteurs  $\vec{OM}_0$  et  $\vec{v}_0$  : plan  $(\Pi_0)$ . Et comme  $\vec{L}$  est constant,  $\vec{L}$  est à tout instant perpendiculaire au plan  $(\Pi_0)$ .



Or les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont à tout instant perpendiculaires au vecteur  $\vec{L}$  donc ils sont à tout instant compris dans le plan  $(\Pi_0)$ .

Le point M est donc en permanence contenu dans le plan  $(\vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ . Le mouvement de M est donc plan.

2) Etude du **mouvement circulaire** de l'électron dans le référentiel d'étude galiléen.

- Etude cinématique en polaires :  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}(M)_R = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$  soit avec  $r$  constant :  $\vec{v}(M)_R = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et

$$\vec{a}(M)_R = (-r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

- Selon la seconde loi de Newton (référentiel galiléen) :  $\vec{F} = m \vec{a}$  soit par projection selon  $\vec{u}_r$  :

$$-\frac{k}{r^2} = m(-r \dot{\theta}^2) \text{ donc } \dot{\theta}^2 = \frac{k}{mr^3} : \text{mouvement uniforme}$$

- Energie cinétique** de l'électron dans le référentiel d'étude :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ avec } v = r \dot{\theta} = r \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \text{ donc } E_c = \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 = \frac{m r^2 k}{2 m r^3} = \frac{k}{2r} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = E_c$$

- Energie potentielle** telle que  $F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{k}{r^2}$ , donc  $E_p = -\frac{k}{r} + \text{cste}$ , cste que l'on trouve nulle en supposant l'énergie potentielle nulle quand  $r$  tend vers l'infini.

$$E_p = -\frac{k}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel galiléen,

$\Delta E_m = W_{nc} = 0$  (force conservative) ; soit  $E = \text{cste}$  et l'énergie totale de l'électron se conserve.

Pour le mouvement circulaire,  $E_m = E_p + E_c = -\frac{k}{r} + \frac{k}{2r} = -\frac{k}{2r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$  expression qui est bien constante !

On retrouve par ailleurs la relation usuelle :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{E_p}{2} = -E_c$$

Ce résultat constitue un cas particulier du théorème du viriel et est généralisable à un ensemble de masses en interaction gravitationnelle réciproque (problème à  $N$  corps).

3) En repérant M par ses coordonnées polaires,  $\vec{L}$  est porté par l'axe Oz :  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{v} = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ .

Alors en supposant l'angle  $\theta$  croissant,  $L = \|\vec{L}\| = mr^2 \dot{\theta} = mrv$  et on a montré que  $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{mr^3}}$

$$L = \|\vec{L}\| = mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \quad \text{donc } L = \sqrt{k m r} = \sqrt{\frac{e^2 m r}{4 \pi \epsilon_0}}$$

**Introduction de la quantification :**

- Selon l'hypothèse de quantification de  $L$  :  $L = n \hbar = \sqrt{\frac{e^2 m r}{4 \pi \epsilon_0}}$ . Ainsi, la quantification de  $L$  se reporte sur  $r$ .

- Seules certaines valeurs de  $r$  notées  $r_n$  sont accessibles.  $1 \text{ m} = 1.10^9 \text{ nm}$

$$\text{Elles sont telles que } L^2 = n^2 \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^2 = \frac{e^2 m r}{4 \pi \epsilon_0} \text{ soit } r = r_n = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2 = 0,053 n^2 \text{ (en nm)}$$

4) Sachant que  $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ , la quantification qui est apparue sur  $r$  se reporte sur  $E$ .

Seules certaines valeurs de  $E$  notées  $E_n$  sont accessibles.  $1 \text{ J} = (1/1,6.10^{-19}) \text{ eV}$

$$\text{Elles sont telles que } E_n = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{-m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{A}{n^2}$$

$$\text{A.N. : } A = -13,6 \text{ eV}$$

### 5) Applications :

L'énergie d'excitation nécessaire pour faire passer un atome d'hydrogène de l'état fondamental  $n = 1$  à l'état

$$n = 3 \text{ est } E_{1 \rightarrow 3} = \left[ \frac{-13,6}{n^2} \right]_1^3 = \mathbf{12,1 \text{ eV}}$$

La longueur d'onde émise par un atome quand il passe de l'état  $n = 3$  à l'état  $n = 2$  est telle que :

$$\frac{hc}{\lambda_{3 \rightarrow 2}} = E_3 - E_2 \text{ soit } \lambda_{3 \rightarrow 2} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \mathbf{657 \text{ nm.}}$$
 Cela correspond à la **raie rouge** de la série de Balmer.

Élaborée par Niels Bohr en 1913, cette théorie rencontra un succès immédiat car elle expliquait de manière simple les raies spectrales des éléments hydrogénés tout en effectuant un rapprochement entre les premiers modèles de l'atome et la théorie des quanta. Ce modèle sera généralisé au cas des électrons relativistes par Arnold Sommerfeld afin d'écrire de façon quantitative la structure fine des lignes spectrales de l'hydrogène. Cependant, cette théorie ne peut expliquer le spectre d'éléments à plusieurs électrons (comme celui de l'hélium), ni la nature des liaisons chimiques, et sera finalement remplacée par la mécanique quantique en 1925.

6) Au cours de son mouvement, l'électron parcourt une distance  $d = vt$  soit un nombre de tours  $N = d/2\pi r$

$$q = -Ne = It \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d}{2\pi r} e = \frac{Id}{v}$$

$$I = -\frac{ve}{2\pi r}$$

Moment magnétique microscopique équivalent (= magnéton de Bohr) :

$$\vec{\mathcal{M}}_H = I\vec{S} = -\frac{ve}{2\pi r} \pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{ve}{2} r \vec{e}_z = -\frac{e}{2m} \underbrace{mrv \vec{e}_z}_{\vec{L}} = -\frac{e}{2m} \vec{L} = \vec{\mu}_B$$

Pour  $n = 1$ ,  $L = \hbar$  soit  $|\mu_B| = \frac{e}{2m} \hbar \approx 9.10^{-24} \text{ A.m}^2$ .

Pour une mole,  $\mathcal{M} = \mathcal{N}_A |\mu_B| \approx 9.10^{-24} \times 6.10^{23} \approx 5 \text{ A.m}^{-2}$  (odg :  $1 \text{ A.m}^{-2}$ )

Le moment magnétique est donc directement proportionnel au moment cinétique de l'électron. Le facteur de proportionnalité  $\gamma$  est appelé rapport gyromagnétique. Par identification :  $\gamma = -\frac{e}{2m}$

### Exercice 6. Champ géomagnétique et moment magnétique terrestre (corrigé J. Kieffer)

1. Le champ pour le dipôle magnétique  $M\vec{e}_z$  (où  $\vec{e}_z$  est l'axe S-N géographique) s'écrit toujours

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}$$

On a  $B_h = B_\theta$  et  $B_v = B_r$ . Première remarque, on a  $\theta \in [0, \pi/2]$  pour Paris et  $B_\theta < 0$  (avec l'orientation de  $\vec{e}_\theta$  voir le dessin) donc  $M < 0$ .

Par ailleurs, par définition de l'inclinaison

$$\tan I = \frac{B_v}{B_h} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta} = 2 \tan(\lambda) \quad \text{car } \theta = \pi/2 - \lambda$$

On vérifie que cette relation est bien vérifiée avec, on a

$$\tan I = 2.05 \quad 2 \tan \lambda = 2.3$$

C'est correct mais pas parfait. La petite différence a pour origine la différence de direction entre l'axe N-S géographique et l'axe nord-sud géomagnétique. Si on appelle  $\alpha$  cette différence, on a alors  $\theta = \pi/2 - \lambda - \alpha$  et donc on aurait

$$\tan I = 2 \tan(\lambda + \alpha) \Rightarrow \alpha = -3,2^\circ$$

L'ordre de grandeur est correct mais un peu faiblard...

2. Il suffit d'appliquer la formule ...

$$B_h = \frac{\mu_0 M}{4\pi R_T^3} \sin \theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi R_T^3} \cos \lambda \Rightarrow \boxed{M \simeq 8 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2}$$

On trouve un ordre de grandeur tout à fait raisonnable.

## EXERCICES

### Exercice 7. Dipôle électrostatique entre les armatures d'un condensateur plan (corrigé « Physique MPI-MPI\* Exercices incontournables », J.-N. Beury, J'intègre Dunod 5<sup>ème</sup> Ed.)

1. On applique le théorème de superposition pour calculer le champ créé par les deux armatures, qui sont assimilées à des plans infinis situés en  $x = 0$  et  $x = e$ .

**Distribution  $D_1$**  : armature de charge  $Q$  et de densité surfacique de charges  $+\sigma$

On a vu dans l'exercice sur le condensateur plan que la norme du champ électrostatique créé par un plan infini est  $\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$ . Comme le champ diverge à partir des charges positives, on en déduit le champ dans les deux régions de l'espace.

$$\begin{array}{c} +\sigma \\ \left. \begin{array}{c} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \leftarrow \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \rightarrow \end{array} \right| \vec{u}_x \\ \text{Armature n}^\circ 1 \end{array}$$

**Distribution  $D_2$**  : armature de charge  $-Q$  et de densité surfacique de charges  $-\sigma$ .

$$\begin{array}{c} -\sigma \\ \left. \begin{array}{c} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \rightarrow \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \leftarrow \end{array} \right| \vec{u}_x \\ \text{Armature n}^\circ 2 \end{array}$$

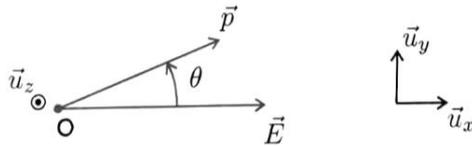
**Distribution  $D$  (condensateur)** : armature n<sup>o</sup> 1 de charge  $Q$ , de densité surfacique de charges  $+\sigma$  située en  $x = 0$ , et armature n<sup>o</sup> 2 de charge  $-Q$ , de densité surfacique de charges  $-\sigma$  située en  $x = e$ .

$$\begin{array}{c} +\sigma \quad -\sigma \\ \left. \begin{array}{c} \vec{E} = \vec{0} \quad \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \end{array} \right. \quad \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{u}_x \end{array} \right| \end{array}$$

Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

Dans le condensateur, le champ vaut  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ .

2.



Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

**Première méthode : utilisation du moment des forces**

Le moment des forces est  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pE \sin \theta \vec{u}_z$ .

À l'équilibre,  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ .

Il y a deux positions d'équilibre :  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  colinéaires.

**Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle**

L'énergie potentielle du dipôle est :  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$ .

L'énergie potentielle est extrême à l'équilibre.

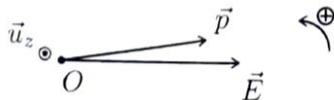
On retrouve bien les deux positions d'équilibre :  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

3. L'équilibre est stable si, lorsque le système s'écarte de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à le ramener vers sa position d'équilibre.

L'équilibre est instable si, lorsque le système s'écarte de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à l'écarte de sa position d'équilibre. Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

**Première méthode : utilisation du moment des forces**

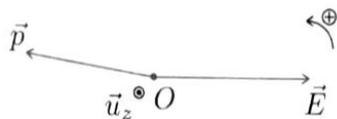
- On écarte le dipôle de la position d'équilibre  $\theta = 0$ .



Sur le schéma représenté ci-dessus,  $\theta > 0$  et  $\Gamma_z < 0$  : le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite). Si on écarte le dipôle dans l'autre sens ( $\theta < 0$ ) de sa position d'équilibre, on montre de la même façon que le couple a tendance à le faire tourner dans le sens trigonométrique et à le ramener vers sa position d'équilibre. La position  $\theta = 0$  est donc un équilibre stable.

**Le dipôle va s'aligner dans le même sens que le champ extérieur.**

- On écarte le dipôle de la position d'équilibre  $\theta = \pi$ .



$\Gamma_z < 0$ , le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite).

La position  $\theta = \pi$  est donc un équilibre instable.

**Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle**

L'énergie potentielle est égale à  $E_p = -pE \cos \theta$ .

L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire pour  $\theta = 0$ .

L'équilibre est instable si l'énergie potentielle est maximale, c'est-à-dire pour  $\theta = \pi$ .

4. Il y a deux méthodes pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

**Première méthode : utilisation du théorème du moment cinétique**

On écrit le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel  $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$  galiléen :

$$J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_z = -pE \sin \theta$$

On en déduit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \sin \theta = 0$$

**Deuxième méthode : raisonnement énergétique**

Comme on a un système conservatif à une dimension, l'énergie mécanique se conserve. On obtient directement l'équation différentielle en écrivant que

$$\frac{dE_m}{dt} = 0.$$

L'énergie mécanique est égale à :  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 - pE \cos \theta$ .

Comme  $\omega = \dot{\theta}$ , alors  $E_m = -\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - pE \cos \theta$ .

On en déduit :  $\frac{dE_m}{dt} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + pE\dot{\theta} \sin \theta$ .

En simplifiant par  $\dot{\theta}$ , on en déduit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \sin \theta = 0$$

Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre  $\theta \ll 1$ , on peut effectuer un développement limité de  $\sin \theta$  au premier ordre. On a alors :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \theta = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

On définit la pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{pE}{J}}$ .

La solution est de la forme :  $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \phi)$  ou de la forme  $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ .

La deuxième forme est plus pratique à utiliser avec les conditions initiales.

**Exercice 8. Dipôle électrique à 2 dimensions (corrigé J. Kieffer)**

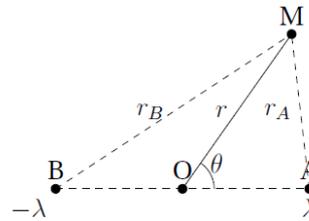
On va appliquer le principe de superposition. On commence donc par calculer le champ et le potentiel électrique créés par un fil infini chargé  $\lambda$ .

Les invariants et les symétries conduisent à considérer  $V(r)$  et  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ . L'application du théorème de Gauss sur un cylindre de hauteur  $h$  conduit alors à  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ . On en déduit alors le

potentiel  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$  d'où  $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$ .

Pour trouver le potentiel et le champ créés par la distribution initiale au point  $M$ , il ne reste plus qu'à appliquer le principe de superposition. On va raisonner dans un plan  $z = \text{cste}$  (de toute façon le problème est invariant par translation ...). En notant  $O$  le centre du dipôle (entre les deux fils),  $A$  le fil chargé  $\lambda$  et  $B$  celui chargé  $-\lambda$  on a

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$



En notant  $r = OM$  et l'angle  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$

, on se place dans l'approximation  $r \gg a$  et on va raisonner à l'ordre le plus bas non nul en  $a/r$ . On peut appliquer Al Kashi pour trouver  $r_A$  :

$$r_A^2 = AM^2 = (\vec{AO} + \vec{OM})^2 = OA^2 + OM^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} = r^2 + ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} \simeq r^2 \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{r} \right)$$

à l'ordre 1 en  $a/r$  et de même  $r_B^2 \simeq r^2 \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{r} \right)$ .

On peut alors en déduire le potentiel électrique (en poursuivant le DL) :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B^2}{r_A^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 - \frac{a \cos \theta}{r}}{1 + \frac{a \cos \theta}{r}} \simeq -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r}$$

et on peut alors trouver le champ électrique

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\frac{a\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

On trouve alors les équipotentielles en écrivant que sur une ligne le potentiel est constant et vaut  $V_0$

$$V = V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{r} = \text{cste} \Rightarrow \boxed{r = r_0 \cos \theta}$$

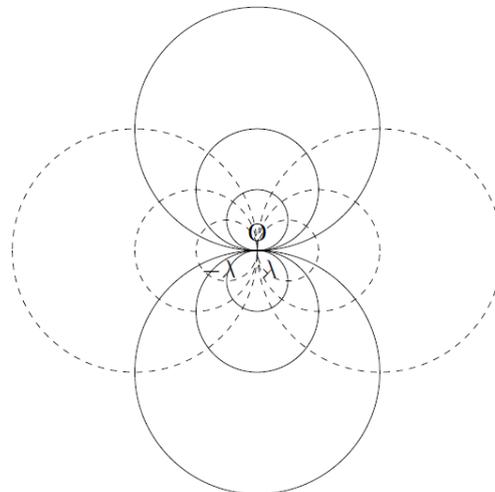
Ceci correspond à l'équation en polaire de cercles tous tangents en 0 (et de centre  $r_0/2$ ).

L'équation des lignes de champ se trouve en écrivant qu'un déplacement  $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$  le long de cette ligne est colinéaire à  $\vec{E}$  soit

$$d\vec{l} = \alpha \vec{E} \iff \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = d(\ln r) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = d(\ln \sin \theta) \Rightarrow \boxed{r = r_0 \sin \theta}$$

Ceci correspond à l'équation en polaire de cercles tous tangents en 0 et tournés de  $\pi/2$  i.e. de centre  $(0, r_0/2)$ .



### Exercice 9. Mesure du champ magnétique terrestre

En l'absence de courant, l'aiguille aimantée s'aligne le long de la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_H$ . (Voir figure 1)

L'axe du solénoïde étant selon la direction Ouest Est, l'aiguille est perpendiculaire à l'axe du solénoïde.

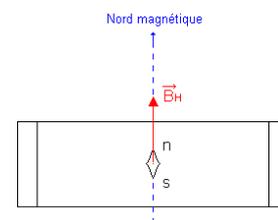


Figure 1 avec  $i = 0$  A.

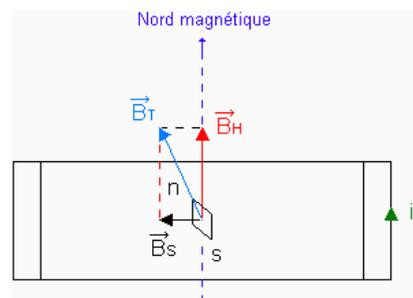
Champ magnétique créé par le solénoïde supposé infini :

$$\boxed{B_s = \mu_0 n I = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$$

En présence de courant, l'aiguille aimantée s'oriente selon le champ magnétique total qui est la somme vectorielle du champ terrestre et du champ du solénoïde.  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_s + \vec{B}_H$

Soit  $\theta$  = angle entre  $\vec{B}_{\text{total}}$  et  $\vec{B}_s$ , alors  $\tan \theta = \frac{B_H}{B_s}$ , d'où

$$\boxed{B_H = B_s \tan \theta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$$



### Exercice 10. Champ sur l'axe d'une spire

2) Pour  $z \gg R$ , on a

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 z^3} = \frac{\mu_0 \pi R^2}{4 \pi z^3} \times 2$$

On retrouve le champ dipolaire pour  $\theta = 0$  à une distance  $z$ .

3) On a

$$\frac{|\Delta B|}{B} = \frac{3 R^2}{2 z^2} \leq 0,01 \Rightarrow \frac{z}{R} \geq \sqrt{150} \simeq 12,2$$

### Exercice 11. Oscillations d'une boussole (corrigé J. Kieffer)

Solution

1. En utilisant une approche énergétique, on a  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B_h \cos \theta$  et on a puisque le système est conservatif

$$E_m = \text{cste} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m B_h \cos \theta \Rightarrow \text{en dérivant par rapport à } t, I \dot{\theta} \ddot{\theta} + m B_h \sin \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m B_h}{I} \sin \theta = 0$$

Aux petits angles, on retrouve un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{\tau_{osc}^2} = \frac{m B_h}{I}$$

On a donc mesuré la composante horizontale de  $B$  (en tournant la boussole de  $90^\circ$ , on pourrait aussi mesurer  $B_v$ ).

### Exercice 12. Précession d'un magnéton dans un champ magnétique (corrigé J. Kieffer)

On suppose maintenant qu'on a l'électron précédent qui vérifie la relation  $\vec{m} = \gamma \vec{L}$  où  $\vec{m}$  est le moment magnétique et  $\vec{L}$  le moment cinétique de l'électron et  $\gamma$  est une constante appelée rapport gyromagnétique.

Cet électron est plongé dans un champ uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ .

L'équation du mouvement du moment cinétique de l'électron obéit au théorème de moment cinétique (TMC) soit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \gamma \vec{L} \wedge \vec{B}$$

Nous allons maintenant étudier les conséquences de cette équation afin de décrire au mieux le mouvement du moment cinétique (et donc magnétique puisqu'ils sont proportionnels).

### Conservation de $L_z$

Montrons dans un premier temps que la composante  $L_z$  est conservée. Pour cela, il suffit de faire le produit scalaire du TMC avec  $\vec{e}_z$  :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{e}_z = \frac{dL_z}{dt} = \gamma(\vec{L} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = 0$$

car  $\vec{B}$  est selon  $\vec{e}_z$ . Donc  $L_z$  est bien conservée.

### Conservation de $L$

Montrons maintenant que  $L = |\vec{L}|$  est conservée. Pour cela, il suffit de faire le produit scalaire du TMC avec  $\vec{L}$  :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} = \gamma(\vec{L} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{L} = 0 \Rightarrow L^2 = \text{cste} \Rightarrow L = \text{cste}$$

Ainsi,  $\vec{L}$  a une norme constante et une composante  $L_z$  constante. Ceci entraîne que  $\vec{L}$  ne peut occuper qu'un cercle de rayon constant autour de  $\vec{e}_z$ .

### Précession : première démonstration

On va maintenant montrer que  $\vec{L}$  tourne à vitesse constante autour de  $\vec{e}_z$ . Il existe deux démonstrations possibles.

Notons  $L_x$  et  $L_y$  les composantes de  $\vec{L}$  dans le plan perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , le TMC projeté dans le plan s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \end{vmatrix} = \gamma B_0 \begin{vmatrix} L_y \\ -L_x \end{vmatrix}$$

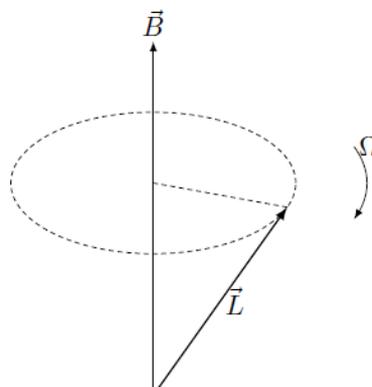
en posant  $u = L_x + iL_y$  et en faisant (1) +  $i$ (2), on obtient :

$$\frac{du}{dt} = \gamma B_0(L_y - iL_x) = -i\gamma B_0(L_x + iL_y) = -i\gamma B_0 u \Rightarrow \frac{du}{dt} + i\Omega u = 0$$

en posant  $\Omega = \gamma B_0$ . La solution de cette équation est simple et s'écrit :

$$u = u_0 \exp(-i\Omega t)$$

ainsi  $u$  tourne à la vitesse  $-\Omega$  autour de  $\vec{e}_z$  ce qui veut dire que la composante horizontale tourne à  $-\Omega$  dans ce plan...



## Précession : seconde démonstration

En reprenant le TMC, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} + \gamma \vec{B} \wedge \vec{L} = \vec{0}$$

On reconnaît alors la formule de Bour. En considérant le référentiel  $R'$  qui tourne à  $\vec{\Omega}_{R'/R} = -\Omega \vec{e}_z$  par rapport au référentiel du laboratoire. On a :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}_{/R'} = \frac{d\vec{L}}{dt}_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt}_{/R} + \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{L} = \vec{0}$$

Donc dans le référentiel  $R'$  qui tourne à  $\vec{\Omega}_{R'/R} = -\Omega \vec{e}_z$ ,  $\vec{L}$  est constant ce qui montre bien que  $\vec{L}$  tourne à  $-\Omega$  dans  $R$  ...

On parle pour décrire le mouvement de  $\vec{L}$  de mouvement de précession autour de l'axe  $\vec{e}_z$ . Ce type de mouvement est mis à profit dans les appareils de RMN ou IRM. En effet, la rotation du moment magnétique induit un signal dans des bobines qui peut être détecté. En mesurant  $\Omega$  il est possible de caractériser précisément l'environnement des moments magnétique et de distinguer différents types de tissus...

### EXERCICES COMPLEMENTAIRES

#### Exercice 13. Moment dipolaire de la molécule d'eau

#### Exercice 14. Moment magnétique terrestre

Avec  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$

$$B = \sqrt{B_r(R, \theta = 43^\circ)^2 + B_\theta(R, \theta = 43^\circ)^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \sqrt{4(\cos 43^\circ)^2 + (\sin 43^\circ)^2}$$

On extrait  $m = 8.10^{22} \text{ A.m}^2$