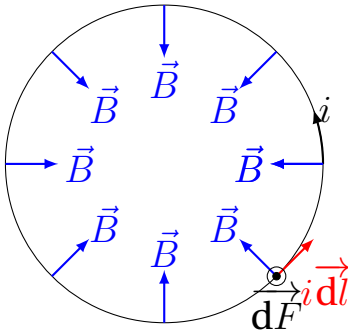




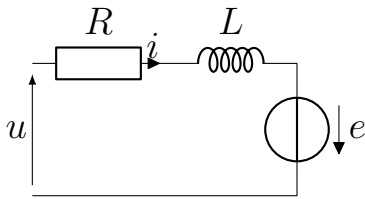
I.A.1.b) On a $\vec{dF} = iBdl\vec{e}_z$ d'où en intégrant $\boxed{\vec{F} = iLB\vec{e}_z}$

I.A.1.c) Le PFD appliqué à la bobine (et la membrane) donne

$$\boxed{m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} + iLB}$$

I.A.2.a) Le champ magnétique étant permanent, on peut appliquer la relation de couplage électromécanique (qui traduit le fait que la puissance totale fournie par B est nulle)

$$P_L + ii = 0 = Fv + ei \Rightarrow \boxed{e = -\frac{F\dot{z}}{i} = -vLB}$$



I.A.2.c) En écrivant la loi des mailles, on obtient

$$u = U_R + U_L - e = \boxed{Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{dz}{dt}lB = u}$$

I.B.1) On passe les deux équations précédentes en complexe

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} + iLB \Rightarrow \underline{z}(-m\omega^2 + jh\omega + k) = \underline{i}lB$$

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{dz}{dt}lB \Rightarrow \underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} + j\omega lB\underline{z}$$

On isole $\underline{z}$ dans la première et on injecte dans la seconde

$$\underline{z} = \frac{lB}{-m\omega^2 + jh\omega + k}\underline{i} \Rightarrow \underline{u} = \left(R + jL\omega + (lB)^2 \frac{j\omega}{-m\omega^2 + jh\omega + k} \right) \underline{i}$$

On en déduit alors l'impédance

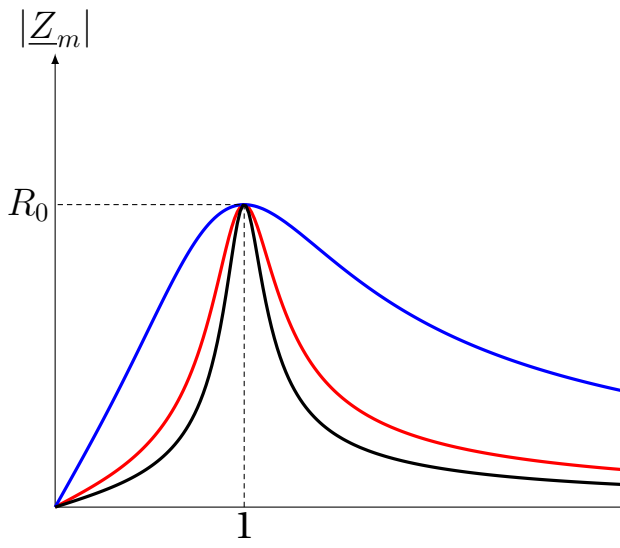
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jL\omega + (lB)^2 \frac{j\omega}{-m\omega^2 + jh\omega + k}$$

I.B.2.a) et l'impédance motionnelle

$$\underline{Z}_m = (lB)^2 \frac{j\omega}{-m\omega^2 + jh\omega + k} = \frac{(lB)^2}{h} \frac{\frac{j\omega h}{k}}{1 + \frac{j\omega h}{k} - \frac{m}{k}\omega^2}$$

En identifiant on a donc $\boxed{R_0 = \frac{B^2 l^2}{h}}$, $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ et $\frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{h}{k}$ soit $\boxed{Q = \sqrt{\frac{km}{h^2}}}$

NB : la forme canonique proposée est celle d'un passe-bande j'ai donc utilisé la deuxième forme canonique.



I.B.2.b) On a $\underline{Z}_m$ qui tend vers 0 pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

On a

$$|\underline{Z}_m| = \frac{R_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^2}}$$

Le module est maximale lorsque la dénominateur est minimal (car le numérateur est constant) donc puisqu'on a que des termes positifs pour $\omega = \omega_0$. On a alors $\underline{Z}_{m,max} = R_0$.

L'allure est tracée ci-contre pour différents facteurs de qualité.

I.C.1) Il suffit de regarder les ordres de grandeur pour la gamme de fréquence annoncée $L\omega < 1 \Omega$, l'impédance de la bobine est donc "faible" et avec un peu de chance négligeable devant R (qu'on va déterminer après).

I.C.2.a) L'allure est cohérente, on retrouve bien le passe-bande caractéristique de $\underline{Z}_m$ auquel on ajoute la constante R . Seule la phase à haute fréquence semble un peu louche (la bobine devrait "remonter" la phase...)

I.C.2.b) En l'occurrence à basse fréquence, puisque $\underline{Z}_m \simeq 0$, on aura $\underline{Z} \simeq R = 7 \Omega$. On voit qu'on peut donc négliger l'impédance $\underline{Z}_L$ "à basse fréquence".

En supposant que la maximum de $R + \underline{Z}_m$ n'est pas loin de celui de $\underline{Z}_m$ (ce qui n'a rien d'évident mais doit être vrai car $R_0 \gg R$), on peut lire que le maximum est en $f_0 = 40 \text{ Hz}$ (Attention l'échelle est logarithmique ici!).

Enfin la valeur du maximum est de $R + R_0 = 34 \Omega$ d'où $R_0 = 27 \Omega$

I.C.3.a) On a

$$|\underline{Z}|^2 = \left| R + \frac{R_0}{1 + jg(x)} \right|^2 = \left| \frac{R_m + jRg(x)}{1 + jg(x)} \right|^2 = \frac{R_m^2 + g^2 R^2}{1 + g^2} = |\underline{Z}|^2$$

I.C.3.b) D'où en cherchant à résoudre l'équation proposée

$$|\underline{Z}|^2 = \frac{R_m^2 + g^2 R^2}{1 + g^2} = RR_m \Rightarrow R_m^2 + g^2 R^2 = RR_m(1 + g^2) \Rightarrow R_m(R_m - R) = R(R_m - R)g^2 \Rightarrow g^2 = \frac{R_m}{R}$$

I.C.3.c) Comme $g(1/x_0) = -g(x_0)$, $1/x_0$ est bien entendu aussi solution puisque le carré fait disparaître le signe.

I.C.3.d) Connaissant la solution $x_0 = x_1$, on a la seconde solution $x_2 = 1/x_0$ et on a alors

$$g^2(x_0) = Q^2 \left(x_0 - \frac{1}{x_0} \right)^2 = Q^2 (x_1 - x_2)^2 = \frac{R_m}{R} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{R_m}{R}}$$

I.C.3.e) Il "suffit" de chercher la valeurs de fréquence qui correspondent à $|\underline{Z}| = \sqrt{RR_m} \simeq 15 \Omega$. On en déduit alors $f_1 \simeq 21 \text{ Hz}$ et $f_2 \simeq 67 \text{ Hz}$. D'où

$$\Delta x = \frac{f_2 - f_1}{f_0} \simeq 1,2 = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{R_m}{R}} \Rightarrow \boxed{Q \simeq 1,9}$$

On alors en déduire les autres constantes

$$\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{k = 4\pi^2 f_0^2 m \simeq 8,6 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{km}{h^2}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 1,8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$R_0 = \frac{(lB)^2}{h} \Rightarrow \boxed{lB = \sqrt{R_0 h} \simeq 7 \text{ T} \cdot \text{m}}$$

I.C.4) Comme je l'ai fait remarqué précédemment, la phase est suspecte, elle continue de descendre au lieu de remonter.

I.D.1) On reprend les équations trouvées en complexe (en négligeant l'inductance comme l'indique l'énoncé)

$$\underline{z}(-m\omega^2 + jh\omega + k) = j l B$$

$$\underline{u} = R \underline{i} + j\omega l B \underline{z} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u} - j\omega l B \underline{z}}{R}$$

D'où en réinjectant l'intensité dans la première équation

$$\underline{z}(-m\omega^2 + jh\omega + k) = j l B = \frac{lB}{R} \underline{u} - \frac{(lB)^2}{R} j\omega \underline{z} \Rightarrow \underline{z} \left(-m\omega^2 + j\omega \left(h + \frac{(lB)^2}{R} \right) + k \right) = \frac{lB}{R} \underline{u}$$

Le premier membre de la relation correspond bien à un oscillateur harmonique amorti avec

$$\boxed{h' = h + \frac{(lB)^2}{R}} \text{ (pour les peu convaincus repassez en réel!)}$$

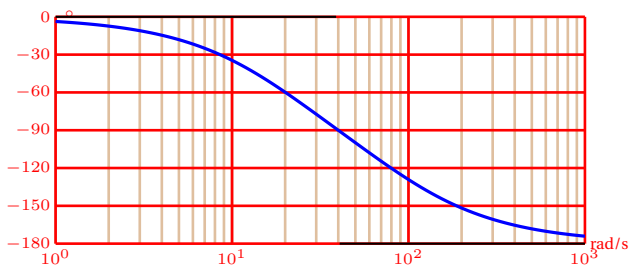
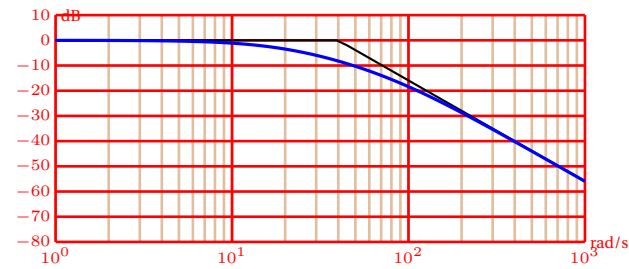
I.D.2) On est plus très loin de la fonction de transfert ...

$$\underline{A} = \frac{\underline{z}}{\underline{u}} = \frac{lB}{R} \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega h' + k} = \frac{lB}{Rk} \frac{1}{1 + j\omega \frac{h'}{k} - \frac{m}{k} \omega^2}$$

On a exactement la forme proposée avec (toujours) $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{1}{\omega_0 Q_t} = \frac{h'}{k}$ soit finalement $Q_t = \frac{\sqrt{km}}{h'}$ (soit sensiblement la même forme qu'avant en remplaçant h par h').

Or en utilisant les expressions de Q et R_0 trouvées précédemment, on a $h' = h + \frac{R_0}{R}$ d'où $\boxed{Q_t = Q \frac{R}{R + R_0}}$

I.D.3) La question me paraît ... bizarrement posée. Je vois mal comme déterminer Q_t avant h' !
Bref ... avec les valeurs trouvées j'ai $h' \simeq 8,8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q_t = 0,39$ (je viens de comprendre avec R et R_0 je pourrais "contourner" h' ...)



I.D.4.a) Première remarque la valeur de Q_t proposée est réconfortant! Pour tracer l'allure, on a un passe-bas d'ordre 2. Il "suffit" de regarder le comportement asymptotique

- à basse fréquence pour $f \ll f_0$, on a $\underline{A} \simeq A_0$. Le gain est donc constant et la phase vaut 0.
- à haute fréquence pour $f \gg f_0$, on a $\underline{A} \simeq \frac{A_0}{-x^2}$. On a donc cette fois une pente à -40dB/dec et une phase qui vaut -180° .

Par ailleurs, comme $Q_t < 0,5$, il n'y a pas de résonance particulière ...

I.D.4.b) Si on revient au comportement asymptotique

- à basse fréquence pour $f \ll f_0$, on a $\underline{A} \simeq A_0 = \frac{lB}{kR}$. C'est donc la raideur qui importe (la masse n'apparaît pas)
- à haute fréquence pour $f \gg f_0$, on a $\underline{A} \simeq \frac{A_0}{-x^2} = -\frac{lB}{mR} \frac{1}{\omega^2}$. C'est donc cette fois la masse qui importe (la raideur n'apparaît pas)=

I.D.4.c) A nouveau, la valeur de Bl proposée me rassure car proche de ce que j'ai trouvé! L'amplitude maximum est obtenue à basse fréquence, on a alors

$$z_0 = A_0 u_0 = \frac{lB}{kR} u_0 < z_{max} \Rightarrow u_0 < u_{max} = \frac{kR z_{max}}{lB} \simeq 4,3 \text{ V}$$

Je ne comprends pas bien pourquoi la masse est rappelée cela m'inquiète un peu!

II.A.1) Le volume de l'enceinte s'écrit $V = V_0 + zS$. Comme on a un gaz parfait en évolution adiabatique réversible, on peut appliquer la loi de Laplace et on a

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma \Rightarrow p = p_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma}$$

II.A.2) En faisant le développement limité proposé par l'énoncé ($(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$), on a déduit

$$p = p_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma} \simeq p_0 \left(1 - \frac{\gamma S}{V_0} z \right)$$

On trouve bien le résultat proposé avec $\alpha = \frac{\gamma p_0 S}{V_0}$

II.A.3) Il y a une différence de pression entre l'intérieur à p et l'extérieur à p_0 soit en réécrivant le PFD appliqué à la membrane

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} + iLB + \underbrace{(p - p_0)S}_{=-\alpha Sz} = -\underbrace{\left(k + \frac{\gamma p_0 S^2}{V_0}\right)}_{=k+k'} - h\dot{z} + iLB$$

Tout se passe comme si l'on avait remplacé k par $k + k'$ avec $k' = \frac{\gamma p_0 S^2}{V_0}$

II.B) Par définition, on a $V_{AS} = \frac{\gamma p_0 S^2}{k}$ et $k' = kA$.

II.C) Comme dit précédemment, il faut remplacer k par $k + k' = k(1 + A)$, donc on aura

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 + A}$$

Bref... j'ai déjà écrit l'équation avant ...

II.D) Encore une fois je ne vais pas réécrire tous les calculs alors qu'ils sont identiques en chan-

geant k en $k + k'$. En particulier, on aura "simplement" $Q'_e = \frac{(k + k')m}{h} = Q_e \sqrt{1 + A}$ et $\omega'_0 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 + A}$

II.E.1) On reprend la même méthode. On a $Z_{max} = R'_0 + R = 29 \Omega$ d'où $R'_0 = 22 \Omega$. Le maximum est en $f'_0 = 70 \text{ Hz}$ et en cherchant $|Z| = \sqrt{RR'_m} = 14 \Omega$, on trouve $f'_1 \simeq 48 \text{ Hz}$ et $f'_2 \simeq 98 \text{ Hz}$. D'où finalement $\Delta x = \frac{f'_2 - f'_1}{f'_0} = 0,7$ et $Q'_e = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{R'_m}{R}} \simeq 2,8$

II.E.2)

$$f_0'^2 = f_0^2(1 + A) \Rightarrow A = \frac{f_0'^2}{f_0^2} - 1 \simeq 2,1 \Rightarrow V_{AS} = AV_0 = 26 \text{ L}$$

et on a (je pense que c'est k' qu'on me demande ...) $k' = kA = 1,8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. A noter que qu'on en déduit alors la section S et le rayon associé (si c'est un disque), $S = 1,28 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ et $R \simeq 6 \text{ cm}$. L'ordre de grandeur paraît raisonnable.

II.E.3) On a

$$\frac{f'_0}{f_0} = 1,75 \quad \frac{Q'_e}{Q_e} = 1,47$$

Les deux devraient être égaux à $\sqrt{1 + A}$ donc ça ne colle pas ... En corrigeant avec le h' on aurait cette fois

$$\frac{Q'_e}{Q_e} = \sqrt{1 + A} \frac{h}{h'} = \frac{f'_0}{f_0} \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{f_0}{f'_0} \frac{Q'_e}{Q_e} = 0,84$$

II.E.4) On aurait aussi

$$\boxed{\frac{R'_0}{R_0} = \frac{h}{h'} = 0,81}$$

Les valeurs paraissent cohérentes (surtout que les mesures de Q ne sont pas très précises avec l'échelle logarithmique...)

III.A.1) Les plans étant considérés comme infinis, tout plan contenant $(M, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie donc $\vec{E}$ est suivant $\vec{e}_z$.

Par ailleurs, il y a invariance par translation selon x et y donc $\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{e}_z}$

III.A.2) Le plan chargé est un plan de symétrie pour la distribution de charge donc aussi pour le champ électrique. On a donc $\boxed{E(-z) = -E(z)}$. J'ai la flemme de faire un dessin c'est comme dans le cours!

III.A.3) On applique le théorème de Gauss sur une boîte de section S avec la hauteur de z à $-z$, on a alors

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E(z)S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & \text{pour } z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \vec{e}_z, & \text{pour } z > -e \\ -\frac{Q}{2\epsilon_0 S} \vec{e}_z, & \text{pour } z < -e \end{cases}}$$

III.A.4) La force subie par la membrane est alors $\boxed{\vec{F} = -Q\vec{E} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \vec{e}_z}$

III.A.5) Pour un condensateur $Q = CU$ d'où

$$\boxed{\vec{F}_e = -\frac{\epsilon_0 S}{2} \frac{U^2}{(z+e)^2}}$$

A noter qu'avec le cours sur l'aimant de levage, on pourrait retrouver cette expression avec un raisonnement analogue $F = \left(\frac{\partial E_{el}}{\partial z} \right)_U = \left(\frac{\partial \frac{CU^2}{2}}{\partial z} \right)_U = \frac{dC}{dz} \frac{U^2}{2}$

III.B.1) A l'équilibre, on a la somme des forces qui est nulle soit

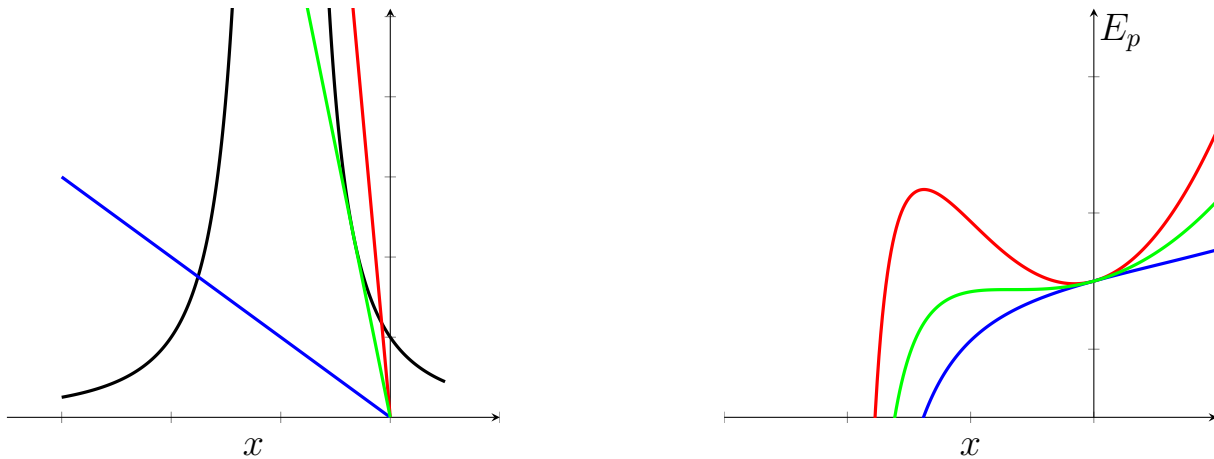
$$-kz_0 - \frac{\epsilon_0 S}{2} \frac{U^2}{(z_0 + e)^2} = 0 \Rightarrow z_0 = -\frac{\epsilon_0 S}{2ke} \frac{U^2}{(z_0 + e)^2} = -\frac{\epsilon_0 S}{2k} \frac{U^2}{(e + z_0)^2} \Rightarrow -Az_0 = \frac{1}{(z_0 + e)^2}$$

où j'ai posé $A = \frac{2k}{\epsilon_0 S U^2}$. A priori, on a une équation d'ordre 3 donc on a au maximum 3 solutions ... Par ailleurs l'équation peut se réécrire (en posant $A' = Ae^3$ et $x = z_0/e$ pour adimensionner parce que c'est mieux!)

$$A'x^3 + 2A'x^2 + A'x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 1/A' = 0$$

Donc on sait que le produit des racine vaut $1/A'$ qui est positif (coefficient d'ordre 0) ... et leur somme vaut -1 (coefficient d'ordre 1). Il y a donc au moins une solution négative (pour que la somme soit négative) et deux solutions de même signe (ou complexe conjugué) pour assurer un produit positif ...

Pour le reste, à part faire une résolution graphique, je ne vois pas trop ce que je peux faire ...



III.B.2) On a tracé le cas limite (en vert) et le cas où A' est "grand" en rouge et A' "petit" en bleu. On voit que si A' est assez grand (donc si U_0 est assez faible), on a deux solutions sur l'intervalle $x \in [-1, 0]$ soit $z \in [-e, 0]$

III.B.3) Pour discuter la stabilité, il faut imaginer une "petite" perturbation. Appelons, z_1 la solution la plus proche de -1 et z_2 l'autre.

Partant de z_1 , si z augmente (diminue), la force de rappel du ressort (la droite) est plus grande (plus petite) que la force attractive électrique donc elle l'emporte et continue à ramener z vers 0 (à repousser z vers -1). Donc la position est instable.

Partant de z_2 , si z augmente (diminue), la force répulsive du ressort (la droite) est plus petite (plus grande) que la force attractive électrique donc elle ne l'emporte pas et le système retourne à l'équilibre. Donc cette position est stable.

Une autre option serait de tracer l'énergie potentielle, avec $E_p(x) = A \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x}$ (voir le graphe ci-dessus)

III.B.4) La valeur limite correspond au cas où les deux courbes sont tangentes au même point soit

$$-A'x_0 = \frac{1}{(1+x_0)^2} \quad \text{en dérivant pour avoir même pente} \quad -A' = \frac{-2}{(1+x_0)^3}$$

En réinjectant la valeur de A dans la première équation, on a alors

$$\frac{-2x_0}{(1+x_0)^3} = \frac{1}{(1+x_0)^2} \Rightarrow -2x_0 = 1+x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{-1}{3} \quad \text{et} \quad A'_m = \frac{2}{(1+x_0)^3} = \frac{54}{8} = 6,75 = \frac{2ke^3}{\varepsilon_0 S U_m^2}$$

d'où finalement

$$U_m = \sqrt{\frac{2ke^3}{\varepsilon_0 S A'_m}}$$

Lorsqu'on a U_m les deux solutions coïncident... et l'équilibre n'est "stable" que d'un côté (cf courbe d'énergie potentielle verte).

III.B.5) AN : $U_m \simeq 4,2 \text{ kV}$ et on a $A_0 = \frac{1}{x_0(1+x_0)^2} = 102$ d'où $U_0 = U_m \sqrt{\frac{A_m}{A}} = 1,1 \text{ kV}$

III.C.1) Il suffit d'écrire le PFD

$$m\ddot{z} = -kz - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U^2}{(z+e)^2} - h\dot{z} \Rightarrow \frac{m}{k}\ddot{z} + \frac{h}{k}\dot{z} + z = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2k} \frac{1}{(z_0+e)^2} = -\frac{1}{A_0} \frac{U^2}{U_0^2} \frac{1}{(z+e)^2}$$

III.C.2) Bon pas le choix ... il va falloir faire des DL en l'occurrence du second membre à l'ordre 1 en $\frac{\xi}{e+z_0}$ et $\frac{u}{U_0}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A_0} \frac{(U_0+u)^2}{U_0^2} \frac{1}{(z_0+\xi+e)^2} &\simeq -\frac{1}{A_0} \frac{1}{(z_0+e)^2} - \frac{1}{A_0} 2 \frac{u}{U_0} \frac{1}{(z_0+e)^2} + 2 \frac{\xi}{z_0+e} \frac{1}{A_0} \frac{1}{(z_0+e)^2} \\ &= z_0 \left(1 + \frac{2u}{U_0} - 2 \frac{\xi}{z_0+e} \right) \end{aligned}$$

où on se souvient qu'on a $-Az_0 - \frac{1}{(z_0+e)^2} = 0$. On a donc finalement .

$$\frac{m}{k}\ddot{\xi} + \frac{h}{k}\dot{\xi} + z_0 + \xi = z_0 \left(1 + \frac{2u}{U_0} - 2 \frac{\xi}{z_0+e} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{m}{k}\ddot{\xi} + \frac{h}{k}\dot{\xi} + \xi \left(1 + \frac{2z_0}{z_0+e} \right) = z_0 \frac{2u}{U_0}}$$

on retrouve la forme proposée avec

$$k' = k \left(1 + \frac{2z_0}{z_0+e} \right) \quad \alpha = \frac{2kz_0}{U_0}$$

AN : $k' = 9,8 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ $\alpha = 5,5 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{V}^{-1}$.

Je ne vois pas trop ce qu'on veut me faire conclure ... que le système est stable? Que le gain est petit?

III.D.1) En passant en complexe, on a

$$\boxed{\underline{A} = \frac{\underline{\xi}}{\underline{u}} = \frac{\alpha}{-m\omega^2 + jh\omega + k'} = \frac{\alpha}{k'} \frac{1}{1 + j\omega \frac{h}{k'} - \frac{m}{k'}\omega^2}}$$

on retrouve toujours un passe-bas d'ordre 2.

III.D.2) On a $m = \mu a S = 2,7 \text{ g}$ d'où $f_0 = 96 \text{ Hz}$.

III.D.3) A basse fréquence, on a

$$\xi_m = \frac{\alpha}{k'} u_m \Rightarrow u_m = \frac{k' \xi_m}{\alpha} = 540 \text{ V}$$

Les voltages mis en jeu sont bien plus importants (d'un facteur 100 voire 1000 ...)