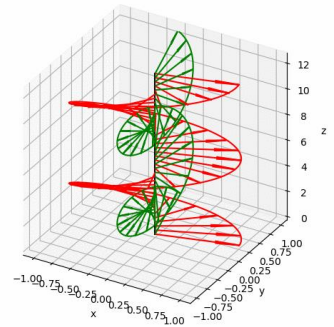


# CHAPITRE OND.1 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE



## Plan du cours

I)	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (en l'absence de toute charge ou courant).....	2
A)	Rappels .....	2
B)	Ondes électromagnétiques planes progressives (OemPP) .....	3
C)	Onde électromagnétique plane progressive harmonique.....	5
II)	Polarisation des ondes OemPPH .....	13
A)	Direction de polarisation d'une OemPPH .....	13
B)	Différents états de polarisation d'une OemPPH.....	13
C)	Cas de la lumière naturelle .....	19
III)	Etude énergétique des ondes électromagnétiques dans le vide.....	21
A)	Rappels .....	21
B)	Densité volumique d'énergie électromagnétique des OemPP.....	22
C)	Puissance rayonnée : vecteur de Poynting pour une OemPPH .....	23
D)	Energie et représentation complexe .....	26

## Au programme

### Extrait du programme officiel : partie 4 : Electromagnétisme

La partie « Propagation et rayonnement » est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.5. Propagation et rayonnement</b>	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique. Relation de dispersion.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Déterminer la relation de dispersion. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ou circulairement.	Reconnaître une onde polarisée rectilignement ou circulairement. <b>Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.</b>

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les principaux aspects liés à la propagation des ondes électromagnétiques (OEM) dans un domaine dépourvu de charges et de courant, d'où l'appellation d'ondes électromagnétiques dans le vide, l'air pouvant de plus être assimilé au vide électromagnétique avec une très bonne approximation (par exemple, étude de la propagation des ondes électromagnétiques (dont la lumière) émises par le soleil à travers l'espace, et qui arrivent (notamment) sur Terre). On ne se préoccupera pas dans ce chapitre de la source des champs électromagnétiques, mais seulement de ce qu'ils deviennent une fois émis

Ce chapitre nous permettra ainsi d'étudier les caractéristiques des ondes électromagnétiques, les aspects énergétiques associés mais aussi la notion de polarisation d'une onde électromagnétique. Certaines de ces notions permettront par ailleurs de faire le lien entre l'électromagnétisme et l'optique.

# I) PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE (EN L'ABSENCE DE TOUTE CHARGE OU COURANT)

## A) Rappels

Nous avons démontré à l'aide des équations de Maxwell les équations de propagation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans les milieux vides de toute charge et de tout courant.

### ■ Onde électromagnétique dans le vide

Ensemble de deux champs ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) se propageant simultanément dans l'espace, potentiellement **dans le vide** (contrairement aux ondes mécaniques ou sonores), tous deux solutions de l'équation (vectorielle) de d'Alembert :

$$\vec{\Delta} \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

### ■ Célérité de l'onde électromagnétique dans le vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On pourra aussi retenir :  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

L'équation de d'Alembert est une équation dite aux dérivées partielles qui se retrouve dans une grande variété de phénomènes ondulatoires. Ainsi, pour la propagation d'une onde mécanique sur une corde de masse linéique  $\mu$  et de tension  $F_0$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$$

$y$  étant le déplacement transversal, supposé faible.

L'équation satisfaite par les champs vectoriels électromagnétiques est formellement la même ; nous pouvons alors écrire une équation scalaire de même type pour chacune des composantes  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  des champs vectoriels  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Toutes les composantes des champs ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) se propagent à la même vitesse  $c$  dans le vide.

### Remarques :

- L'équation de propagation est une équation différentielle du deuxième ordre : sa résolution générale donne une famille de solutions, la solution physique réelle étant déterminée grâce aux conditions initiales et aux conditions aux limites.
- L'équation de d'Alembert ne nous sera utile que dans les cas de propagation, donc avec dépendance en temps, mais tous les champs statiques calculés dans les chapitres précédents en sont solution également tant que l'on est à l'extérieur de la distribution de charge ou de courant. Dans le cadre de l'étude des ondes, nous écarterons en revanche toutes les solutions constantes qui ne peuvent décrire le comportement d'une onde.

### ■ Généralisation aux milieux matériels

L'équation de d'Alembert peut se généraliser en première approche aux milieux transparents, à condition de remplacer la célérité dans le vide  $c$  par la célérité  $c/n$  dans le milieu, où  $n$  est l'indice optique du milieu. En réalité, même les milieux transparents sont partiellement absorbants : décrire de manière précise cette absorption n'est pas possible avec l'équation de d'Alembert et nécessite une modélisation plus fine du comportement du milieu. Par ailleurs, la présence d'un champ électromagnétique engendre un courant électrique dans un milieu conducteur : l'équation de d'Alembert n'est alors plus du tout applicable ; nous étudierons ces différentes situations dans les chapitres suivants.

## B) Ondes électromagnétiques planes progressives (OemPP)

### 1) Caractéristiques d'une onde électromagnétique plane (OemP)

#### a) Rappels et compléments

##### ■ Onde électromagnétique plane (OemP)

Une onde électromagnétique est dite **plane** si à tout instant  $t$  donné, le champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  est le même en tout point perpendiculaire à une direction de propagation  $\vec{u}$  ; l'amplitude et la direction de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont constantes dans tout plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Les champs d'une onde plane ne **dépendent** que du temps et d'une **unique variable d'espace** en coordonnées cartésiennes correspondant à la coordonnée le long de la direction de propagation.

L'onde plane est une **onde à une dimension cartésienne**.

**Exemple** : onde plane se propageant dans la direction  $\vec{u}_x$ . Le champ est le même dans l'ensemble du plan d'onde ; les différentes composantes de  $(\vec{E}, \vec{B})$  ne dépendent donc que de l'abscisse  $x$  de ce plan mais ni de  $y$  ni de  $z$  :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) \text{ et } \vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t)$$

Les **surfaces d'onde** sont alors des **plans d'équations** ' $x = cte$ '.

Chaque composante de l'un des champs vérifie l'équation :  $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

**Simplification de l'équation de d'Alembert pour une onde plane** :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On retrouve l'équation de d'Alembert de la propagation d'une onde sur une corde, justifiant des analogies.

Pour simplifier les écritures, on suppose dans toute la suite de ce paragraphe que le champ électrique garde une direction constante  $\vec{e}_p$  tout au long de la propagation (polarisation rectiligne).

#### b) Forme générale des solutions

**Rappel** : Une onde plane est dite **progressive (OPP)** si elle se propage dans un sens bien déterminé, sans étalement ni déformation.

Une **onde progressive plane** (monodimensionnelle) de célérité  $c$  se propageant sur un axe  $(O, \vec{u}_x)$  dans un milieu non absorbant et non dispersif est de la forme :

Dans le sens des  $x$  croissants :  $\vec{E}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \vec{e}_p = F(x - ct) \vec{e}_p$

Dans le sens des  $x$  décroissants :  $\vec{E}(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \vec{e}_p = G(x + ct) \vec{e}_p$

Où,  $f, g, F$  et  $G$  sont des fonctions quelconques d'une seule variable.

**Remarque** :  $\vec{e}_p$  est un vecteur unitaire qui renseigne sur la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction du champ électrique (cf. plus loin) ... à ne pas confondre avec la direction de propagation. **Même si ce n'est pas toujours le cas, on le suppose pour le moment constant.**

### 2) Structure des ondes planes progressives électromagnétiques (OemPP)

On se place par la suite dans le cadre des **ondes planes progressives dans le sens des  $x$  croissants**, solutions **non statiques** de l'équation de propagation ; alors :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Les solutions  $\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right)$  et  $\vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$  acceptables vérifient nécessairement les équations de Maxwell.

$$\begin{aligned} \text{(MG) dans le vide : } \operatorname{div}(\vec{E}) = \mathbf{0} &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ &\Rightarrow E_x \text{ indépendante de } x. \end{aligned}$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Une composante du champ d'une onde ne pouvant être constante, il faut donc  $E_x = 0$ .

De même pour le champ magnétique : **(MΦ)** dans le vide :  $\operatorname{div}(\vec{B}) = \mathbf{0} \Rightarrow B_x = 0$ .

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une **OPP électromagnétique dans le vide** sont **perpendiculaires à la direction de propagation**.

On dit qu'ils sont **transversaux** et que l'onde est **transverse ou transversale**.

$$\text{(MF) : } \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & (2) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 0 - 0 = 0 & (1) \\ 0 - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & (2) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & (3) \end{cases} \\ &\quad \Downarrow \\ &\vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ ne dépendent que de } x \\ &\text{et sont transverses : } E_x=0 \text{ et } B_x=0 \end{aligned}$$

**Equation (2) :**  $\frac{\partial E_z}{\partial x}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial B_y}{\partial t}\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ; en introduisant la variable  $u = t - \frac{x}{c}$ ,

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial E_z(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dE_z}{du} = -\frac{1}{c} \frac{dE_z}{du} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_y}{\partial t}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial B_y(u)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dB_y}{du} = \frac{dB_y}{du}$$

Soit dans (2) :  $-\frac{1}{c} \frac{dE_z}{du} = \frac{dB_y}{du}$

En intégrant par rapport à la variable  $u$  et en choisissant des constantes d'intégration nulles, qui sans cela donneraient des champs ne correspondant pas à des ondes, on obtient :

$$-\frac{1}{c} E_z = B_y + K \quad \text{soit} \quad E_z = -cB_y$$

De même, avec l'**équation (3)**, on obtient  $\frac{\partial E_y}{\partial x}\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\left(t - \frac{x}{c}\right)$  et on introduit la variable  $u = t - \frac{x}{c}$

D'où  $\frac{1}{c} \frac{dE_y}{du} = \frac{dB_z}{du}$  soit  $E_y = +cB_z$

$$\text{Finalement :} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c} E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \frac{1}{c} E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

On a donc  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 - \frac{1}{c} E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c} E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **orthogonaux** entre eux, en tout point et à tout instant.

D'autre part,  $\|\vec{E}\|^2 = E_y^2 + E_z^2$  et  $\|\vec{B}\|^2 = \frac{1}{c^2} E_z^2 + \frac{1}{c^2} E_y^2$

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$$

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$  est un trièdre rectangle, on peut vérifier qu'il est direct :

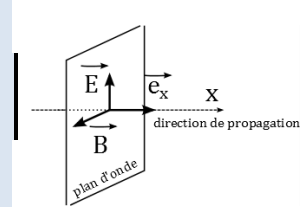
$$\vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_y & B_y \\ E_z & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ +cB_z & B_y \\ -cB_y & B_z \end{vmatrix} = c \begin{pmatrix} B_y^2 + B_z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = cB^2 \vec{e}_x$$

Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$  est donc **direct**, avec  $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$

### ■ Relation de structure de l'onde plane progressive électromagnétique (OemPP) dans le vide

Pour une onde plane de direction de propagation  $x'x$ , de vecteur unitaire  $\vec{e}_x = \vec{e}_{propag} = \vec{u}_k$ , la **relation de structure** liant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_{propag} \wedge \vec{E}}{c}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E} = \vec{B} \wedge c \vec{e}_{propag}}$$



Cette relation implique que

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **transversaux** (orthogonaux à la direction de propagation), l'**onde électromagnétique est transversale**.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **orthogonaux entre eux** et **en phase** l'un avec l'autre.
- Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_{propag})$  est **direct**.
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$

### ■ Remarques

- Cette démonstration longue et technique se fait de manière simple à l'aide de l'outil complexe (cf. suite).
- Cette relation met en évidence le couplage entre les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui ne peuvent se propager l'un sans l'autre : il n'existe pas d'onde « électrique » ni d'onde « magnétique », mais seulement des ondes électromagnétiques.
- Ces propriétés sont vérifiées par toute OemPP, mais faux pour les sommes d'OemPP se propageant en sens différents, et en particulier pour les ondes stationnaires.

## C) Onde électromagnétique plane progressive harmonique

### 1) Présentation et caractéristiques des OemPPH

#### a) Définition d'une OemPPH

#### ■ Onde électromagnétique plane progressive harmonique (OemPPH)

L'onde électromagnétique plane et progressive sera dite harmonique ou monochromatique (OemPPH ou OemPPM) ou sinusoïdale si chacune des composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **sinusoïdales**, avec une double périodicité spatiale et temporelle, de **période temporelle T** et de **longueur d'onde λ**, de la forme :

$$f(x, t) = f_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

Pour une OemPPH se propageant dans la direction  $+\vec{u}$  avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  le vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation, le champ électrique  $\vec{E}$  peut s'écrire sous les formes réelle et complexe suivantes :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k\vec{u}\vec{r})} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \\ E_{0z} e^{j\varphi_z} \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \vec{E} = \Re(\underline{\vec{E}}) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

#### b) Intérêt des OemPPH

La théorie de Fourier permet de montrer que le champ d'une onde quelconque est toujours décomposable en une somme de champs d'OemPPH de différentes fréquences (constituant le spectre temporel de cette onde) et de

différentes directions et vecteurs d'onde (constituant ce que l'on généralise comme le spectre spatial de l'onde). On pourra écrire le champ total sous la forme symbolique suivante (la sommation étant en réalité généralement continue) :

$$\underline{\vec{E}} = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} \underline{\vec{E}}_{\vec{u},\omega} = \sum_{\vec{u}} \sum_{\omega} \underline{\vec{E}}_{0,\vec{u},\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Les équations de Maxwell dans le vide étant linéaires, nous allons étudier principalement le comportement et les caractéristiques des OEMPPH.

## 2) Représentation complexe des équations de Maxwell pour les OemPPH

### ■ Exemple introductif

En écrivant le champ complexe sous la forme  $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0 e^{j(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} \vec{e}_p$

**Calcul des différentes dérivées :**

Dérivées temporelles :  $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}}$

$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$

Dérivées spatiales :  $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik_x \underline{\vec{E}}$

$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial y} = -ik_y \underline{\vec{E}}$

$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} = -ik_z \underline{\vec{E}}$

ou plus généralement  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} \leftrightarrow -i\vec{k}$

**Expression de la divergence :**

$$\text{Div}(\underline{\vec{E}}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

$$= -ik_x E_x - ik_y E_y - ik_z E_z = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k_x^2 \underline{\vec{E}}$$

**Attention !** Deux conventions différentes sont possibles pour l'écriture complexe du champ !

En écrivant le champ complexe sous la forme  $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = E_0 e^{j((k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t)} \vec{e}_p$

Dérivées spatiales :  $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = ik_x \underline{\vec{E}}$

ou plus généralement  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} \leftrightarrow +i\vec{k}$

Dérivées temporelles :  $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}}$

### ■ Propriétés usuelles associées à la notation complexe $f(M, t) = f_m \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi))$

- la dérivation par rapport à  $t$  est une multiplication par  $i\omega$   $\frac{\partial}{\partial t} = (\times i\omega)$
- la dérivation par rapport à  $x$  est une multiplication par  $-ik_x$   $\frac{\partial}{\partial x} = (\times (-ik_x))$
- En généralisant, en coordonnées cartésiennes,**  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} \leftrightarrow -i\vec{k}$
- Pour tout champ vectoriel, les opérateurs différentiels peuvent s'écrire simplement :

$$\text{div}(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} \leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} \leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} (\text{div}(\underline{\vec{E}})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}}) \leftrightarrow -k^2 \underline{\vec{E}}$$

### ■ Propriétés usuelles associées à la notation complexe $f(M, t) = f_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$

- la dérivation par rapport à  $t$  est une multiplication par  $-i\omega$   $\frac{\partial}{\partial t} = (\times -i\omega)$
- la dérivation par rapport à  $x$  est une multiplication par  $ik_x$   $\frac{\partial}{\partial x} = (\times ik_x)$

- En généralisant, en coordonnées cartésiennes,  $\overline{\text{grad}} = \vec{\nabla} = i\vec{k}$
- Pour tout champ vectoriel, les opérateurs différentiels peuvent s'écrire simplement :

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} \\ \text{rot}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} \\ \Delta \vec{E} &= \vec{\nabla} (\text{div}(\vec{E})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \leftrightarrow -k^2 \vec{E}\end{aligned}$$



Il faut **impérativement** conserver la même convention tout au long du calcul.

Quelle que soit la notation complexe retenue, on obtient les équations de Maxwell suivantes pour une propagation dans le vide d'ondes électromagnétiques.

### ■ Equations de Maxwell dans le vide en notation complexe

**Maxwell-Gauss :**  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

**Maxwell-Faraday :**  $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$

**Maxwell-Flux :**  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

**Maxwell-Ampère :**  $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$

**Remarque :** les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Flux en complexe permettent de retrouver très facilement que l'onde électromagnétique est transverse (les deux champs sont orthogonaux à la direction de propagation qui est aussi celle du vecteur d'onde), tandis que les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère donneront accès à la relation de structure.

## 3) Relation de dispersion

On rappelle les principales grandeurs caractéristiques des OPPH :

Période temporelle :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  Période spatiale ou longueur d'onde dans le vide :  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Nous allons retrouver la relation de dispersion liant les grandeurs spatiales et temporelles.

### ■ Avec la notation réelle

#### Exercice 1. relation de dispersion

Considérons une OPPH de la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$ . Etablir à partir de l'équation de d'Alembert la relation entre  $\omega$  et  $k$ , dite relation de dispersion.

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à  $x$ , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ilci,  $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  avec  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve  $-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$  soit en choisissant des grandeurs positives :  $k = \frac{\omega}{c}$

Considérons une OemPPH quelconque de champ  $\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_z) \end{cases}$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow$$

Pou la composante selon  $x$  :

$$\Delta(E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x)) + \frac{\omega^2}{c^2} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x) = 0$$

$$\text{Avec } \Delta(E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x)) = \Delta\left(\frac{E_{0x} \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_x)}{E_x}\right) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$$\text{Or } \frac{\partial E_x}{\partial x} = k_x E_{0x} \sin(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = k_x^2 E_{0x} \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_x)$$

De même,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = k_y^2 E_{0x} \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_x) \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = k_z^2 E_{0x} \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_x)$$

soit

$$\left(\frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{=k^2}\right) E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x) + \frac{\omega^2}{c^2} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_x) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On obtiendrait les mêmes résultats avec les deux autres composantes.

## ■ Relation de dispersion

Conséquence de l'équation de propagation de D'Alembert :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Soit en choisissant des grandeurs positives :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT \quad v_\varphi = \omega/k = c$$

(relation vérifiée pour toutes les ondes planes harmoniques, qu'elles soient progressives (OPPH) ou stationnaires).

**Remarque :** La vitesse de phase étant toujours égale à la célérité de la lumière, et donc indépendante de la pulsation  $\omega$ , la propagation d'une OemPPH dans le vide est un **phénomène non dispersif**.

## ■ Avec la notation complexe

### Exercice 2. OemPPH et notation complexe

Considérons une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un vecteur  $\vec{u}_k$  quelconque. On note dans le cas général, avec  $\vec{k} = k\vec{u}$ , et les 6 constantes  $E_{0i}$  et  $\varphi_i$  telles que  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}_k$  et  $\vec{k}$  :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z) \end{cases}$$

Donner l'expression du champ électrique complexe associé  $\underline{\vec{E}}$ , en faisant apparaître l'amplitude complexe  $\underline{E}_0$  à expliciter.

On se place dans le cas où  $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$ . Etablir la relation de dispersion à partir des champs complexes

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} E_{0x} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z) \end{cases} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \quad \text{où } \underline{E}_0 = \begin{cases} E_{0x} \exp i \varphi_x \\ E_{0y} \exp i \varphi_y \\ E_{0z} \exp i \varphi_z \end{cases}$$

**Obtention de la relation de dispersion :**

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées spatiales : } \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik \underline{\vec{E}} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{\vec{E}} = -k^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$



Dérivées temporelles :  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} = i\omega E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$        $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} = -\omega^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert :  $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 \vec{E})$$

Soit  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

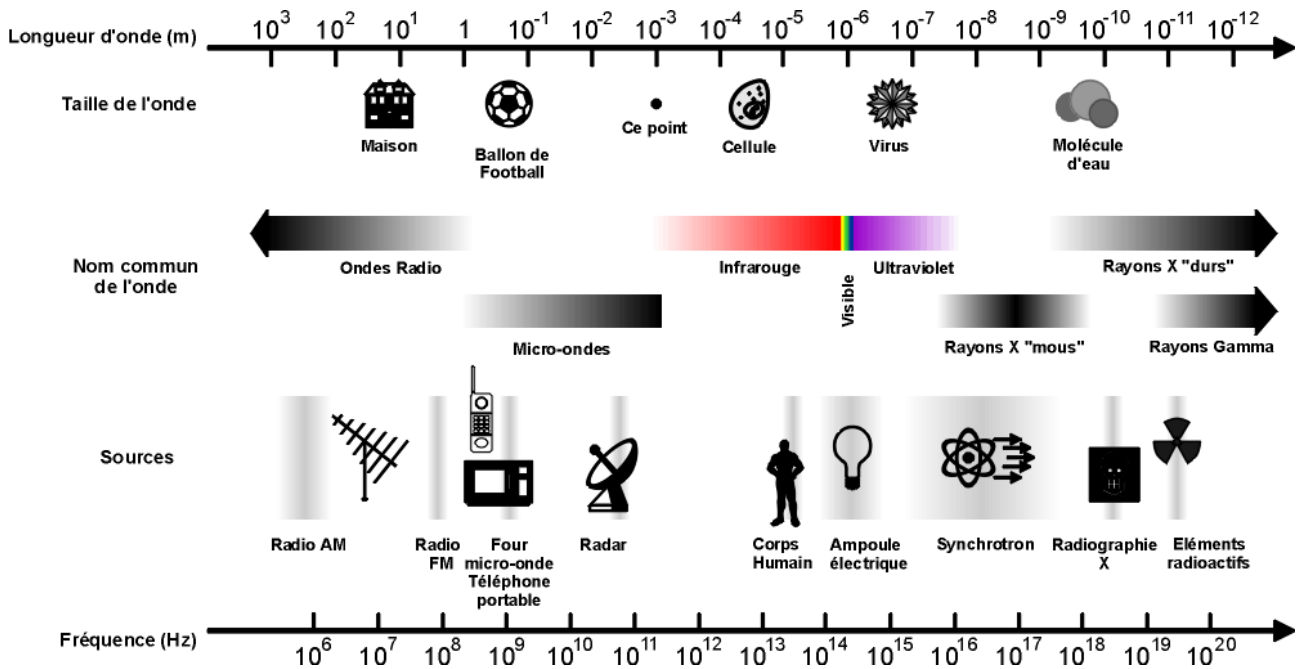
$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

#### 4) Spectre des ondes électromagnétiques

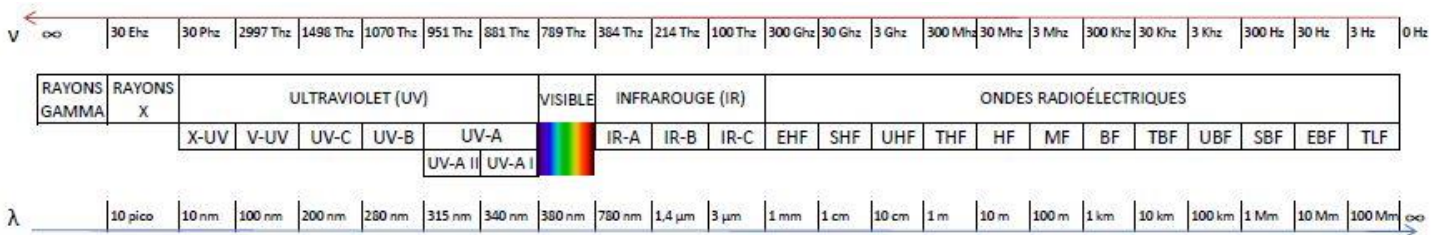
Les équations de Maxwell ont permis d'établir l'unité profonde des phénomènes électromagnétiques sur une **très large gamme de longueurs d'onde** (une vingtaine d'ordres de grandeur) dépendant de la fréquence d'oscillations des charges électriques au niveau des émetteurs d'OEM. Selon la plage de valeurs considérées, la nature de l'onde varie, allant des ondes radiofréquences (ondes radio) aux rayonnements gamma en passant par la fenêtre très restreinte du domaine visible. Les limites entre les différents domaines, pas toujours clairement définies, sont d'origines essentiellement historiques, physiologiques ou technologiques.

Il est nécessaire de retenir l'ordre dans lequel apparaissent les différents domaines du spectre électromagnétique.

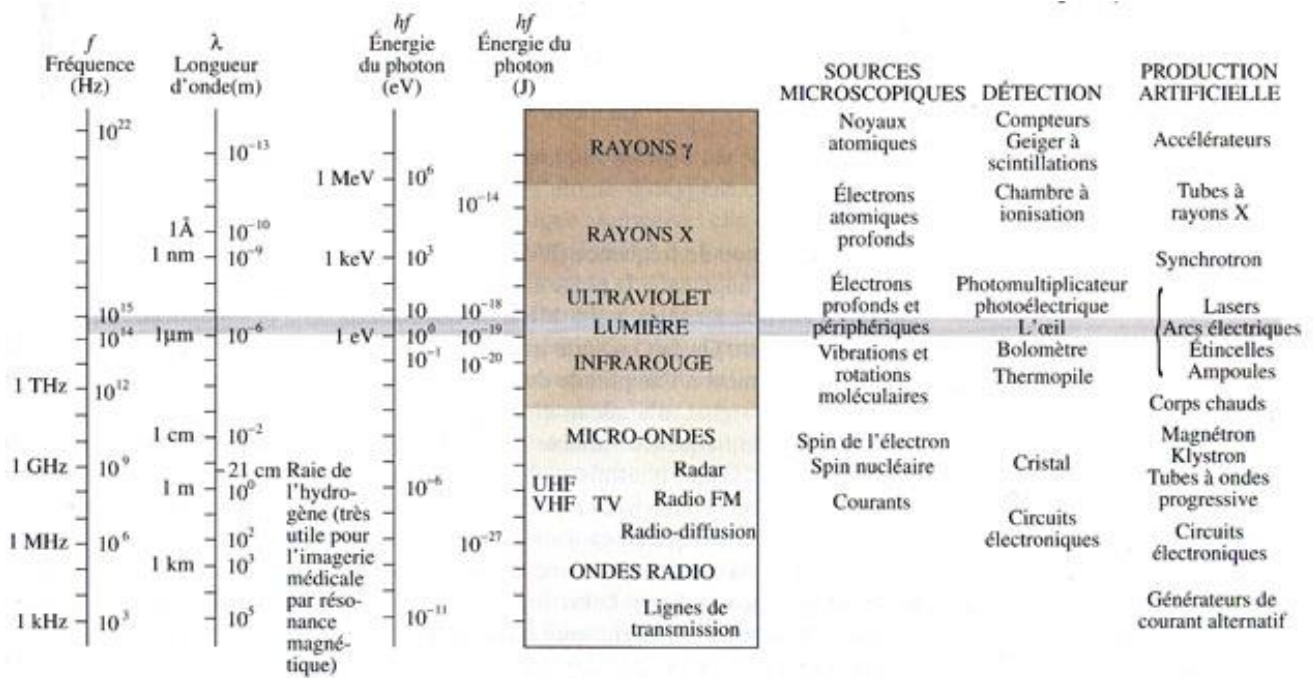
##### ■ Principaux domaines



→ Un peu plus de détail ci-dessous sur les bandes à l'intérieur de certains domaines et encore plus de détails [ici](#).



■ Compléments sur les utilisations et les modes de production (E. Thibierge et J. Le Berre)



Le domaine des télécommunications fait largement usage des ondes électromagnétiques. Les choix de bande de fréquences affectées aux diverses applications sont d'une part historiques (un nouveau système ne doit pas perturber un dispositif déjà existant), mais résultent également de critères techniques : en particulier, la longueur d'onde joue un rôle critique dans le fonctionnement des systèmes utilisant des antennes. Notons que l'affectation d'une bande de fréquence à un type d'application est du ressort de la loi (rôle de l'Arcom qui attribue les fréquences dédiées à l'audiovisuel), car elle est considérée comme un partage du domaine public. Par exemple,

- Le transport des signaux radiophoniques utilise des ondes radio, dont la fréquence porteuse est de l'ordre de la centaine de mégahertz pour la bande FM : la fréquence « 94.0 » de France Culture indique une porteuse de fréquence 94,0 MHz ;
- la TNT exploite un domaine spectral de fréquences supérieures, comprises entre 470 et 790 MHz ;
- la téléphonie mobile utilise des ondes de fréquences encore plus élevées, de l'ordre du gigahertz (109 Hz), le réseau 5G utilise par exemple des fréquences allant de 3,46 à 3,80 GHz ;
- le réseau WiFi repose lui sur l'utilisation de deux bandes de fréquences, la première autour de 2,4 GHz et la deuxième à un peu plus de 5 GHz.

Les rayons X et rayons  $\gamma$  sont qualifiés de rayonnements ionisants, c'est-à-dire à même d'arracher un électron à un atome. L'emploi de rayons X est l'une des principales techniques d'imagerie médicale, également utilisée pour l'étude de la matière à l'échelle atomique (structure cristalline, etc). Les rayons  $\gamma$  sont produits par la désintégration de noyaux radioactifs. Ils sont également exploités en imagerie médicale et en spectroscopie, mais peuvent provoquer de graves lésions (cancers, altération de l'ADN, etc.)

Radio	Fréquence (Mhz)	Emetteur
FRANCE CULTURE	94,0	ROUEN - GRAND-COURONNE - 76 - Seine-Maritime
RADIO RC2	94,4	ROUEN - CANTELEU - 76 - Seine-Maritime
MOUV'	95,8	ROUEN - CANTELEU - 76 - Seine-Maritime
FRANCE INTER	96,5	ROUEN - GRAND-COURONNE - 76 - Seine-Maritime

Type d'ondes	Production	Quelques utilisations
<b>Électrocinétique</b>	alternateur oscillateurs électroniques	secteur domestique 50 Hz ( $\lambda = 6000$ km) électronique BF (<100 kHz)
<b>Ondes hertziennes</b>	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone fixe ( $\lambda \approx$ qqs km) radio-télé ( $\lambda$ de 10 cm à 1 km) radio AM : 1 MHz ( $\lambda \approx 300$ m) radio FM : 100 MHz ( $\lambda \approx 3$ m)
<b>Micro-ondes (hyperfréquences)</b>	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone GSM 900 MHz ( $\lambda = 33$ cm) four $\mu$ -ondes 2,45 GHz ( $\lambda = 12,2$ cm) radar : $\lambda \approx$ cm soit 100 GHz
<b>Infrarouge</b>	vibration de la matière absorption $\Rightarrow T$ augmente (sensation de chaleur)	diodes laser pour fibres optiques chauffage (radiateur, lampe IR,...) ou caméra thermique (la nuit) $\approx 10^{14}$ Hz analyse spectrométrique (OH, C=C,...)
<b>Lumière visible</b>	transitions électroniques des atomes (lampe spectrale, à incandescence, laser,...)	vision humaine : réactions photochimiques dans les yeux ( $0,4 < \lambda < 0,8$ $\mu$ m) photographie synthèse chlorophyllienne
<b>Ultraviolet</b>	transitions électroniques des atomes	provoque des réactions chimiques (halogénéation des alcanes) stérilisation bronzage (Soleil, lampe UV) $\approx 10^{16}$ Hz présent dans les lampes Hg
<b>Rayons X</b>	métal bombardé par des électrons de grande énergie cinétique (tube à rayons X)	pouvoir pénétrant important (protection au Pb) : ( $10^{-12}$ m $< \lambda < 10^{-8}$ m) radiographie (du squelette) radiothérapie médicale diffraction par la matière cristalline
<b>Rayons <math>\gamma</math></b>	radioactivité réactions nucléaires rayons cosmiques	très dangereux (photon $E > \text{MeV}$ ) destruction de tumeurs

## 5) Obtention de la relation de structure à partir des champs complexes

### Exercice 3. Démonstration de la relation de structure

Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe.

En déduire la relation de structure entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Equation de Maxwell-Faraday :  $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$  soit  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$\vec{k}$  et  $\omega$  étant des constantes réelles, cette relation reste vraie pour les champs réels (linéarité de la partie réelle) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De plus, avec  $\vec{k} = k \vec{u}_k$  et la relation de dispersion  $\omega = kc$  :  $\vec{B} = \frac{k \vec{u}_k \wedge \vec{E}}{kc}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Cette relation étant vraie pour toute OPPH, elle est également vraie pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur  $\vec{u}_k$ .

De la même manière, équation de Maxwell-Ampère :  $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$  donne pour les champs réels :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{E} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge c \vec{u}_k}$$

#### ■ Relation de structure d'une OPP

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

vrai pour toute OPP, mais faux pour les sommes d'OPP se propageant en sens différents

#### ■ Relation de structure pour une OemPPH

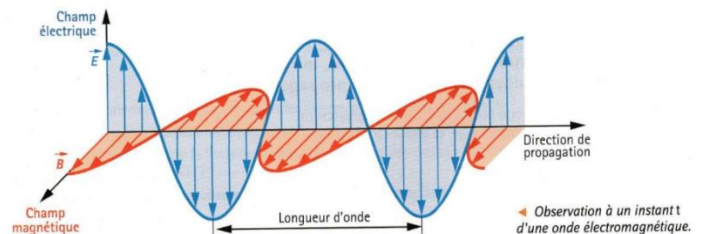
Dans le cas particulier d'une OPPH, cette relation prend la forme

$$\vec{B} \underset{OemPP}{=} \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \underset{OemPPH}{=} \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$\vec{E} \underset{OemPP}{=} -c \vec{u}_k \wedge \vec{B} \underset{OemPPH}{=} -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

On retrouve bien :

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont transversaux
- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux entre eux et en phase l'un avec l'autre.
- Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_{propag})$  est direct.
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$



**Remarque :** il est important d'avoir à l'esprit que pour une onde électromagnétique,  $B = \frac{E}{c}$ . Ce résultat sera très utile pour comparer les deux termes de la force de Lorentz pour une particule soumise au champ électromagnétique d'une onde. En effet, ce rapport s'écrit :

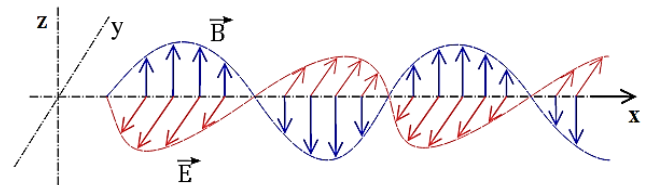
$$\frac{F_{mag}}{F_{él}} \sim \frac{qvB}{qE} \sim \frac{v}{c}$$

Pour des particules non relativistes, dans la force de Lorentz due à un champ électromagnétique qui se propage, la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

#### Exercice 4. Structure des ondes planes progressives électromagnétiques



a) On donne l'allure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Le champ électrique est contenu dans un plan horizontal tandis que le champ magnétique est dans le plan vertical. Trouver le sens de propagation de l'onde.



b) Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane est donné par :  $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$ .

Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

Cf. relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$ , d'où propagation vers les x décroissants.

Variable  $t - \frac{x}{c}$  : propagation selon +  $\vec{e}_x$  puis relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$

## II) POLARISATION DES ONDES OEMPPH

### A) Direction de polarisation d'une OemPPH

#### 1) Définition

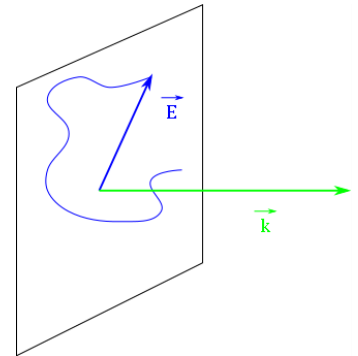
Soit une OemPPH électromagnétique, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le vide dans la direction  $\vec{u}_k$ , de vecteur d'onde

$$\vec{k} = k\vec{u}_k = \frac{\omega}{c}\vec{u}_k$$

#### ■ Direction de polarisation d'une OemPPH

Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est celle du champ électrique.

Etudier la polarisation de l'onde consiste à suivre en un point donné de l'espace l'évolution de la direction du vecteur champ électrique au cours du temps dans le plan transverse (plan d'onde).



**Attention !** Ne pas confondre direction de polarisation et direction de propagation, les deux sont orthogonales.

$\vec{k} = k\vec{u}_k$  donne la direction de propagation

$\vec{E} = E\vec{e}_p$ : donne la direction de polarisation

La polarisation est liée aux propriétés quantiques (spins) de photon. Nous nous limiterons par la suite aux cas les plus élémentaires, sans rechercher de lien avec ces propriétés quantiques.

La polarisation de la lumière a de nombreuses applications, du cinéma 3D aux écrans à cristaux liquides (LCD) en passant par la couleur de certains minéraux (olivine), les lunettes pour les marins ou la modulation de l'énergie d'un faisceau de lumière laser femtoseconde infrarouge. L'œil humain est incapable de percevoir la polarisation de la lumière, mais de nombreux animaux - insectes, crustacés, oiseaux, reptiles, etc. – la perçoivent ; c'est une propriété qui ne varie pas avec la luminosité et qui est donc utile à ces animaux pour se repérer et s'orienter<sup>1</sup>.

#### 2) Expression générale du champ électrique

En choisissant une direction de propagation  $\vec{u}_k = \vec{u}_z$  : le champ électrique d'une OemPPH peut s'écrire sous la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{j\varphi_x}e^{j(\omega t - kz)} \\ E_{0y}e^{j\varphi_y}e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{par un choix judicieux} \\ \text{de l'origine de } t}}{=} \begin{pmatrix} E_{0x}e^{j(\omega t - kz)} \\ E_{0y}e^{j\Delta\varphi}e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \Delta\varphi = (\varphi_y - \varphi_x)$$

$$\text{Ou encore } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = \underbrace{E_{0x} \cos(\omega t - kz)}_{E_x} \vec{u}_x + \underbrace{E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)}_{E_y} \vec{u}_y$$

La polarisation de l'onde électromagnétique, donc le comportement de l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$ , dépend des valeurs de  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  et  $\Delta\varphi$ .

### B) Différents états de polarisation d'une OemPPH

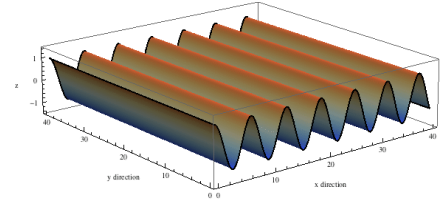
Pour définir la polarisation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique, on se place toujours dans un plan de cote  $z_0$  donnée.

<sup>1</sup> Dans la nature, la surface de l'eau est l'une des principales sources de lumière polarisée. Or des surfaces artificielles lisses et sombres, telles que les carrosseries métalliques des voitures, les routes asphaltées, les façades d'immeubles en verre, les panneaux photovoltaïques ou les films de plastique utilisés pour les serres agricoles, polarisent fortement la lumière et sont donc confondues avec des surfaces aquatiques (Pour la Science). Cela constitue un piège écologique pour ces animaux.



## 1) Polarisation rectiligne

Une onde OEM possède une polarisation rectiligne si le **vecteur champ électrique de l'onde garde au cours du temps une direction constante** :  $\vec{e}_p = cte$ .



Nous pouvons choisir la direction de l'Oem polarisée colinéaire à l'axe  $Oy$ , l'expression de ce champ est alors de la forme :

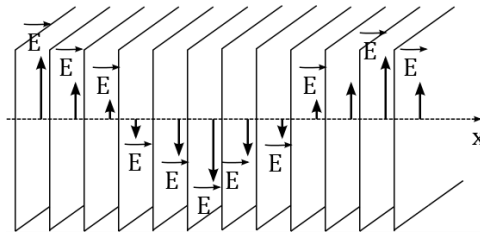
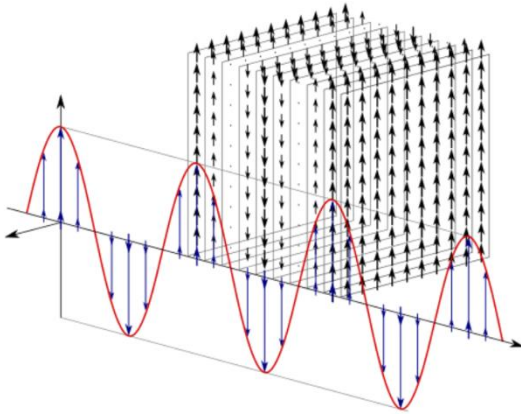
$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y$$

avec

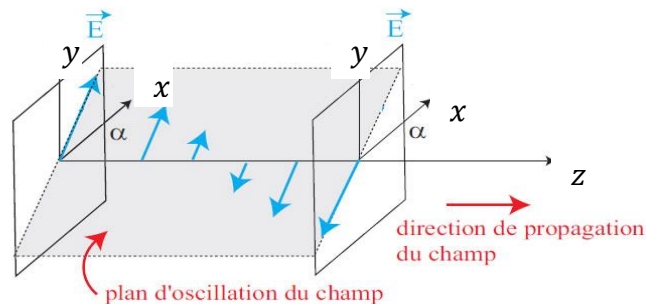
$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) = \text{Re}(\underline{E}_{0y} e^{j(\omega t - kx)})$$

Un observateur « voit » simplement l'extrémité du champ électrique osciller le long de l'axe  $Oy$ .

**Plan de polarisation** de l'onde lumineuse : plan formé par le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .



**Représentation d'une onde polarisée rectilignement** ; les flèches représentent le champ électrique  $\vec{E}$ . La direction de  $\vec{E}$  est constante, et la direction et l'amplitude de  $\vec{E}$  sont constants dans tout plan perpendiculaire à la direction de propagation



Plus généralement, avec  $\vec{E} = \underbrace{E_{0x} \cos(\omega t - kz)}_{E_x} \vec{u}_x + \underbrace{E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)}_{E_y} \vec{u}_y$ , dans le cas où  $\Delta\varphi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$ ,

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{vmatrix} = \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} E_{0x} \\ (-1)^p E_{0y} \\ 0 \end{vmatrix} = \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  se déplace le long du vecteur  $\begin{vmatrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{vmatrix}$  de manière sinusoïdale : expression générale d'une OemPPH polarisée rectilignement.

On peut faire apparaître l'angle  $\alpha$  que forme le vecteur  $\vec{E}$  avec l'axe  $(Ox)$  ainsi que sa norme  $E_0$  :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{vmatrix} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pour que le champ  $\vec{E}$  d'une OemPPH soit **polarisé rectilignement** et donc possède une direction constante au cours du temps, il faut que **ses deux composantes** dans le plan de phase oscillent **en phase ou en opposition de phase**, soit  $\Delta\varphi = 0$  ou  $\Delta\varphi = \pi$ .

**Remarque :** en choisissant judicieusement les axes  $Ox$  et  $Oy$ , il est toujours possible de se ramener à l'expression précédente avec une unique composante.

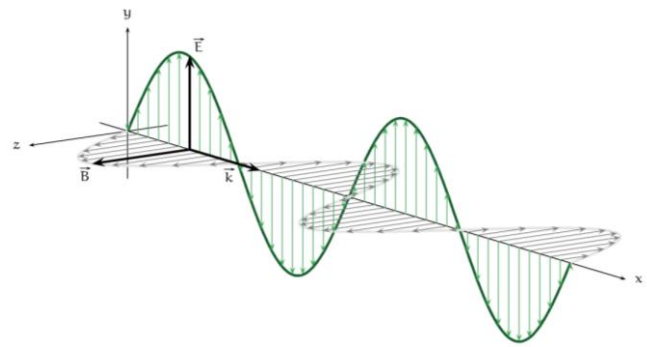
**Exercice 5. OemPPH et polarisation**

Ecrire les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pour une OemPPH

1) Se propageant selon  $\vec{u}_x$  et polarisée rectilignement selon  $Oz$

2) Représentée sur le schéma ci-contre (Animation [ici](#))

3) Se propageant selon  $\vec{u}_z$  et polarisée rectilignement à  $45^\circ$  de l'axe ( $Ox$ ).



1) On a  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$

Relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$$

2) L'onde représentée est un exemple d'OEMPPH polarisée rectilignement selon  $y$  et se propageant selon  $+x$ .

Son champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

Son champ magnétique s'écrit, à l'aide de la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$$

En accord avec la représentation de  $\vec{B}$  dans la direction ( $Oz$ )

$$3) \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{matrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{matrix} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{matrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{matrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

*propagation selon  $\vec{u}_z$*       *polarisation rectiligne à  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$*       *propagation selon  $\vec{u}_z$*

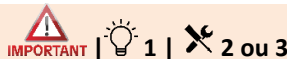
$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(\omega t - kz) (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = E_0' \cos(\omega t - kz) (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

Son champ magnétique s'écrit, à l'aide de la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) (-\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \frac{E_0'}{c} \cos(\omega t - kz) (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

**Exercice 6. OemPPM polarisée**



1) On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant suivant l'axe  $Oz$  et polarisée suivant  $Ox$ . Représenter pour cette onde les vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{\Pi}$ .

2) Identifier les directions de propagation et de polarisation des champs électriques ci-dessous, ainsi que l'équation du plan d'onde pour la question a) seulement. Exprimer le champ magnétique associé.

a)  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

c)  $\vec{E} = -E_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{e}_z$

b)  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$

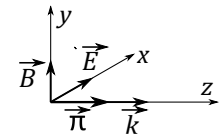
d)  $\vec{E} = A \cos(\omega t - kx) (\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

$$e) \vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(y+z)\right) \vec{e}_x$$

1) Cf. schéma ci-contre (rappel :  $\vec{B} = \frac{e_z \wedge \vec{E}}{c}$   $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$ )

2) Le champ magnétique est déterminé grâce à la relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Remarque : le calcul de  $\vec{B}$  peut être fait composante par composante (linéarité)



	polarisation	propagation	plans d'onde	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$
a.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_y$	$\vec{e}_k = \vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ où $B_0 = \frac{E_0}{c}$
b.	$\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_x}{\sqrt{2}}$ Polarisation à 45° des vecteurs $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_x$	$\vec{e}_k = \vec{e}_z$	$z = cte$	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \right)$
c.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_z$ (le signe – ne change rien, on s'intéresse à la direction)	$\vec{e}_k = -\vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = -\frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{e}_z$
d.	$\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$	$\vec{e}_k = \vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kx) \frac{\vec{e}_z - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = A\sqrt{2}/c$
e.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_x$	$\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$	$y + z = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\dots) \frac{-\vec{e}_z + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = E_0/c$

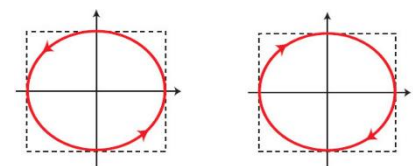
Question d) :  $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\|\vec{e}_x + \vec{e}_y\|}$  avec  $\|\vec{e}_x + \vec{e}_y\| = K = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$  soit  $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$

Question e) :  $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(y+z)\right) \vec{e}_x = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_x$  d'où  $\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$  or par définition  $\vec{k} = k\vec{e}_k$  d'où  $\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$

## 2) Polarisation circulaire

Une onde électromagnétique possède **une polarisation circulaire** si, en tout point M, le champ électrique  $\vec{E}$  possède une **norme constante** ; son extrémité décrit alors un cercle.

On parle de **polarisation circulaire gauche** si le cercle est parcouru dans le **sens trigonométrique** autour du vecteur d'onde  $\vec{k}$ , soit pour un observateur qui verrait arriver l'onde vers lui, et de **polarisation circulaire droite** pour une rotation dans le **sens horaire**



$\varphi = \pi/2$   
circulaire gauche

$\varphi = 3\pi/2$   
circulaire droite

### ■ Condition d'obtention d'une polarisation circulaire

On considère à nouveau l'onde de la forme  $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\omega t - kz = \Phi}{=} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\Phi) \\ E_{0y} \cos(\Phi + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

L'onde est polarisée circulairement si  $\|\vec{E}\| = cte$  soit  $\frac{d\|\vec{E}\|^2}{dt} = 0$ , or

$$\frac{d\|\vec{E}\|^2}{dt} = 2\vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = 2(E_{0x} \cos(\Phi) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\Phi + \Delta\varphi) \vec{u}_y) \cdot (-\omega E_{0x} \sin(\Phi) \vec{u}_x - \omega E_{0y} \sin(\Phi + \Delta\varphi) \vec{u}_y)$$

$$\frac{d\|\vec{E}\|^2}{dt} = -2\omega(E_{0x}^2 \cos(\Phi) \sin(\Phi) + E_{0y}^2 \cos(\Phi + \Delta\varphi) \sin(\Phi + \Delta\varphi)) = -\omega(E_{0x}^2 \sin(2\Phi) + E_{0y}^2 \sin(2\Phi + 2\Delta\varphi))$$

On a  $\forall t$  et  $\forall z$ ,  $\frac{d\|\vec{E}\|^2}{dt} = 0$  ssi  $\forall \Phi$ ,  $E_{0y}^2 \sin(2\Phi + 2\Delta\varphi) = -E_{0x}^2 \sin(2\Phi)$  soit ssi



- les deux sinus ont la même amplitude :  $E_{0x}^2 = E_{0y}^2$
- et les sinus sont en opposition de phase, soit  $2\Delta\varphi = \pi [2\pi] = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ , ou encore  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$   
 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

L'onde électromagnétique est **polarisée circulairement** ssi

- Les deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde ont **même amplitude**
- Ces deux composantes sont en **quadrature de phase, avec  $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$**

**Exercice 7. Polarisation circulaire**

Ecrire l'expression d'une OPPM se propageant selon  $-\vec{u}_y$  et polarisée circulaire droite ou gauche.

$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - ky) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - ky + \varphi(t)) \end{pmatrix}$  est la forme générale de l'onde. Une onde polarisée circulairement doit

décrire un cercle dans le plan orthogonal à la direction de propagation, ce qui impose que  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ . Ensuite, il s'agit que les composantes selon les axes y et z soient en quadrature de phase, ce qui impose que  $\varphi = \pm\pi/2$ . On en déduit les expressions des deux types d'ondes circulaires droite ou gauche.

$$\vec{E}_{droite}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - ky) \\ E_z = -E_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_{gauche}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - ky) \\ E_z = E_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix}$$

**Exercice 8. Nature d'ondes électromagnétique**

Parmi les champs électriques suivants, lesquels sont ceux d'une OPPM polarisée rectilignement se propageant dans le « vide » ? préciser direction de propagation et de polarisation

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

$$\vec{E}(M, t) = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z)$$

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(M, t) = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{e}_z)$$

- 1)  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_x$  : les OemPPH dans le vide sont nécessairement transverses, l'expression ne peut convenir.
- 2)  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$  : OK : OemPPH polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_y$  et se propageant selon  $-\vec{e}_x$
- 3)  $\vec{E}(M, t) = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z) = E_0 \cos(\omega t - kx) (\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

OemPPH polarisée rectilignement à 45° et se propageant selon  $+\vec{e}_x$  (on a bien une onde transverse)

- 4)  $\vec{E}(M, t) = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{e}_z) = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}) \vec{e}_z)$

OemPPH polarisée circulairement (polarisation circulaire gauche) se propageant selon  $+\vec{e}_x$

Pour une polarisation circulaire à un instant  $t$  donné, le champ électrique s'enroule comme une hélice autour de l'axe de propagation de l'onde.

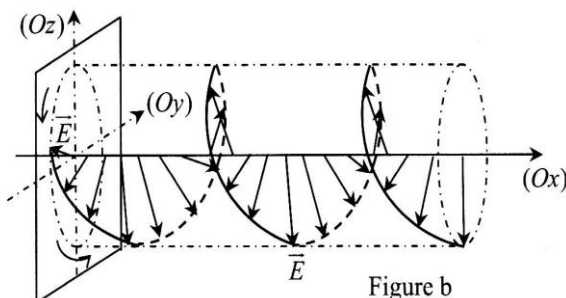
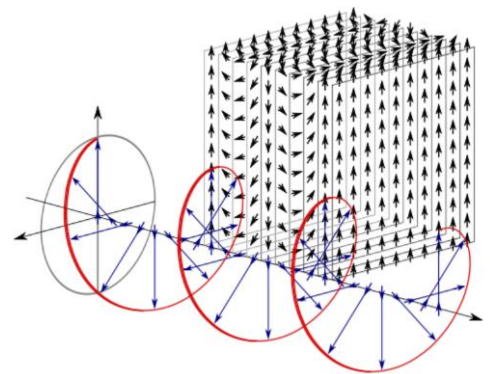


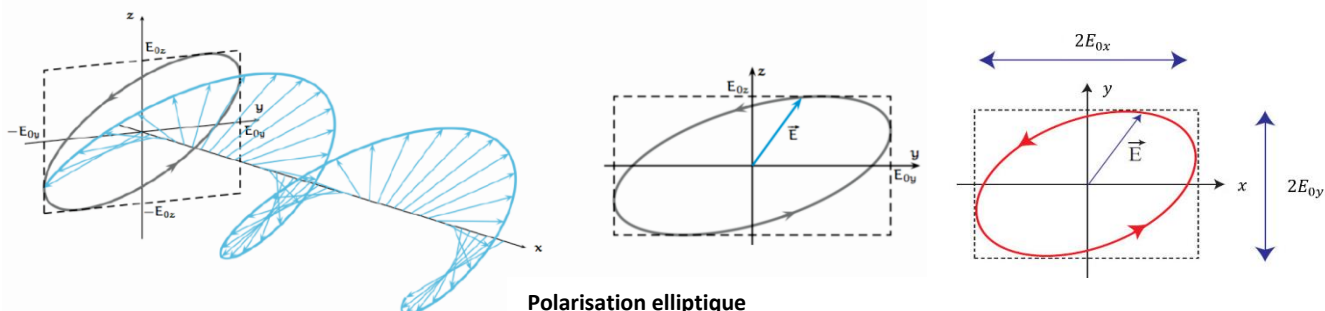
Figure b  
Polarisation circulaire gauche se propageant selon  $+Ox$



Polarisation circulaire

### 3) Complément : polarisation elliptique

Plus généralement, si le champ électrique évolue dans le plan  $Oyz$  avec un déphasage  $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$  donné entre ses deux composantes, son extrémité décrira aussi une trajectoire très simple dans le plan d'observation : une ellipse. On parle alors de polarisation elliptique. Dans le cas particulier où les deux composantes du champ ont même amplitude, la polarisation est dite circulaire.



Polarisation elliptique

Animation Java : Différents états de polarisation (polarisation rectiligne, circulaire, elliptique) ; en rouge  $\vec{E}$  et en bleu  $\vec{B}$  : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/electmag/ondeEM.html>

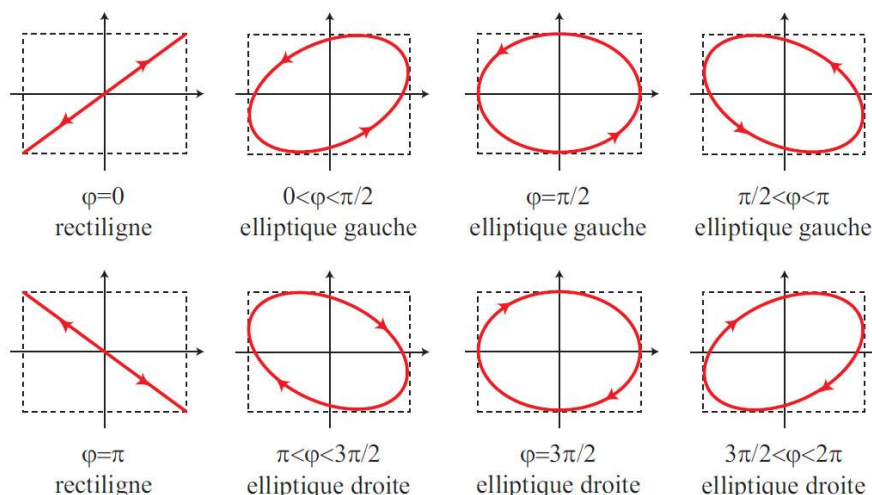
cf. [animation](#)

On peut visualiser facilement le champ électromagnétique en un point en choisissant  $N = 2$ .

Polarisation rectiligne : choisir  $E_y/E_x$  quelconque et un déphasage nul.

Polarisation circulaire : choisir  $E_y/E_x = 1$  et un déphasage de  $90^\circ$ .

Polarisation elliptique : choisir par exemple  $E_y/E_x = 1$  et un déphasage quelconque.



### 4) Utilisation de la notation complexe

La notation complexe est efficace pour décrire la polarisation. On considère à nouveau l'onde de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \Delta\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kz)} \vec{E}_0 \text{ avec } \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors, on peut décrire les états de polarisation facilement :

- **Polarisation elliptique** : pas de forme particulière si ce n'est que  $\Delta\varphi$  est nécessairement non nul.
- **Polarisation rectiligne** formant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $(Ox)$  :  $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Polarisation circulaire** :  $E_{0x} = E_{0y}$  et  $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  soit  $\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$

polarisation circulaire droite :  $\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}$  et polarisation circulaire gauche :  $\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

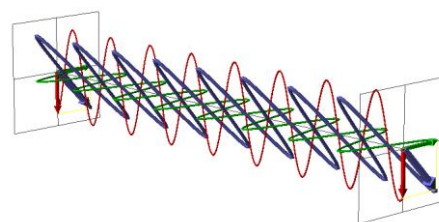
## C) Cas de la lumière naturelle

### 1) Une Oem non polarisée

Pour la plupart des sources lumineuses classiques (soleil, source thermique telle que le filament d'une ampoule à incandescence, lampe spectrale, diode électroluminescente, etc.), la lumière émise correspond à une onde électromagnétique produite par de la matière à laquelle on apporte de l'énergie, que ce soit sous forme thermique (rayonnement du corps noir), électrique, etc.

Ce sont les atomes constituant la matière qui absorbent cette énergie et la réémettent sous forme d'Oem, selon des processus différents selon l'origine de l'énergie. Chaque Oem émise par les atomes est une OemPPH polarisée elliptiquement, mais de **durée limitée** (en moyenne  $10^{-8}$  s) et émise de manière **aléatoire** : c'est ce qu'on appelle un **train d'onde**.

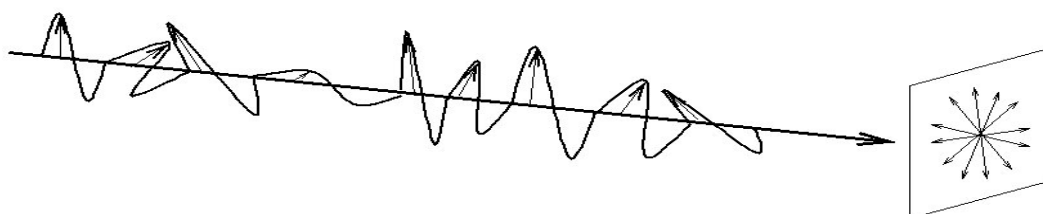
Il en résulte qu'un faisceau de lumière « naturelle » correspond à une superposition d'un grand nombre de trains d'onde de durée très courte et émis constamment de manière aléatoire, se combinant pour former une seule onde **polarisée** mais pendant une durée d'environ  $10^{-8}$  s. De nouveaux trains d'ondes étant constamment émis par les constituants de la source, la polarisation globale change de façon complètement aléatoire au cours du temps.



L'extrémité du champ électrique résultant décrit dans le plan d'observation (perpendiculaire à la direction de propagation) une direction parfaitement aléatoire au cours du temps, impossible à caractériser simplement : nous dirons alors que **la lumière naturelle est non polarisée**.

#### ■ Onde Oem non polarisée

si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement.

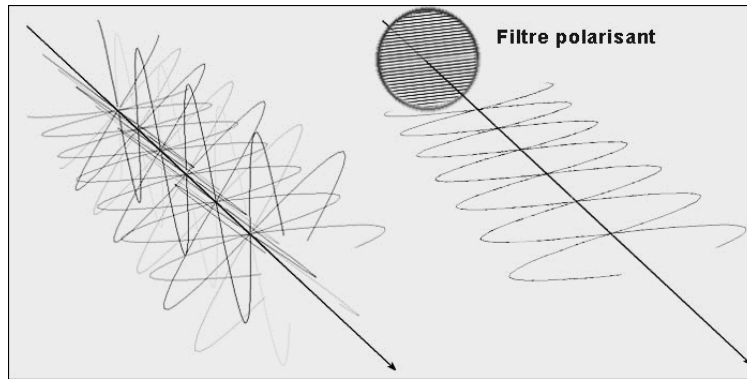


*La lumière naturelle est polarisée aléatoirement : on dit qu'elle est non polarisée.*

A titre de contre-exemple, la lumière émise par un LASER peut dans certains cas être polarisée.

Cependant, lorsque la lumière naturelle entre en interaction avec la matière, il est possible que la matière ne restitue que certaines directions de polarisation et l'onde réémise est alors partiellement (ou complètement) polarisée. Par exemple :

- Polarisation par un polariseur : il s'agit d'un verre anisotrope ne laissant passer le champ que dans une seule direction.
- Polarisation par réflexion : lorsqu'une onde lumineuse arrive sous une incidence particulière, appelée incidence de Brewster (pour laquelle le rayon réfracté et le rayon réfléchi sont orthogonaux), alors, l'onde réfléchie est polarisée rectilignement.
- Polarisation par diffusion : la lumière réémise par des atomes excités par une Oem est partiellement polarisée.

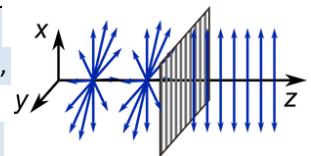


On représente le champ électrique. A gauche : lumière naturelle, non polarisée, à droite : lumière polarisée, direction unique du champ électrique.

## 2) Obtention de lumière polarisée rectilignement

### a) Polariseur

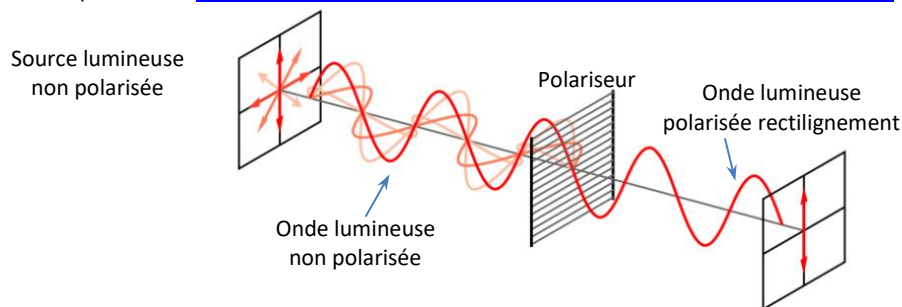
**Polariseur** : système optique (qu'on considérera plan) possédant deux directions privilégiées. L'une d'entre elles, appelée **axe de transmission**, ou **axe passant du polariseur**, est telle que le polariseur transmet la composante du champ électrique incident parallèle à l'axe de transmission et arrête la composante perpendiculaire.



**La lumière sortant d'un polariseur est polarisée rectilignement, parallèlement à la direction de l'axe de transmission, quelle que soit la nature de la lumière incidente.**

En outre, si la lumière incidente est polarisée rectilignement selon la direction perpendiculaire à l'axe de transmission, alors aucune lumière ne sort du polariseur.

☞ Effet d'un polariseur : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/elecmag/ondeEMPolariseur.html>



- Principe de fonctionnement d'un polariseur. Figure extraite de Wikipédia.

Un polariseur « extrait » la composante polarisée selon son axe passant  $\vec{n}$  et bloque la composante orthogonale. Formellement,

$$\vec{E}_{\text{sortant}} = (\vec{E}_{\text{entrant}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

Les polariseurs les plus fréquemment utilisés sont faits en matériaux polymères dont les chaînes moléculaires sont étirées dans une direction privilégiée.

#### ■ Exemples d'application

- Lunettes 3D : Pour voir en relief, il faut que les deux yeux reçoivent des images différentes. Deux images différentes sont projetées à l'écran, avec des directions de polarisation perpendiculaires. Devant les yeux, des lunettes avec deux verres polarisés à  $90^\circ$ .
- La lumière qui se réfléchit (eau, neige, vitre..) est polarisée rectilignement, parallèlement à la surface. Application aux verres polarisés pour éviter l'éblouissement par les reflets sur la neige (lunettes de glacier) ou sur l'eau (lunettes de lagon).
- La lumière diffusée (comme le bleu du ciel) est polarisée. On peut utiliser des filtres polarisants pour obtenir des paysages lumineux sur fond de ciel bleu-profond dont en supprimant la composante polarisée.

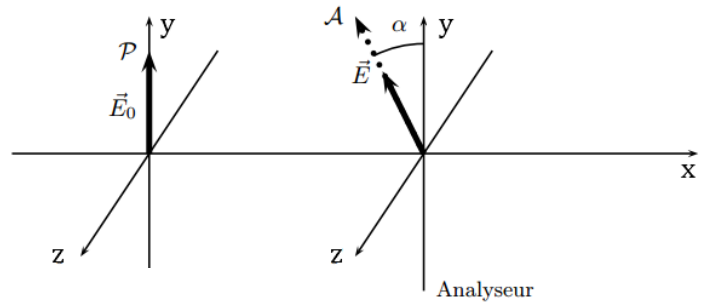
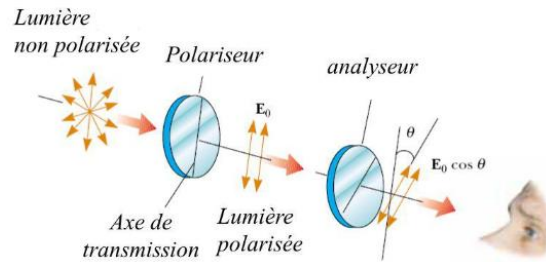
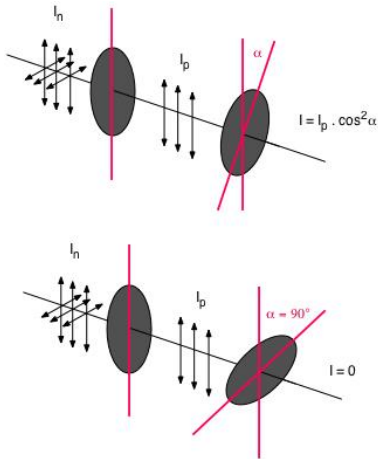
- La lumière émise par un écran d'ordinateur (écran à cristaux liquides) est polarisée.

<http://www.e-scio.net/ondes/polarisation.php3>

## b) Analyseur

Soit une onde traversant un polariseur dont l'axe de transmission est  $y$ .

On place un second polariseur derrière, généralement appelé **analyseur**, dont la direction de polarisation fait un angle  $\alpha$  avec  $y$ .



L'amplitude du champ électrique après l'ensemble analyseur polariseur varie selon  $\cos(\alpha)$  et l'énergie transportée par l'onde varie selon  $\cos^2(\alpha)$ .

### Loi de Malus :

En sortie de l'analyseur, intensité  $I = I_0 \cos^2 \theta$

**Animation loi de Malus** (sous Mozilla Firefox) avec polariseur et analyseur :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/malus.html>

## III) ÉTUDE ÉNERGETIQUE DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

### A) Rappels

■ Densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}(M, t)$  associée en un point  $M$ , à une date  $t$ , au champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Lien avec l'énergie électromagnétique d'un système de volume ( $V$ ) :

$$U_{em}(t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M, t) d\tau$$

Puissance électromagnétique rayonnée par ce système :

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt}$$

### ■ Vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Il s'agit du vecteur « densité de flux de puissance électromagnétique » : le flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  à travers une surface ( $\Sigma$ ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface ( $\Sigma$ ) dans le sens de  $\vec{dS}$ .

Unité :  $\vec{\Pi}$  en  $W \cdot m^{-2}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la **direction de propagation de l'énergie électromagnétique**, qui coïncide avec la **direction de propagation de l'onde** électromagnétique si elle est progressive.

Dans le vide, en l'absence de tout phénomène dissipatif, le bilan d'énergie prend la forme suivante :

■ **Équations de conservation de l'énergie électromagnétique, pour un volume  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $(\Sigma)$**

$$\frac{dU_{em}}{dt} = - \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} \quad \text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} = 0$$

**Remarque :** Le signe "-" est lié à l'orientation des vecteurs  $d\vec{S}_{ext}$  vers l'extérieur.

Nous nous intéresserons dans la suite de cette partie tout particulièrement aux grandeurs moyennes dans le cas des OemPH. Il est en effet naturel de calculer les moyennes temporelles de  $\langle u_{em} \rangle$  et  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  car compte tenu de la fréquence élevée des ondes électromagnétiques, ce sont ces seules valeurs moyennes qui sont accessibles aux détecteurs (œil, photodiode par exemple...).

## B) Densité volumique d'énergie électromagnétique des OemPP

### 1) Expression pour une OemPP

Densité volumique d'énergie électromagnétique associée au champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  :

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Pour l'OemPP, les normes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont liés par la relation  $E = Bc$  soit  $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0}$

Avec  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , on a  $\frac{1}{c^2 \mu_0} = \epsilon_0$  soit  $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  d'où

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 B^2 c^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

■ **Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique pour une OemPP**

$$u_{em}(M, t) = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

### 2) Cas particulier des OemPPH

Si on considère de plus une OemPPH, le champ électrique est variable, de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$E_0$  désignant l'amplitude du champ électrique.

La densité volumique d'énergie est donc variable dans le temps en un point donné, on peut calculer la **moyenne temporelle de la densité d'énergie** associée à l'onde :

$$\langle u_{em} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$$

or

$$\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \langle \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

**En moyenne temporelle :**

$$\langle \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = 0$$

$$\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\langle \mathbf{u}_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH est équirépartie entre les formes électrique et magnétique.

Elle est strictement positive en tout point, et sa moyenne temporelle est uniforme : l'énergie est en moyenne uniformément répartie dans l'espace.

**Remarque :** On retrouve le caractère non-physique de l'OPPH : en sommant sur tout l'espace, on trouve qu'elle porte une énergie totale infinie, ce qui est physiquement impossible.

## C) Puissance rayonnée : vecteur de Poynting pour une OemPPH

### 1) Expression du vecteur de Poynting pour des OemPP

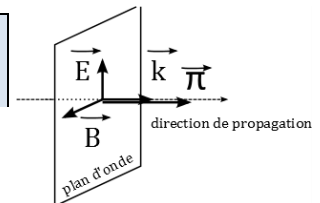
Vecteur de Poynting instantané associé au champ électromagnétique :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Relation de structure entre les champs pour une OemPP :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$

On en déduit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k$$

Le vecteur de **Poynting** est **colinéaire à la direction de propagation** de l'onde ; il indique **la direction et le sens du transport d'énergie**.



**Remarque :** les grandeurs énergétiques associées aux ondes électromagnétiques sont nombreuses (intensité, éclairement...) avec des unités très diverses (W, lumen, candela...). Il faut être vigilant quant à la définition de la grandeur donnée (soyez particulièrement attentif à son unité) ou demandée.

### 2) Cas des OemPPH

Considérons une OemPPH, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{u}_k$$

$E_0$  désignant l'amplitude du champ électrique.

D'après la relation de structure, le champ magnétique est  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Expression du vecteur de Poynting instantané :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k E^2}{\mu_0 \omega} \vec{u}_k = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{u}_k$$

Le champ électrique étant variable dans le temps, il en est de même pour le vecteur de Poynting en un point donné, et on peut s'intéresser au **vecteur de Poynting moyen (moyenne temporelle)**, qui donne accès à la **puissance moyenne rayonnée** :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle \vec{u}_k = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle \vec{u}_k = \epsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle \vec{u}_k = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_k = c \langle \mathbf{u}_{em} \rangle \vec{u}_k$$

#### ■ Vecteur de Poynting moyen

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_k = c \langle \mathbf{u}_{em} \rangle \vec{u}_k$$

$$\langle P \rangle = \langle \Pi \rangle S$$



Une OPPH **transporte de l'énergie dans sa direction de propagation**, avec une puissance proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique.

$\langle \Pi \rangle$  correspond à la **puissance rayonnée par unité de surface**, traversant la surface **dans le sens de la propagation**.

### ■ Intensité d'une onde électromagnétique

On définit l'intensité  $I(M, t)$  d'une onde électromagnétique par la **puissance lumineuse moyenne reçue par unité de surface** (moyenne **temporelle**), soit la moyenne de la composante du vecteur de Poynting selon la direction de propagation :

$$I(M, t) = \frac{d\mathcal{P}_{em}}{dS} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$$

**Remarque :** On définit parfois une intensité correspondant de plus à la moyenne spatiale sur l'ensemble de la surface d'un capteur donné :

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle$$

### Exercice 9. Caractéristiques ondulatoires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $r = 1,0 \text{ mm}$  d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . La puissance moyenne émise est  $P = 1,0 \text{ mW}$ .

On donne :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Calculer les amplitudes  $E_{max}$  et  $B_{max}$  des champs électrique et magnétique.

$$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi S = \Pi \pi r^2 \text{ soit } P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2 \text{ soit } \langle \Pi \rangle = P / \pi r^2 \text{ avec}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ soit } \Pi = \frac{EB}{\mu_0} \text{ avec } \vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \text{ d'où } B = \frac{E}{c} \text{ soit } \Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$$

$$\text{Avec } E = E_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) : \Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

$$\langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \right\rangle = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle \text{ soit avec } \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P / \pi r^2$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

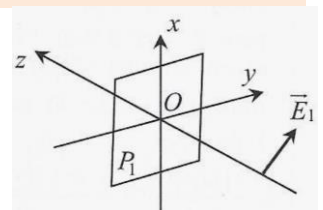
### Exercice 10. Vecteur de Poynting

$\vec{E}(M, t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y)$  est le champ électrique d'une OPPM se propageant dans le « vide ». Déterminer le vecteur de Poynting moyenné dans le temps associé.

### Exercice 12. Polariseur et analyseur



On modélise un film polarisant dichroïque, noté  $P_1$ , par une lame d'épaisseur négligeable constituée d'un milieu anisotrope. On suppose que le caractère anisotrope du milieu se traduit par une transparence vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction  $(Ox)$  attachée au plan du polariseur, dite axe du polariseur, et par une opacité vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction  $(Oy)$  orthogonale à  $(Ox)$ . On admet que dans le cas général, le champ électrique associé à une onde de polarisation quelconque se propageant suivant l'axe  $(Oz)$  normal à la surface du polariseur est de la forme :





$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le caractère transverse de l'onde impliquant l'absence de composante suivant la direction de propagation ( $Oz$ ). Les amplitudes des composantes transverses  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  sont positives. Dans le cas d'une lumière non polarisée, les phases à l'origine  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont différentes et aléatoires.

1) Une lumière non polarisée à laquelle on associe une OPPM arrive en incidence normale au point O de la surface du polaroïd. Donner la forme du champ  $\vec{E}_2$  émergeant du polariseur dans le système d'axe ( $O, x, y, z$ ) lié à sa surface. Justifier brièvement la terminologie d'usage de « polariseur » pour décrire ce film polaroïd.

2) On place à présent un second polaroïd  $P_2$ , identique au premier et parallèle à celui-ci, sur le trajet de la lumière émergeante du polariseur  $P_1$ . On note ( $OX$ ) son axe et on suppose que celui-ci fait un angle  $\alpha$  avec l'axe ( $Ox$ ) de  $P_1$ . On note  $I$  l'intensité lumineuse transportée par l'onde, qui est définie comme le flux du vecteur de Poynting moyen par unité de surface à travers une surface unitaire perpendiculaire à la direction de propagation.



a) Donner l'expression de l'intensité  $I_2$  de l'onde incidente  $P_2$  ainsi que celle, notée  $I_3$ , de l'onde qui en émerge. En déduire la relation entre  $I_2, I_3$  et  $\alpha$ , dite loi de Malus.

b) On place un écran derrière  $P_2$ . Que se passe-t-il lorsque les directions ( $Ox$ ) et ( $OX$ ) sont orthogonales ?

c) Partant de la situation décrite précédemment, on place entre les deux polaroïds une lame transparente composée d'un milieu permettant de générer, à partir d'une polarisation incidente rectiligne, une polarisation émergeante elliptique ou circulaire (on parle de lame à retard également dite lame quart d'onde). Qu'observe-t-on à l'écran si un opérateur fait tourner l'axe ( $OX$ ) du polaroïd  $P_2$  de façon continue ?

d) Justifier, d'après ce qui précède, la terminologie d'usage d'« analyseur » utilisée pour décrire les polaroïd  $P_2$ .

1) Seule la composante selon  $\vec{e}_x$  est transmise par le polariseur :  $\vec{E}_2 = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$  : obtention d'une onde polarisée rectilignement.

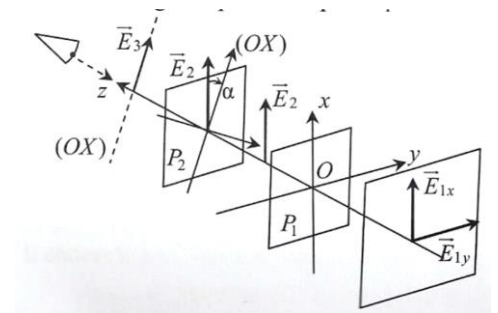
$$2) a) \vec{\Pi}_2 = \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} = \frac{E_2^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_x \text{ soit}$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2}{2} \text{ car } \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{2};$$

Le second polaroïd ne transmet que la projection de  $\vec{E}_2$  selon son axe ( $OX$ ):

$$\vec{E}_3 = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_X] \vec{e}_X = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \cos \alpha] \vec{e}_X$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2 \alpha}{2} \vec{e}_X$$



Le rapport des intensités est dans le même rapport que celui des normes du vecteur de Poynting moyen :

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle} = \cos^2 \alpha \quad (\text{loi de Malus})$$

b) Lorsque les directions ( $OX$ ) et ( $Ox$ ) sont orthogonales (polariseur et analyseur croisés),  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $I_3 = 0$  : extinction complète de la lumière émergeante.

c) Si la polarisation est elliptique, on observe les situations suivantes quand on tourne  $P_2$  :

- Quand l'axe ( $OX$ ) coïncide avec le grand axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est maximale, idem pour l'intensité lumineuse.

- Quand l'axe ( $OX$ ) coïncide avec le petit axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est minimale, idem pour l'intensité lumineuse.

- Entre ces deux cas, l'amplitude donc l'intensité varie entre ces deux valeurs extrêmes sans jamais s'annuler.

Si la polarisation est circulaire, la projection du champ incident sur l'axe du polariseur est constante, donc l'amplitude et l'intensité émergentes également.

d) L'observation du minimum nul à l'écran pour une orientation donnée de l'axe du polaroïd renseigne à la fois sur le caractère rectiligne de la polarisation incidente et sur sa direction (orthogonale à l'axe du second polaroïd placé dans sa position d'extinction). L'observation d'une intensité variant sans s'annuler indique une polarisation elliptique, une intensité ne variant pas une polarisation circulaire.

### ■ Vitesse de propagation de l'énergie transportée par une OEMPPH dans le vide.

Soit  $\vec{v}_e$  la vitesse de propagation de l'énergie dans l'espace.

Energie traversant une surface élémentaire  $d\vec{S}$  durant  $dt$  :  $\delta E_{em} = \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \cdot dt$ .

Cette énergie était initialement contenue dans le cylindre de volume  $\delta V = \vec{v}_e dt d\vec{S}$ , on a  $\delta E_{em} = u_{em} \delta V$ .

En l'absence de dissipation d'énergie électromagnétique dans le vide :

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \cdot dt &= u_{em} \delta V = u_{em} \vec{v}_e dt d\vec{S} \\ \vec{\pi} &= u_{em} \vec{v}_e \end{aligned}$$

Or, nous avons montré que  $\vec{\pi} = u_{em} c \vec{e}_x$ . Par identification, on en déduit que  $\vec{v}_e = c \vec{e}_x$

L'énergie électromagnétique est transportée dans le vide à la vitesse des ondes électromagnétiques.

## D) Energie et représentation complexe

### ■ Exemple introductif

Considérons le champ  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$  associé à la grandeur complexe  $\underline{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$  avec  $\vec{E} = \Re(\underline{E})$ .

Calcul des carrés associés :  $\begin{cases} E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \\ \underline{E}^2 = E_0^2 e^{i2(\omega t - kx)} \end{cases}$  soit  $\Re(\underline{E}^2) = E_0^2 \cos(2(\omega t - kx)) \neq E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$ .

La représentation complexe ne doit surtout pas être utilisée directement pour calculer le carré de grandeurs, et il est généralement recommandé d'utiliser les grandeurs réelles pour le calcul des grandeurs énergétiques.

La notation complexe permet toutefois d'avoir accès aux valeurs moyennes, et peut d'en certains cas être utile en exploitant les résultats ci-dessous.

### ■ Produit de grandeurs harmoniques et notation complexe

La notation complexe ne peut être utilisée directement pour des calculs faisant apparaître des produits. Il existe néanmoins un outil très intéressant exploitant les complexes lorsque l'on souhaite calculer des valeurs moyennes temporelles de produits de grandeurs harmoniques.

### ■ Application aux grandeurs énergétiques

$$\frac{1}{2} \Re \left( \frac{\underline{E}(t) \wedge \underline{B}^*(t)}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{\underline{E} \wedge \frac{\vec{u} \wedge \underline{E}^*}{c}}{\mu_0} \right)$$

Or pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans l'espace,  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ , soit

$$\underline{E} \wedge \frac{\vec{u} \wedge \underline{E}^*}{c} = \frac{1}{c} \left[ (\underline{E} \cdot \underline{E}^*) \vec{u} - \underbrace{(\underline{E} \cdot \vec{u})}_{=0} \underline{E}^* \right] = \frac{1}{c} (\underline{E} \cdot \underline{E}^*) \vec{u}$$

*onde transverse*

$$\frac{1}{2} \Re e \left( \frac{\vec{E} \wedge \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}^*}{c}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} \underbrace{\Re e \left( \vec{E}(t) \cdot \vec{E}^*(t) \right)}_{E_0^2} \vec{u} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u} = \langle \vec{\pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$$

#### ■ Expression des grandeurs énergétiques

**Attention !** Les grandeurs énergétiques sont non linéaires, et ne peuvent pas être calculées à partir des représentations complexes, qui ne donnent accès qu'à leurs valeurs moyennes.

$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 \quad \leftrightarrow \quad \langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \leftrightarrow \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re e \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

Où l'étoile désigne le complexe conjugué.

Attention à ne pas oublier le préfacteur ½ !