TD CHAPITRE OND.0 : ONDES : RAPPELS ET COMPLEMENTS

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Il faut connaître l'équation de d'Alembert.
2. Les grandeurs $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ représentant des phénomènes ondulatoires sont spatio-temporelles ; bien faire la distinction entre $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{t})$ qui, pour une corde vibrante par exemple, représente l'élongation d'un point $\boldsymbol{x_0}$ de la corde en fonction du temps et $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t_0})$ qui représente l'état de la corde entière à l'instant $\boldsymbol{t_0}$ fixé.
3. Dans l'écriture $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{x}/\boldsymbol{c})$ d'une onde progressive, bien distinguer $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ qui représente la grandeur physique (élongation, surpression…) de $\boldsymbol{f}$ la fonction analytique (sinus, exponentielle…) qui représente sa variation.
4. Ne pas confondre la célérité (ou vitesse de propagation) des ondes avec la vitesse de vibration d'un élément de corde.
5. Il est essentiel de savoir écrire une onde harmonique progressive correctement.
6. Lorsque vous écrivez une relation liant deux ou trois variables parmi ω, T, ν, c, k, λ, σ, pensez à contrôler l'homogénéité (unité plutôt que dimension).
7. Dans les applications numériques ne pas oublier le coefficient 2π intervenant dans la relation entre la pulsation ω (en rad.s^{-1}) et la fréquence $\boldsymbol{f}$ (en Hz)
8. Il faut parfaitement maitriser le passage aux complexes en vérifiant bien la convention retenue par l'énoncé quant aux signes.

EXERCICES

Exercice 1. Caractéristiques d'une onde IMPORTANT | 1 ou 2 | 1

1- Parmi les ondes scalaires suivantes, lesquelles sont planes ?

1. $f_1(M,t) = A\cos(\omega t - kx)$
2. $f_2(M,t) = A\exp\big((t - z/c)/\tau\big)$
3. $f_3(M,t) = A\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - kx)$
4. $f_4(M,t) = A\sin(ky)\cos(\omega t)$

2- Pour chacune des ondes scalaires qui suivent, préciser si elles sont solutions d'une équation de d'Alembert et si elles sont progressives ; pour les ondes progressives, indiquer selon quel vecteur. On suppose $k > 0$.

1. $f_1(M,t) = A\cos\big(\omega t + k(x+z)/\sqrt{2}\big)$
2. $f_2(M,t) = A\exp\big((t - z/c)/\tau\big)$
3. $f_3(M,t) = A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx))$
4. $f_3(M,t) = A\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - kz)$

Exercice 2. Vitesses du son 2 | 1

Sur une côte maritime, un dispositif d'écoute est constitué de 2 micros placés sur une même verticale, l'un dans l'air, l'autre dans l'eau. La célérité du son dans l'air est c_1 = 340 m.s^{-1} et la célérité dans l'eau est c_2 =1 500 m.s^{-1}. Le bruit d'une explosion en mer parvient aux 2 récepteurs avec un décalage de 2,5 secondes.

A quelle distance a eu lieu l'explosion ?

Exercice 3. Effet Doppler 2 | 1 ou 2

1 - Un camion de pompier arrive à la vitesse v = 70,0 km.h^{-1} vers un passant immobile. Sa sirène est allumée et émet une onde de fréquence f = 435 Hz. Le son se propage à une vitesse c = 340 m.s^{-1}. On s'intéresse à deux maxima consécutifs de l'onde. Faire un schéma de la situation pour un camion immobile en représentant la position de ces deux fronts d'onde dans l'espace à $t = T$. Indiquer à quelle distance correspond la longueur d'onde λ. Faire de même pour un camion mobile. Dans ce cas, représenter la nouvelle longueur d'onde λ' et en déduire un lien entre λ', λ, v et T.

2 - Exprimer la fréquence f' du signal perçu par le passant en fonction de f, v et c. Donner sa valeur numérique.

3 - Un radar routier automatique fonctionne sur le même principe : il envoie une onde de fréquence $f\ =\ 34{,}3$ GHz sur une voiture en mouvement à la vitesse v, le récepteur étant cette fois-ci en mouvement. Dessiner les fronts d'onde émis dans l'espace par le radar, représenter λ puis la position de la voiture quand elle perçoit le premier signal puis le deuxième, une période T' plus tard en se rapprochant du radar.

4 - En déduire un lien entre λ, v, c et T'. En déduire la fréquence f' du signal perçu par le passant.

5 - La voiture réfléchit l'onde à la fréquence f' vers le radar et se comporte donc comme un émetteur. Montrer que la fréquence $f"$ perçue par le radar s'exprime par $f"\ =\ \frac{c+v}{c-v}f$.

Exercice 4. Battements 1 | 2

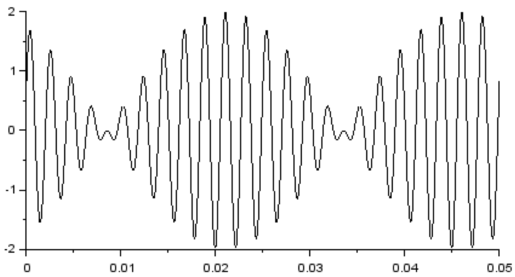
Quand on fait la somme de deux ondes sinusoïdales de même amplitude et de fréquences f_1 et f_2 voisines, on observe un phénomène de battement.

On rappelle : $\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

1) Exprimer le signal résultant, en un point donné, de la somme des deux signaux $s_1(t)=A\,cos(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t)=A\,cos(2\pi f_2 t)$. Ce signal est périodique mais non sinusoïdal.

Dans le cas où f_1 et f_2 sont deux fréquences voisines, on peut considérer le signal résultant comme un signal de fréquence $f_s=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ proche de f_1 ou f_2, modulé par un signal de fréquence $f_m=|f_1-f_2|$.

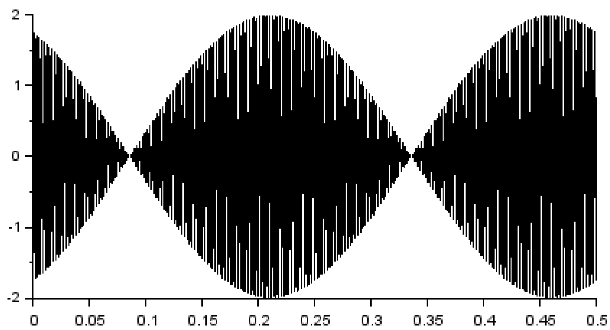
2) Exemple : Sur le graphe ci-contre figure la somme de deux signaux de fréquences $f_1=440\,Hz$ et $f_2\ =\ 480\,Hz$, de même amplitude égale à l'unité ($A\ =\ 1$). L'échelle horizontale est graduée en secondes. Retrouver f_s et f_m.



L'oreille est très sensible à ce phénomène et cette méthode est très utilisée pour accorder les instruments de musique. On cherche ainsi l'absence de battement entre le signal de référence et l'instrument à accorder afin de s'assurer d'être à la bonne note (voir exemples audio ci-dessous).

Wikipédia **Somme d'un *la* avec un *presque-la* :**	
Battement de $440\ Hz$ et $440{,}5\ Hz$	https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/SoundBeats1.ogg
Battement de $440\ Hz$ et $442\ Hz$	https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/SoundBeats2.ogg

3) Le signal résultant ci-contre est la somme de 2 signaux de fréquences $f_1=440\ Hz$ et f_2 inconnue ; que vaut f_2 ?



Exercice 5. Equations de propagation dans une ligne sans perte IMPORTANT | 1 ou 2 | 2

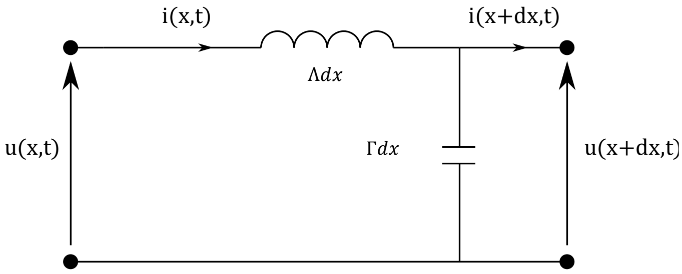
Un câble coaxial peut être modélisé par une capacité ainsi qu'une inductance propre. La modélisation de la structure **continue** du câble coaxial nécessite un découpage de celui-ci en tronçons de longueur élémentaire dx :

De capacité élémentaire $\mathrm{d}C=\Gamma dx$; D'inductance élémentaire $\mathrm{d}L=\Lambda dx$,

Γ, Λ sont les caractéristiques électrocinétiques **linéiques** du câble (par unité de longueur de câble). On parle de modèle **à constantes réparties**.

- Ordres de grandeur typiques : $\Gamma \cong 100$ pF.m^{-1}, $\Lambda \cong 0{,}25$ μH.m^{-1}.
- Les paramètres Λ et Γ sont pratiquement indépendants de la fréquence jusqu'à 1 GHz environ.

On néglige la résistance des zones métalliques métaux des câbles supposés infiniment conducteurs), tandis que le diélectrique est supposé infiniment isolant. Le modèle électrique du système est représenté ci-contre.



L'objectif étant d'étudier la propagation de l'onde électrique (de tension ou de courant) le long du câble, nous nous plaçons en dehors du cadre de l'ARQS ; les lois de Kirchhoff (loi des mailles et loi des nœuds) ne peuvent donc s'appliquer à l'ensemble du câble. Il est en revanche possible d'appliquer ces lois de Kirchhoff à es portions de câble de longueur $\mathrm{d}x \ll \lambda = c/f$.

1 - Appliquer la loi des mailles et déterminer une première relation différentielle (1) entre $u(x,t)$ et $i(x,t)$.

2 - Appliquer la loi des nœuds et déterminer une seconde relation différentielle (2) entre $i(x,t)$ et $u(x,t)$.

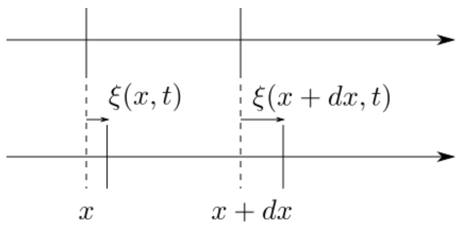
3 - En déduire l'équation de propagation de la tension, puis de l'intensité, le long du câble

4 - Quelle est la vitesse de propagation des ondes électriques dans cette ligne ?

Exercice 6. Propagation du son dans un métal IMPORTANT | 2 | 2

On étudie une tige solide en métal de section constante S, de masse volumique au repos μ_0 et d'axe Ox. Des ondes longitudinales de compression (ondes sonores) se déplacent dans cette tige, parallèlement à (Ox). Sous l'influence du passage de l'onde de sonore, une section d'atomes située à l'abscisse x à la date t se déplace d'une distance $\xi(x,t)$. On néglige dans la suite l'influence de la pesanteur.

On admet la loi de l'élasticité, ou loi de **Hooke**, qui stipule qu'à l'abscisse x la force exercée par la partie droite de la tige sur la partie de gauche est $\vec{F} = ES\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\vec{e}_x$, où E est le module de Young (ou d'élasticité) du solide.



On donne pour l'acier $E = 2{,}0.10^{11}$ USI et $\mu_0 = 7{,}8.10^3$ kg·m^{-3}.

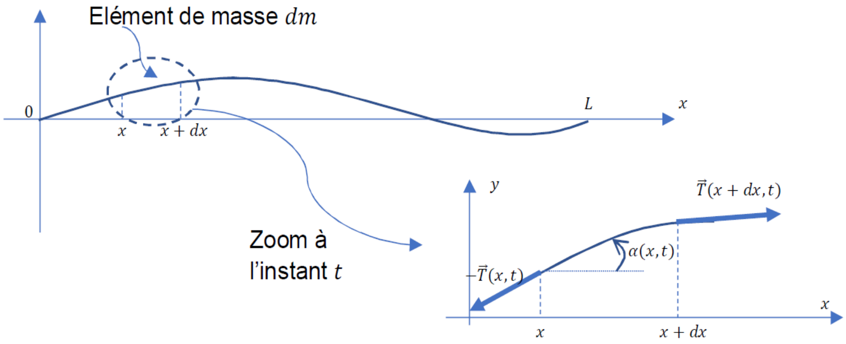
1. Écrire l'équation du mouvement d'une tranche d'épaisseur au repos dx lors du passage de l'onde. En déduire l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit $\xi(x,t)$.
2. Quelle est l'unité de E ?
3. Déterminer la valeur littérale et numérique de la célérité du son dans ce métal.

Exercice 7. Equation de propagation sur une corde vibrante *(ATS 2018)* IMPORTANT | 2 ou 3 | 2 ou 3

On souhaite étudier le mouvement vertical d'une corde de masse linéique μ uniforme. Pour cela, on étudie un élément de masse $\mathrm{d}m$ de la corde, de longueur $\mathrm{d}\ell$ et on impose les hypothèses suivantes (voir schéma ci-après):

- Hypothèse 1 : On néglige les frottements.
- Hypothèse 2 : La corde, supposée infiniment souple, est constamment tendue. Chaque élément de la corde est alors soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x,t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x.
- Hypothèse 3 : Le poids de chaque élément de la corde est négligeable par rapport aux tensions s'exerçant de part et d'autre de ce brin de corde.
- Hypothèse 4 : On néglige le déplacement horizontal (dans le référentiel d'étude supposé galiléen). Un point de la corde est repéré à l'équilibre par $(x, 0)$ et est repéré hors équilibre par $\big(x, y(x,t)\big)$.

- Hypothèse 5 : Le déplacement vertical $y(x,t)$ est faible. L'angle $\alpha(x,t)$ est supposé petit de sorte qu'il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.



Il est demandé, pour les questions 1 et 2 une rédaction rigoureuse au cours de laquelle le candidat précise l'hypothèse (1, 2, 3, 4 ou 5) qu'il utilise à chaque étape importante de son raisonnement.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe horizontal, montrer que la tension est uniforme le long de la corde. Pour la suite, on notera T_0 la norme, uniforme et constante, de la tension $\vec{T}$ du fil.

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe vertical, montrer que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

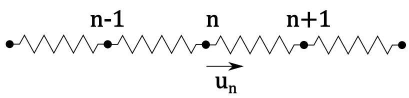
On donnera l'expression de v en fonction de T_0 et μ.

3. Que représente la grandeur v ?

Exercice 8. Approximation des milieux continus dans les cristaux modélisés comme des chaines d'oscillateurs IMPORTANT | 2 ou 3 | 2 ou 3

On modélise un cristal comme une succession de plans réticulaires (plan d'atomes) qui interagissent entre eux. Si on suppose ces plans de masse identique distant d'une distance a au repos et n'interagissant de manière harmonique qu'avec ces plus proches voisins, nous pouvons assimiler ce cristal à une chaine rectiligne composées de masselottes ponctuelles m pouvant glisser sans frottements le long de l'axe Ox, et reliées entre elles par des ressorts identiques, de raideur k et de longueur à vide a.

À l'équilibre, les masses sont séparées de a et on note u_n l'écart de la nième masse à sa position de repos $x_{n,repos} = na$. On ne prend pas en compte la pesanteur et on ne s'intéresse qu'à des mouvements longitudinaux.



1. Établir l'équation du mouvement de la masse n.

La distance inter atomique a dans un solide (de l'ordre d'une fraction de nanomètre) est généralement très inférieure à la longueur d'onde des ondes sonores qui peuvent s'y propager. On peut alors modéliser le matériau par un milieu continu en écrivant la déformation locale $u_n(t) = u(x = na, t)$, ce qui permet de passer d'un nombre très grand de déformations $u_n(t)$ à la seule fonction spatio-temporelle $u(x,t)$. Il s'agit de l'approximation des milieux continu qui permet de faire « passer » une fonction $u(x,t)$ « normalement » régulière (dans l'espace) par tous les points représentatifs des déplacements discrets $u_n(t)$.

2. Montrer que ce « passage au continu » de l'équation obtenue en première question impose à $u(x,t)$ de satisfaire à l'équation de d'Alembert.

3. Déterminer alors la célérité de l'onde en fonction de a, k et m.

4. La célérité des ondes acoustiques dans les solides s'exprime sous la forme $c = \sqrt{E/\mu_0}$. En déduire le lien entre le module d'Young et les paramètres du modèle microscopique k et a.