

Exercice 1. Caractéristiques d'une onde

1- Ondes planes : qui ne dépendent que d'une unique variable cartésienne : le champ est uniforme dans tout plan orthogonal à une direction fixe.

1. $f_1(M, t) = A \cos(\omega t - kx) : \text{à } x = cte, f_1(M, t) = cte : \text{OP, plan d'onde } x = cte$

2. $f_2(M, t) = A \exp((t - z/c)/\tau) : \text{à } y = cte, f_2(M, t) = cte : \text{OP, plan d'onde } y = cte$

3. $f_3(M, t) = A \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - kx) : \text{non}$

4. $f_4(M, t) = A \sin(ky) \cos(\omega t) : \text{à } y = cte, f_4(M, t) = cte : \text{OP, plan d'onde } y = cte$

2- Les solutions d'une équation de d'Alembert, de la forme $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, s'écrivent comme une superposition d'ondes de la forme $f(x \pm ct)$ ou $g\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$, et si elles sont progressives, selon une seule de ces formes.

1. $f_1(M, t) = A \cos(\omega t + k(x + z)/\sqrt{2}) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) : \text{onde progressive (OPPH), suivant le vecteur } \vec{k} \text{ tel que}$

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = -\frac{k(x+z)}{\sqrt{2}} = k_x x + k_z z \quad \text{d'où} \quad k_x = k_z = -\frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\text{or } \vec{k} = k\vec{u}_k \quad \text{soit } \vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{k} = -\frac{\frac{k}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x + \vec{u}_z)}{k} = -\frac{\vec{u}_x + \vec{u}_z}{\sqrt{2}}$$

2. $f_2(M, t) = A \exp((t - z/c)/\tau) \quad \text{OPP selon } +\vec{u}_z$

$$f_z = A \exp\left(\frac{t - z/c}{\tau}\right) \quad \frac{\partial f_z}{\partial t} = \frac{A}{\tau} \exp\left(\frac{t - z/c}{\tau}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f_z}{\partial t^2} = \frac{A}{\tau^2} \exp\left(\frac{t - z/c}{\tau}\right)$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial z} = -\frac{A}{\tau c} \exp\left(\frac{t - z/c}{\tau}\right) \quad \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} = \frac{A}{\tau^2 c^2} \exp\left(\frac{t - z/c}{\tau}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_z}{\partial t^2} \quad : \text{vérifie bien d'Alembert}$$

3. $f_3(M, t) = A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) : \text{superposition d'OPP se propageant dans les deux sens opposés, pas une OPP. Nous verrons qu'il s'agit d'une onde stationnaire.}$

4. $f_4(M, t) = A \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - kz) : \text{onde plane, progressive selon } +\vec{u}_z.$

$$\Delta f_4 = \frac{\partial^2 f_4}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial z} = +kA \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sin(\omega t - kz) - \frac{1}{\delta} A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial z^2} = -k^2 A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\omega t - kz) - \frac{kA}{\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sin(\omega t - kz) + \frac{A}{\delta^2} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$- \frac{k}{\delta} A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{\delta^2} - k^2\right) f_4 + \left(-\frac{2k}{\delta}\right) A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_4}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \omega^2 A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\omega t - kz) = -\frac{\omega^2}{c^2} f_4$$

On ne peut avoir $\forall t, \forall z, \frac{\partial^2 f_4}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_4}{\partial t^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\delta^2} - k^2\right) f_4 + \left(-\frac{2k}{\delta}\right) A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sin(\omega t - kz) = -\frac{\omega^2}{c^2} f_4$

$f_4(M, t)$ ne vérifie donc pas l'équation de d'Alembert, mais pseudo OPPH avec une amplitude qui décroît exponentiellement.

Exercice 2. Vitesse du son

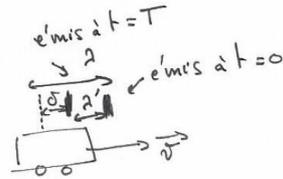
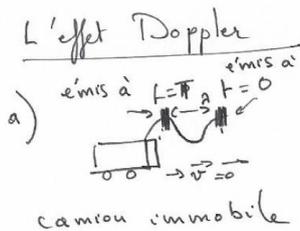
L'explosion a lieu à une distance d du dispositif d'écoute.

Le son met dans l'air un temps t_1 pour arriver au dispositif d'écoute tel que $t_1 = \frac{d}{c_1}$, et il met dans l'eau un temps t_2 tel que $t_2 = \frac{d}{c_2}$.

Le décalage de temps $\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{c_1} - \frac{d}{c_2} = d \left(\frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2}\right)$, soit

$d = \Delta t \left(\frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}\right)$ **A.N. $d = 1,1 \text{ km}$**

Exercice 3. Effet Doppler



pendant la durée T , le camion ayant roulé, la distance λ' entre 2 trains d'onde successifs est $\lambda' < \lambda$.

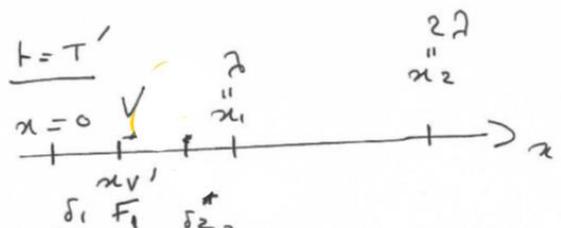
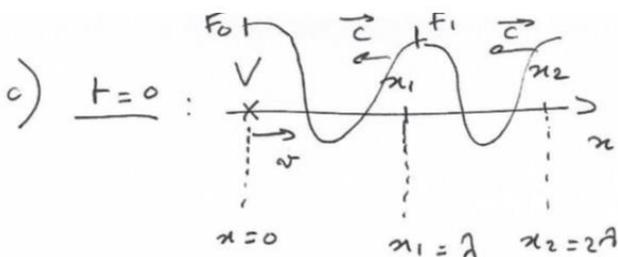
on a $\lambda' + \delta = \lambda$ avec δ distance parcourue par le camion en T , soit

$\lambda' + vT = \lambda$ (1)

b) $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ et $\lambda' = cT' = \frac{c}{f'}$ dans (1) : $\frac{c}{f'} + vT = \frac{c}{f} \Leftrightarrow$

$\frac{c}{f'} = \frac{c}{f} - vT \Leftrightarrow \boxed{f' = f \frac{c}{c-v}}$ Soit $f' = f \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}$
 $= \frac{c - vT}{f}$ **A.N. $f' = 461 \text{ Hz}$** < 1

on a finalement $f' > f$: le son paraîtra plus aigu !



les positions des fronts d'onde sont distantes de λ , la voiture V reçoit le 1^{er} à $t=0$

à $t=T'$, la voiture reçoit le front d'onde suivant, pendant ce temps elle a parcouru la distance $\delta_1 = xv' = vT'$, tandis que le front

d'onde suivant F_1 , en x_1 à $t=0$, a avancé de $\delta_2 = cT'$

On a alors $\lambda = \delta_1 + \delta_2 = (v+c)T'$ soit $c = (v+c) \frac{1}{f'}$

Soit $f' = f \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

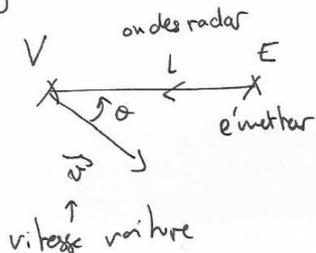
d) Idem camion pompier, avec $f'' = \frac{f'}{1 - \frac{v}{c}} = f \frac{(1 + \frac{v}{c})}{1 - \frac{v}{c}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'' = \frac{c+v}{c-v} f}$$

e) $f''(c-v) = f(c+v) \Leftrightarrow v = c \frac{f'' - f}{f'' + f}$ or $\Delta f \ll f$ donc $f'' \approx f$

$$\boxed{v = c \frac{\Delta f}{2f}}$$

Si la voiture arrive de biais par rapport au radar, c'est sa vitesse dans la direction de propagation des ondes du radar qui est mesurée, soit la projection de sa vitesse réelle dans cette direction, soit $v \cos \theta$.



On a donc $c \frac{\Delta f}{2f} \approx v \cos \theta \Leftrightarrow$

$$\boxed{v \approx \frac{c \Delta f}{2f \cos \theta}}$$

AN : $v = 10,9 \text{ m.s}^{-1} = 39,4 \text{ km.h}^{-1}$
 (th)

Exercice 4. Battements

Le signal résultant est :

$$A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t) = A \cos\left(2\pi \frac{(f_1+f_2)}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{(f_1-f_2)}{2} t\right) = A \cos(2\pi f_s t) \cos(\pi f_m t)$$

$$12 T_s \approx 0,025 \text{ s} \Rightarrow f_s \approx 480 \text{ Hz} ;$$

$$f_m = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ Hz} = f_2 - f_1 : \text{cohérent}$$

$$f_m = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ Hz} : \text{donc } f_2 = 440 \pm 4 \text{ Hz.}$$

Exercice 5. Equations de propagation du courant et de la tension dans une ligne sans perte

Q1. La loi des mailles impose $u(x, t) = u(x + dx, t) + u_{\Lambda dx}$

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = -u_{\Lambda dx} = -\Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

En divisant par dx et en passant à la limite (approximation à l'ordre 1 en dx) :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Q2. Loi des nœuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_{\Gamma dx}$$

$$i(x + dx, t) - i(x, t) = -i_{\Gamma dx} = -\Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$$

On obtient à l'ordre 1 en dx

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Remarque 1 : $i(x + dx, t) - i(x, t) = -i_{\Gamma dx} = -\Gamma dx \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{i(x+dx, t) - i(x, t)}{dx} = -\Gamma \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t}$ puis on passe à la limite

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{i(x + dx, t) - i(x, t)}{dx} \hat{=} \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \lim_{dx \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} \right) = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Remarque 2 : $\Gamma dx \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} dx \right) = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} dx^2 \sim \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ à l'ordre 1.

C'est en cela que l'on indique parfois qu'on réalise une **approximation d'ordre 1**

Q.3. On combine les deux équation (1) et (2) et on utilise le théorème de Schwarz afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée uniquement par $u(x, t)$ (ou $i(x, t)$).

En tension :

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

En courant :

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

La tension $u(x, t)$, comme l'intensité $i(x, t)$, vérifient toutes les deux la même équation aux dérivées partielles ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

$$\Lambda \Gamma = \frac{L C}{\ell \ell}$$

Or LC est homogène à l'inverse d'une pulsation (pour rappel, la pulsation propre d'un circuit RLC série vaut $\frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$$[\Lambda \Gamma] = \frac{[LC]}{[\ell^2]} = \frac{T^2}{L^2} = \frac{1}{(LT^{-1})^2}$$

Exercice 6. Onde sonore dans un métal

On étudie le mouvement de la tranche d'épaisseur dx et de section S dans le référentiel du solide au repos supposé galiléen. Le mouvement est rectiligne selon la direction (Ox) . Le déplacement du système en x à l'instant t est caractérisé par $\xi(x, t)$, d'où $\vec{a} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{e}_x$.

Cette tranche de masse $dm = \mu_0 S dx$ est soumise selon l'horizontale aux seules forces élastiques :

à droite $\vec{F} = ES \frac{\partial \xi(x+dx, t)}{\partial x} \vec{e}_x$, de la part de la partie droite sur la tranche

à gauche $\vec{F} = -ES \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \vec{e}_x$ de la part de la partie gauche sur la tranche d'après le principe des actions réciproques.

En projection sur l'horizontale, on obtient une équation de d'Alembert

$$\mu_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial \xi(x+dx, t)}{\partial x} - ES \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = ES \left(\frac{\partial \xi(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu_0} \frac{\left(\frac{\partial \xi(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)}{dx} = \frac{E}{\mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0}$$

Par analyse dimensionnelle, on observe que $[E] = [F]/[S]$ puisque $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$ est sans dimension.

E a donc l'unité d'une **pression**, ie des **Pa**.

Par identification avec l'équation de propagation de d'Alembert, célérité du son dans le solide :

$$\boxed{c = \sqrt{E/\mu_0}} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Exercice 7. Equation de propagation sur une corde vibrante

1. Système : brin de corde de masse dm

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : cartésienne

Etude cinématique : (hyp 4) mouvement vertical

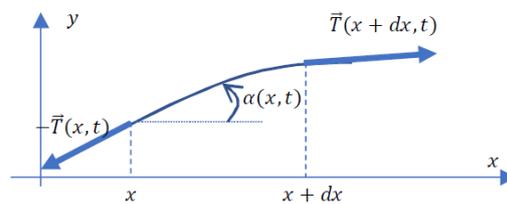
$$\overrightarrow{OM} = y \overrightarrow{u}_y \quad \vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \overrightarrow{u}_y \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \overrightarrow{u}_y$$

Bilan des forces :

pooids négligé (hyp 3)

frottements négligés (hyp 1)

Tension du fil (hyp 2)



Tension du fil située à droite de M' : $\vec{T}(x+dx, t)$

Tension du fil situé à gauche de M : $\vec{T}(x, t)$

$$\vec{T}(x+dx, t) = T(x+dx, t) \cos(\alpha(x+dx, t))$$

$$\vec{T}(x, t) = -T(x, t) \cos(\alpha(x, t))$$

$$T(x+dx, t) \sin(\alpha(x+dx, t))$$

$$-T(x, t) \sin(\alpha(x, t))$$

D'après l'hyp 5, approximation des petits angles :

Tension du fil située à droite de M' : $\vec{T}(x+dx, t)$

Tension du fil situé à gauche de M : $\vec{T}(x, t)$

$$\vec{T}(x+dx, t) = T(x+dx, t)$$

$$\vec{T}(x, t) = -T(x, t)$$

$$T(x+dx, t) \alpha(x+dx, t)$$

$$-T(x, t) \alpha(x, t)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au brin de corde de masse constante, dans le référentiel terrestre galiléen : $dm \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) + \vec{T}(x, t)$

Projection du PFD sur Ox :

$$0 = T(x+dx, t) - T(x, t)$$

$$T(x+dx, t) = T(x, t) \Rightarrow T(x, t) = cte = T_0$$

La tension ne dépend pas de l'abscisse x . Elle est la même en tout point de la corde : **la tension du fil est uniforme (indépendante de x)**. On la note T_0

2. Expression de dm : $dm = \mu dl$

$$\text{Or, } \cos \alpha = \frac{dx}{dl} = 1 \text{ (hypothèse 5)} \Rightarrow dl = dx \Rightarrow dm = \mu dx$$

Projection du PFD sur Oy :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx, t)\alpha(x+dx, t) - T(x, t)\alpha(x, t)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\alpha(x+dx, t) - T_0\alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad \text{car } \alpha(x+dx, t) - \alpha(x, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

$$\text{Or, } \tan \alpha \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

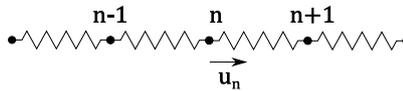
$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

3. La grandeur v est la vitesse de propagation (ou célérité) de l'onde dans la corde.

Exercice 8. Approximation des milieux continus dans les cristaux modélisés comme des chaînes d'oscillateurs

1. Système : masse n , soumise (en négligeant le poids) aux forces de rappel élastiques des deux « ressorts » à droite et à gauche, soit les deux ressorts reliés aux masses $n+1$ et $n-1$.



Force de rappel élastique exercée par le ressort de droite, de longueur ℓ_{n+1} , relié à la masse $n+1$:

$$\vec{F}_{d,n} = +k(\ell_{n+1} - \ell_0)\vec{e}_x = +k(\ell_{n+1} - a)\vec{e}_x$$

Avec $\ell_{n+1} = \ell_{\text{éq}} + u_{n+1} - u_n = a + u_{n+1} - u_n$

$$\vec{F}_{d,n} = +k(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$$

Force de rappel élastique exercée par le ressort de gauche, de longueur ℓ_{n-1} , relié à la masse $n-1$:

$$\vec{F}_{g,n} = -k(\ell_{n-1} - a)\vec{e}_x$$

Avec $\ell_{n-1} = a + u_n - u_{n-1}$

$$\vec{F}_{g,n} = -k(u_n - u_{n-1})\vec{e}_x$$

Force élastique totale sur la masse n :

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{d,n} + \vec{F}_{g,n} = k(u_{n+1} - u_n - u_n + u_{n-1})\vec{e}_x = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})\vec{e}_x$$

Projection du PFD sur (Ox) : $m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$

Généralisation avec $\ell_{\text{éq}} \neq \ell_0$:

Force de rappel élastique exercée par le ressort de droite, de longueur ℓ_{n+1} , relié à la masse $n+1$:

$$\vec{F}_{d,n} = +k(\ell_{n+1} - \ell_0)\vec{e}_x$$

Avec $\ell_{n+1} = \ell_{\text{éq}} + u_{n+1} - u_n$

$$\vec{F}_{d,n} = +k(\ell_{\text{éq}} + u_{n+1} - u_n - \ell_0)\vec{e}_x$$

Force de rappel élastique exercée par le ressort de gauche, de longueur ℓ_{n-1} , relié à la masse $n-1$:

$$\vec{F}_g = -k(\ell_{n-1} - \ell_0)\vec{e}_x$$

Avec $\ell_{n-1} = \ell_{\text{éq}} + u_n - u_{n-1}$

$$\vec{F}_g = -k(\ell_{\text{éq}} + u_n - u_{n-1} - \ell_0)\vec{e}_x$$

Projection du PFD sur (Ox) : $m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$

Plusieurs remarques :

– L'intérêt d'introduire les écarts à l'équilibre est de faire disparaître les grandeurs à l'équilibre et la longueur à vide des oscillateurs étudiés (ce qui n'est guère étonnant puisque l'équilibre est caractérisé par la compensation de tous ces termes.

– l'équation portant sur u_n fait intervenir également les déplacements u_{n+1} et u_{n-1} , il y a couplage entre les oscillateurs.

2. Avec $u_n(t) \rightarrow u(x = na, t)$: $\ddot{u}_n \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = \frac{\left[\frac{(u_{n+1} - u_n)}{a} - \frac{(u_n - u_{n-1})}{a} \right]}{a} a^2 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2$$

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \rightarrow m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Obtention d'une équation de propagation de type d'Alembert.

De manière plus académique : On applique l'approximation des milieux continus, et on considère donc que les N objets u_n varient suffisamment lentement pour pouvoir introduire un unique objet : la fonction $u(x = na, t) = u_n$ considérée comme une fonction continue, pour laquelle on peut écrire des développements limités ici à l'ordre 2 en considérant $a \ll \lambda$ longueur caractéristique de variation de u .

$$u_{n+1}(t) = u((n + 1)a, t) \approx u(na, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t)$$

$$u_{n-1}(t) = u((n - 1)a, t) \approx u(na, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t)$$

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) = k \left(u_n + a \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - a \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - 2u_n \right)$$

Les premiers ordres se compensent :

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 2k \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = ka^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

En posant $c = a \sqrt{\frac{k}{m}}$

On retrouve une équation de d'Alembert

3. $c = \sqrt{ka^2/m} = a\omega_0$

4. La chaîne contenant $n = L/a$ ressorts, la force f statique sur la chaîne est celle sur un atome, avec

$$f = kdl = k \Delta L/n = ka \Delta L/L$$

On en déduit la force F sur les $N = S/a^2$ chaînes en parallèle qui forme la tige de section S :

$$F = Nf = \frac{S}{a^2} \cdot ka \frac{\Delta L}{L} = \frac{kS \Delta L}{a L}$$

Par identification, on en déduit la relation entre le module d'Young et la structure élastique microscopique du modèle :

$$E = k/a$$