TD CHAP.OND.1 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Il faut connaître la structure d'une onde plane, savoir que $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ est un trièdre direct et que $E = Bc$, ce qui permet de retrouver la relation de structure.
2. NE PAS CONFONDRE direction de PROPAGATION ($\vec{k}$) et direction de POLARISATION ($\vec{E}$).
3. Le vecteur de Poynting est nécessairement de même direction et de même sens que $\vec{k}$.
4. Vous devez savoir RETROUVER l'expression de la densité volumique moyenne d'énergie pour une OPPM en fonction de l'amplitude du champ électrique.
5. Attention !! la relation de structure est valable pour des ondes planes progressives, mais pas pour des ondes stationnaires !

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Relation de dispersion IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 1

Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$. Etablir la relation entre ω et k, dite relation de dispersion.

Exercice 2. Relation de dispersion à l'aide de la notation complexe IMPORTANT IMPORTANT 1 | 1 ou 2

Considérons une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un vecteur $\vec{u}_k$ quelconque. On note dans le cas général, avec $\vec{k} = k\vec{u}$, et les 6 constantes E_{0i} et φ_i telles que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_k$ et $\vec{k}$:

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_z) \end{array} \right.$$

a. Donner l'expression du champ électrique complexe associé $\underline{\vec{E}}$, en faisant apparaître l'amplitude complexe $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ à expliciter.

b. On se place dans le cas où $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$. Etablir la relation de dispersion à partir des champs complexes

---

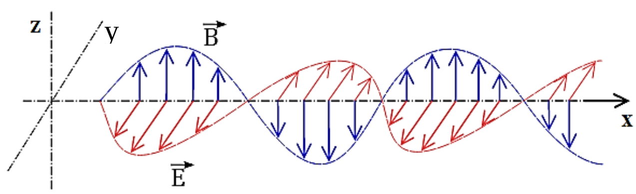
Exercice 3. Démonstration de la relation de structure pour une OemPPH IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 1

a. Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe.

b. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Exercice 4. Structure des ondes planes progressives électromagnétiques IMPORTANT | 1 | 1

1) On donne l'allure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Le champ électrique est contenu dans un plan horizontal tandis que le champ magnétique est dans



le plan vertical. Trouver le sens de propagation de l'onde.

2) Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$. Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

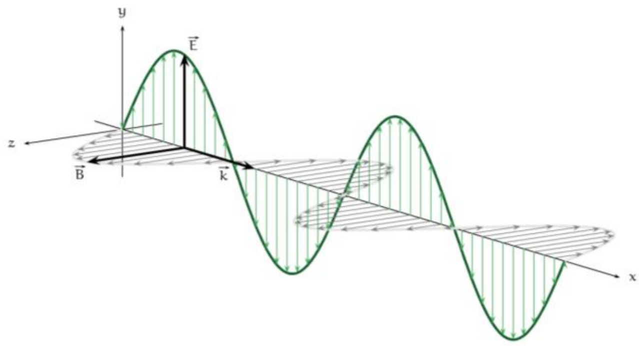
Exercice 5. OemPPH et polarisation rectiligne IMPORTANT | 1 | 1

Ecrire les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une OemPPH

1 - Se propageant selon $\overrightarrow{u_x}$ et polarisée rectilignement selon (Oz)

2 - Représentée sur le schéma ci-contre (Animation ici)

3 - Se propageant selon $\overrightarrow{u_z}$ et polarisée rectilignement à 45° de l'axe (Ox).



Exercice 6. OemPPH : directions de propagation et de polarisation IMPORTANT | 1 | 2

1) On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant suivant l'axe Oz et polarisée suivant Ox. Représenter pour cette onde les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{\Pi}$.

2) Identifier les directions de propagation et de polarisation des champs électriques ci-dessous, ainsi que l'équation du plan d'onde pour la question a) seulement. Exprimer le champ magnétique associé.

a. $\vec{E} = E_O \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$

b. $\underline{\vec{E}} = E_O\, e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y\right)$

c. $\vec{E} = -E_O \cos(\omega t + kx + \varphi)\ \vec{e}_z$

d. $\vec{E} = A \cos(\omega t - kx)\,(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

e. $\vec{E} = E_0\, cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(y + z)\right) \vec{e}_x$

Exercice 7. Polarisation circulaire IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Ecrire l'expression d'une OPPM se propageant selon $-\overrightarrow{u_y}$ et polarisée circulaire droite ou gauche.

Exercice 8. Nature d'ondes électromagnétiques IMPORTANT | 1 | 2

Parmi les champs électriques suivants, lesquels sont ceux d'une OemPPH polarisée rectilignement se propageant dans le « vide » ?

$\vec{E}\,(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_x}$

$\vec{E}\,(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kx)\, \overrightarrow{e_y}$

$\vec{E}\,(M,t) = E_0\big(\cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y} + \cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_z}\big)$

$\vec{E}\,(M,t) = E_0\big(\cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y} + \sin(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_z}\big)$

Exercice 9. Énergie transportée par une onde plane IMPORTANTIMPORTANT | 1 | 2

On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$.

a. Rappeler les relations liant les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{u}$.

b. À l'aide de la densité volumique d'énergie, montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique.

c. Rappeler la définition du vecteur de Poynting. Que représente le flux de ce vecteur à travers la surface (S) délimitant un volume $\mathcal{V}$?

d. Exprimer le vecteur de Poynting dans le cas de l'onde plane précédente en fonction du champ électrique.

Exercice 10. Caractéristiques ondulatoires d'un laser hélium-néon IMPORTANT IMPORTANT | 1 ou 2 | 1

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\, mm$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\, nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\, mW$.

On donne : $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}\ H.m^{-1}$.

Calculer les amplitudes E_{max} et B_{max} des champs électrique et magnétique.

Exercice 11. Vecteur de Poynting IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

$\vec{E}\,(M,t) = E_0\big(cos(\omega t - kz)\,\vec{e_x} + sin(\omega t - kz)\,\vec{e_y}\big)$ est le champ électrique d'une OPPM se propageant dans le « vide ». Déterminer le vecteur de Poynting moyenné dans le temps associé.

Exercice 12. Etude d'une onde électromagnétique 1 (oral banque PT) IMPORTANT | 2 | 2

Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)}\vec{e}_z$$

1 - Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ?

2 - Rappeler l'équation de propagation. En déduire une condition pour que l'onde existe.

3 - Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.

4 – Etablir l'expression du vecteur de Poynting en représentation réelle.

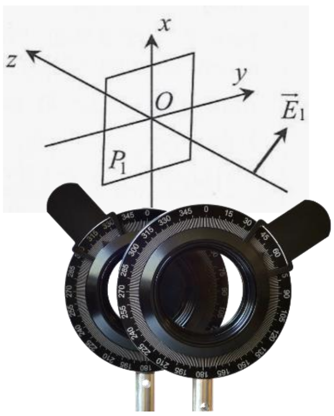
5- Cette onde transporte-t-elle de l'énergie ? si oui, dans quelle direction ?

Exercice 13. Polariseur et analyseur IMPORTANT | 2 | 2

On modélise un film polarisant dichroïque, noté P_1, par une lame d'épaisseur négligeable constituée d'un milieu anisotrope. On suppose que le caractère anisotrope du milieu se traduit par une transparence vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction (Ox) attachée au plan du polariseur, dite axe du polariseur, et par une opacité vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction (Oy) orthogonale à (Ox). On admet que dans le cas général, le champ électrique associé à une onde de polarisation quelconque se propageant suivant l'axe (Oz) normal à la surface du polariseur est de la forme :

$$\vec{E_1} = \left| \begin{array}{l} E_{0x}\cos(kz - \omega t + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varphi_y) \\ \quad 0 \end{array} \right.$$

Le caractère transverse de l'onde impliquant l'absence de composante suivant la direction de propagation (Oz). Les amplitudes des composantes transverses E_{0x} et E_{0y} sont positives. Dans le cas d'une lumière non polarisée, les phases à l'origine φ_x et φ_y sont différentes et aléatoires.



1) Une lumière non polarisée à laquelle on associe une OPPM arrive en incidence normale au point O de la surface du polaroïd. Donner la forme du champ $\vec{E_2}$ émergeant du polariseur dans le système d'axe (O,x,y,z) lié à sa surface. Justifier brièvement la terminologie d'usage de « polariseur » pour décrire ce film polaroïd.

2) On place à présent un second polaroïd P_2, identique au premier et parallèle à celui-ci, sur le trajet de la lumière émergeante du polariseur P_1. On note (OX) son axe et on suppose que celui-ci fait un angle α avec l'axe (Ox) de P_1. On note I l'intensité

lumineuse transportée par l'onde, qui est définie comme le flux du vecteur de Poynting moyen par unité de surface à travers une surface unitaire perpendiculaire à la direction de propagation.

a) Donner l'expression de l'intensité I_2 de l'onde incidente P_2 ainsi que celle, notée I_3, de l'onde qui en émerge. En déduire la relation entre I_2, I_3 et α, dite loi de Malus.

b) On place un écran derrière P_2. Que se passe-t-il lorsque les directions (Ox) et (OX) sont orthogonales ?

c) Partant de la situation décrite précédemment, on place entre les deux polaroïds une lame transparente composée d'un milieu permettant de générer, à partir d'une polarisation incidente rectiligne, une polarisation émergeante elliptique ou circulaire (on parle de lame à retard également dite lame quart d'onde). Qu'observe-t-on à l'écran si un opérateur fait tourner l'axe (OX) du polaroïd P_2 de façon continue ?

d) Justifier, d'après ce qui précède, la terminologie d'usage d' « analyseur » utilisée pour décrire les polaroïd P_2.

EXERCICES

Ondes planes progressives

Exercice 14. Structure de l'onde plane IMPORTANT | 1 | 1

Les composantes du champ électrique d'une onde électromagnétique plane sont données par :

$$E_x = E_y = 0 \text{ et } E_z = E_0 \sin(ky + \omega t)$$

Donner l'expression de $\vec{B}$.

Exercice 15. Longueurs d'onde de quelques ondes radios 1 | 1

Déterminer la longueur d'onde λ, le nombre d'onde σ (en cm^{-1}) et la norme du vecteur d'onde k pour :

1) Une station grande onde de λ fréquence $\nu = 250 \text{ kHz}$
2) Une station FM de fréquence $\nu = 100 \text{ MHz}$
3) Un téléphone portable de fréquence $\nu = 1{,}8 \text{ GHz}$

Exercice 16. Caractéristiques d'une onde IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Dans le vide, on considère une onde plane, progressive, monochromatique représentée en notation complexe par : $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_x$. Sa fréquence est 20 MHz. On donne $E_0 = 10 \text{ V.m}^{-1}$. On demande :

a. Les expressions en notation réelle du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique associé $\vec{B}$.

b. Les caractéristiques de cette onde (toutes ne demandent pas un calcul) : amplitudes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, vecteur d'onde, longueur d'onde.

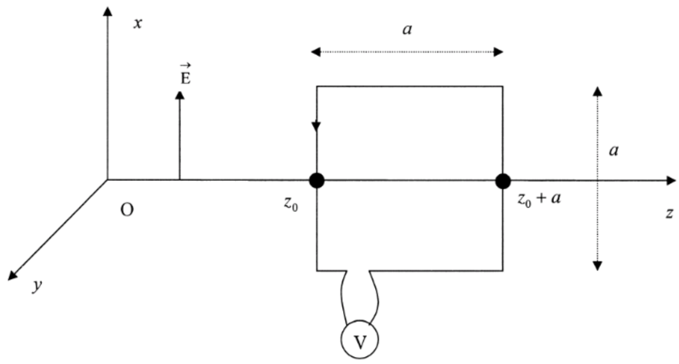
Exercice 17. Directions de polarisation et de propagation pour une OPPM IMPORTANT | 1 | 2

On donne ci-dessous le champ électrique d'une onde électromagnétique dans différents cas.
Préciser dans chaque cas : la direction de polarisation, la direction de propagation et l'expression du champ magnétique correspondant.

a.	$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$	$E_y = 0$	$E_z = 0$
b.	$E_x = E_0 \cos(\omega t + kz)$	$E_y = 0$	$E_z = 0$
c.	$E_x = 0$	$E_y = 0$	$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx)$

Exercice 18. Antenne cadre (Oral banque PT + CCINP) 2 | 1

Une antenne cadre est un type d'antenne souple, robuste et bon marché pouvant être utilisée pour de nombreux usages : communication amateur à courte distance, sondes industrielles, radiologie médicale, etc. C'est l'une des premières structures d'antennes, dont l'usage remonte à Hertz, qui les a utilisées lors de ses expériences pionnières sur la propagation des ondes électromagnétiques. Il s'agit d'une simple boucle, presque fermée sur un voltmètre. On la suppose ici rectangulaire, destinée à recevoir une onde radio amateur de fréquence 27 MHz se propageant dans la direction de l'axe (Oz) du schéma ci-dessous.



Déterminer l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente en fonction de la tension efficace lue sur le voltmètre.

Exercice 19. Polarisation d'une onde EM *(J. Kieffer)* 2 | 3

Une onde plane électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide selon (Oz) est caractérisée par un champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = E_0\left(a\overrightarrow{e_x} - jb\overrightarrow{e_y}\right)\exp j(\omega t - kz)$$

où E_0 est réel, et a et b sont deux constantes réelles telles que $|a + jb| = 1$.

1) Décrire la polarisation de cette onde.

2) A quelle condition sa polarisation est-elle rectiligne, circulaire gauche, circulaire droite?

3) ** Montrer que dans le cas général, cette onde peut être décomposée en une superposition de deux ondes polarisées circulairement.

Avec énergie électromagnétique, puissance et vecteur de Poynting

Exercice 20. Laser (Oral ATS, 2022) 1 | 1 ou 2

Soit un laser qui produit une onde plane de section transversale $S = 1\ \mathrm{mm}^2$, de puissance $P = 10\ W$ et tel que $\vec{E} = E_0 \cos(\omega\, t - k\, x)\,\overrightarrow{e_z}$.

1. Déterminer la direction et le sens de propagation de l'onde, ainsi que sa polarisation.
2. Donner l'expression du vecteur d'onde en fonction de la pulsation spatiale puis en fonction de la pulsation temporelle.
3. Déterminer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à l'onde.
4. Retrouver les amplitudes E_0 et B_0 des champs électriques et magnétiques $\vec{B}$ et $\vec{E}$.

Donnée : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$

Exercice 21. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule *(ATS 2012)* IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Les véhicules modernes disposent de l'ouverture centralisée à partir d'une commande intégrée à la clé. Suivant la fonction que veut mettre en œuvre l'opérateur (ouverture des portes, fermeture...), un signal est émis par la clé sous forme d'onde électromagnétique.

Donnée : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H. m^{-1} : perméabilité du vide

1) Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide. On précisera les unités du champ magnétique $\vec{B}$ et du champ électrique $\vec{E}$.

2) Déduire des équations de Maxwell l'équation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$ dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule :

$\vec{E}(x,t) = E_0 cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_z$ où E_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde et t la variable temporelle.

3) À partir de l'expression de $\vec{E}$, préciser la direction et le sens de propagation de l'onde considérée.

4) Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question 2) à condition que c, ε_0 et μ_0 soient reliées par une relation que l'on déterminera.

5) À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde en fonction de E_0, c, ω, x, t et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

6) Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est son unité ?

7) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à l'onde considérée.

8) On note $\langle\vec{\Pi}\rangle$ la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$ au cours du temps. Exprimer $\langle\vec{\Pi}\rangle$ en fonction de c, E_0, μ_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

La clé émet une onde de puissance moyenne $P = 50\ mW$ répartie uniformément dans toutes les directions de l'espace de manière sphérique.

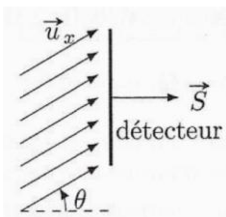
9) Déterminer à $d = 10$ m la valeur de $\langle\vec{\Pi}\rangle$. En déduire l'intensité du champ électrique E_0 et l'intensité du champ magnétique B_0 de l'onde.

10) Comment doit-on placer une antenne constituée d'un cadre conducteur rectiligne formant un carré pour détecter le champ magnétique ? Illustrer votre réponse d'un schéma.

11) La fréquence de l'onde émise est $f = 400\ MHz$. En déduire la valeur de sa longueur d'onde.

Exercice 22. Un problème d'orientation 1 ou 2 | 1 ou 2

On souhaite déterminer la puissance lumineuse d'un faisceau laser collimaté, se propageant dans la direction de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, polarisé rectilignement dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et de longueur d'onde $\lambda = 630$ nm. On dispose pour cela d'un détecteur optique dont la surface utile (S) a une aire $S = 2{,}0$ mm^2, placé sur le trajet du faisceau laser comme indiqué sur le schéma. Ce détecteur délivre un signal électrique s proportionnel à la puissance moyenne rayonnée à travers la surface (S) : $s = K\langle\mathcal{P}_{ray}\rangle$.



L'air sera assimilé au vide et le faisceau laser à une onde plane. La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, la célérité de la lumière dans le vide est $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

1) Donner l'expression du champ électrique de cette OemPPH puis celle du champ magnétique associé. On notera E_0 l'amplitude du champ électrique.

2) Déterminer les valeurs instantanées puis moyennes du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

3) Déterminer l'expression de s en fonction des données de l'exercice.

4) Comment orienter le détecteur pour optimiser la mesure ?

5) Le coefficient K est $K = 1{,}0.\,10^3$ V.W^{-1} et la valeur maximale de la tension mesurée est $s = 2{,}0$ V. En déduire la puissance moyenne du laser puis l'amplitude du champ électrique correspondant.

Exercice 23. Onde sphérique IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques $\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\,\overrightarrow{e_\theta}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1) Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2) On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3) Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4) Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = \frac{A}{R}$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 24. OPPM électromagnétique de direction quelconque *(J. Kieffer)* 1 | 2

On étudie une onde électromagnétique plane progressive monochromatique dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_x\,\overrightarrow{e_x} + E_y\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{avec} \qquad E_x = E_0 \exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right)\right)$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6{,}10.\,10^{-7}$ m.

1) Calculer la fréquence de l'onde.

2) Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde?

3) Calculer la valeur numérique de la constante k.

4) Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

5) Exprimer E_y en fonction de E_x.

6) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.

7) Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.

8) Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 25. Etude d'une onde électromagnétique 2 2 | 2

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = E_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\exp\big(i(\omega t - k_0 z)\big)\,\overrightarrow{e_y} + \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\exp\big(i(\omega t - k_0 z)\big)\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? Progressive ? Harmonique ? Transverse électrique ? Transverse magnétique ? commenter ces derniers résultats.
4. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.

Exercice 26. Etude d'une onde électromagnétique 4 (d'après Mines) 2 | 2

On s'intéresse à une onde se propageant dans le vide dont le champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(bz) \sin(\omega t - kx)\, \vec{u}_y$$

1 - Cette onde est-elle plane? progressive? polarisée?

2 - Calculer le champ magnétique associé.

3 - Calculer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne.

4 - Etablir la relation de dispersion dans le vide associée.

5 - Quelle est la moyenne spatiale du vecteur de Poynting? De même quelle est la moyenne spatiale et temporelle de la densité d'énergie électromagnétique? En déduire la vitesse de propagation de l'énergie. Commentaire?

Exercice 27. Superposition d'OemPPH polarisées et déphasées – énergie *(J. Le Berre)* 2 | 2

On étudie l'onde résultant de la superposition dans le vide de deux ondes électromagnétiques planes harmoniques de même pulsation ω, de même amplitude E_m, polarisées rectilignement suivant (Oy).

Elles se propagent selon deux directions $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, contenues dans le plan (Oxz) et faisant entre elles un angle 2θ tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2\theta$. L'axe (Oz) est choisi bissecteur de cet angle ; tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_z) = \theta$.

1. Établir l'expression du champ électrique résultant. Quelle est sa vitesse de phase v_φ ? L'onde est-elle plane ?
2. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.
3. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ et en déduire la répartition de l'éclairement (donné par la moyenne de la norme du vecteur de Poynting) sur une surface perpendiculaire à $\vec{\pi}$. Commenter.

Exercice 28. Mesure de la concentration en CO2 dans l'atmosphère *(E. Thibierge)* IMPORTANT | 2 | 2

Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) dans l'air sec : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air privé de toute humidité contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 µm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.

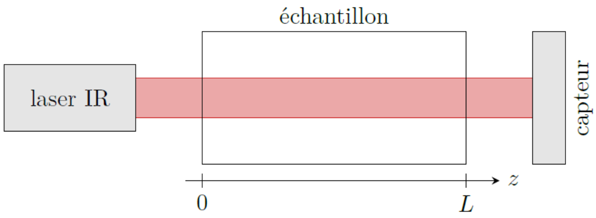


Figure 1 – **Schéma de principe du dispositif de mesure de la fraction molaire en CO2 dans l'atmosphère**

1 - On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.

2 - Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau : $I = \langle \frac{1}{S} \iint_{(S)} \vec{\Pi}.d\vec{S} \rangle$. Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.

3 - Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée appelée section efficace d'absorption, dépendant uniquement de la longueur d'onde. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer que l'intensité vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0$$

où n est la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon.

4 - On appelle absorbance de l'échantillon le rapport

$$A = \ln \frac{I(z=0)}{I(z=L)}$$

Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n, nombre de molécules de CO_2 par unité de volume.

5 - En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.

6 - La figure 2 représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.

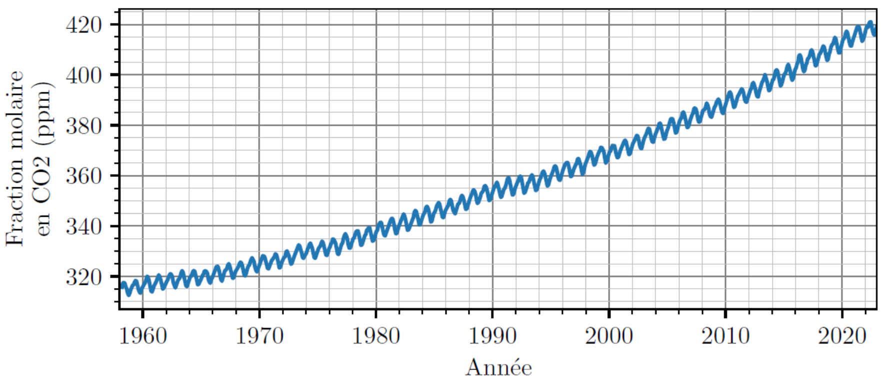


Figure 2 – **Fraction molaire en CO2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa.** Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles, librement accessibles sur le site du Global Monitoring Laboratory.

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 29. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM IMPORTANT | 1 | 2

On donne ci-dessous le champ électrique d'une onde électromagnétique dans différents cas.

Préciser dans chaque cas : la direction de polarisation, la direction de propagation et l'expression du champ magnétique correspondant.

f.	$E_x = E_0 \cos\left(\omega t - k\left(\frac{y+\sqrt{3}z}{2}\right)\right)$	$E_y = 0$	$E_z = 0$
g.	$E_x = 0$	$E_y = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos(\omega t - kx)$	$E_z = \frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t - kx)$

Exercice 30. Énergie reçue par le toit d'une maison 1 ou 2 | 1

Le soleil rayonne au niveau de la Terre un champ électrique d'amplitude environ $1{,}0.\,10^3\ V/m$.

1) Déterminer la puissance moyenne reçue par unité de surface sur la Terre.
2) Trouver alors un ordre de grandeur de la puissance que reçoit le toit d'une maison.
3) Quelle est l'énergie récupérable au cours d'une journée en supposant un éclairement effectif pendant le quart d'une journée ? Le résultat peut être exprimé dans une unité hors SI.
4) Comparer ce résultat à la consommation électrique journalière d'une famille.

On donne : $\mu_0 = 4\pi.\,10^{-7}\ H.m^{-1}$.

Ordres de grandeur de la puissance de quelques appareils domestiques

10 kW	cuisinière	2 kW	radiateur électrique, chauffe-eau
3 kW	lave-linge, sèche-linge	1 kW	micro-ondes, cafetière, grille-pain, fer à repasser, aspirateur
2,5 kW	four	200 W	ordinateur, TV, réfrigérateur, congélateur

Exercice 31. OemPPH de direction quelconque 2 | 2

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme :

$\vec{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + E_y\overrightarrow{e_y}$ avec $E_x = E_0 exp[i(\omega t - \frac{K}{3}(2x + 3y + z))]$.

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$ m.

1. Calculer la fréquence de l'onde, son vecteur d'onde k et la valeur numérique de la constante K. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel l'onde appartient.
2. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
3. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.
4. Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et *c*.
5. Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
6. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

Exercice 32. Champ du vide ? 2 | 2

Thalia, en train de recopier les notes que lui a fournies son amie Justine, reste perplexe devant l'expression du champ électrique suivant : $\vec{E}(x,y,t) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{u_x}$ avec $E_0 > 0$. Justine lui affirme en effet que ce champ peut exister dans un milieu vide de charges.

6) Justifier pourquoi Thalia a raison de remettre en cause les notes prises par son amie.

7) Thalia propose de rajouter à ce champ une composante $E_y(x,y,t)$ dans la direction $\overrightarrow{u_y}$. En supposant que la valeur moyenne temporelle de ce champ électrique reste nulle, déterminer l'expression de $E_y(x,y,t)$.

8) En déduire l'expression globale du champ électrique puis celle du champ magnétique associé, en supposant de même que la valeur moyenne temporelle du champ magnétique est nulle.

9) Cette région vide de charges peut-elle être également vide de courants ? on déterminera si besoin l'expression du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(x,y,z,t)$.

10) Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique ainsi que l'expression du vecteur de Poynting.

Exercice 33. Identification et caractérisation d'une onde électromagnétique *(J. Le Berre)* 2 | 2

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans le vide dont le champ électrique est le suivant

$$\vec{E}(M,t) = \left(E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y\right)\cos\left(\omega t - a(x+y)\right)$$

1. De quel type d'onde s'agit-il ?

2. Quel est l'unité SI de a ? Déterminer le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde. $a = 0{,}1$ SI. En déduire sa longueur d'onde et sa fréquence. À quel domaine spectral appartient cette onde ?

3. Exprimer E_{0y} en fonction de E_0.

4. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

5. Déterminer son vecteur de Poynting.

Exercice 34. Polarisation d'onde *(J. Le Berre)* 2 | 2

1. On considère une OPPM monochromatique de pulsation ω dont les composantes complexe sont données, avec α un réel , par l'expression ;

$$\underline{\vec{E}} = E_0\left(\vec{e}_y + j\alpha\vec{e}_z\right)\exp\left[j(\omega t - kx)\right]$$

a) Quelle condition doit vérifier α pour que l'onde soit polarisée rectilignement ?

b) Et circulairement ?

2. On considère une onde polarisée circulairement dont l'expression est ;

$$\vec{E} = E_0\cos(kx - \omega t)\,\vec{e}_y + E_0\sin(kx - \omega t)\,\vec{e}_z$$

a) Préciser le sens de polarisation de cette onde.

b) Donner l'expression de son amplitude complexe $\underline{\vec{E}}$.

c) Quelle serait l'expression du champ $\underline{\vec{E}}'$ polarisé circulairement en sens inverse ayant la même amplitude ? Quelle serait l'expression de son amplitude complexe ?

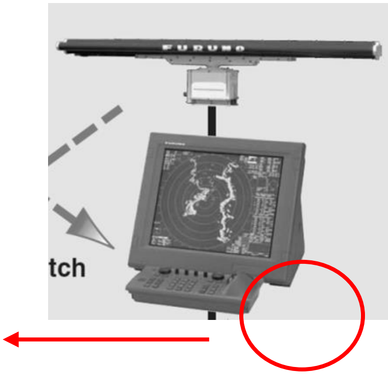
Exercice 35. Principe du radar *(J. Le Berre)* 2 | 2

Cet exercice s'intéresse à certains aspects du principe de fonctionnement d'un **RADAR** (acronyme de **RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging). Dans tout le problème $Oxyz$ est un repère orthonormé direct. Données :

- Vitesse de la lumière dans le vide c = 3,00.10^{8} m.s^{-1}
- Perméabilité magnétique du vide μ_0 = 4π.10^{-7} H.m^{-1}
- Dans tout l'exercice, la fréquence des ondes étudiées vaut f = 3,00 MHz

1. Un radar, situé au point R, émet une impulsion électromagnétique en direction d'un obstacle métallique (que l'on supposera être parfaitement réfléchissant) situé en O sur l'axe Oz et reçoit un écho après une durée de 0,82 ms. À quelle distance L se trouve l'obstacle du radar ?

2. Calculer la longueur d'onde de l'onde électromagnétique et préciser le domaine auquel appartient cette radiation.



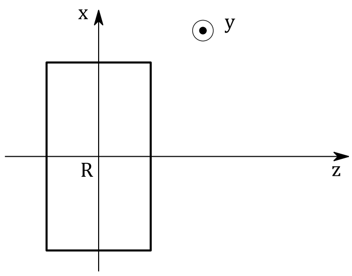
L'onde émise par le radar est désormais considérée comme plane et l'obstacle placé orthogonalement à Oz, sera assimilé à un plan conducteur parfait. Les ondes se propagent dans l'air qui sera assimilé au vide pour ses propriétés électromagnétiques, permittivité ε_0 et perméabilité μ_0.

L'amplitude du champ électrique de l'onde incidente est E_0, celle-ci est monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement selon la direction Ox (cela signifie que le champ électrique de l'onde incidente $\vec{E}_i(M,t)$ est toujours vectoriellement dirigé selon la direction $\vec{e}_x$).

3. Donner l'expression du vecteur d'onde de l'onde incidente en précisant sa norme et sa direction. Écrire l'expression générale du champ électrique $\vec{E}_i(M,t)$ de l'onde incidente plane progressive monochromatique en un point M à un instant t (on supposera la phase à l'origine des temps et d'espace $\varphi = 0$).

4. On montre que le champ électrique réfléchi vaut $\vec{E}_r = -E_0\vec{e}_x\cos(\omega t + k.z)$. Justifier la forme de cette expression et déterminer le champ magnétique $\vec{B}_r(M,t)$ de l'onde réfléchie.

Cette onde réfléchie est détectée par le radar. Le détecteur de celui-ci est modélisé par un cadre rectangulaire de vecteur normal $\vec{n} = \vec{e}_y$, de cotés h = 5,00 mm selon Oz et l = 10,0 cm selon Rx, de centre $z = -L$. Sur ce cadre, sont bobinés N = 1000 tours de fils en série reliées à un voltmètre.



5. Déduire de la valeur numérique de la longueur d'onde de l'onde réfléchie que l'on peut alors considérer que le champ magnétique de l'onde réfléchie est **uniforme** sur toute l'étendue du détecteur.

6. Déterminer alors l'expression littérale du flux magnétique total du champ magnétique $\vec{B}_r$ à travers le cadre.

7. En déduire l'expression de l'amplitude de la tension <u>induite</u> dans le cadre récepteur.