COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°13 – semaine Pronote 20 : 13 au 17 Janvier 2025

Au programme des exercices

- → **Chapitre THM3 : Rayonnement thermique**
- → **Chapitre EM4 : Révisions d'induction**
- → **Chapitre EM5 : Equations de Maxwell et énergie électromagnétique**
- → **Chapitre EM6 : Dipôles électrostatiques et magnétostatiques**
- → **Chapitre OND1 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide**

Questions de cours

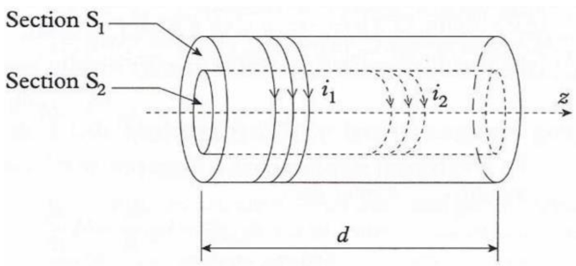
1. ❤️ Considérons une étoile dont le maximum d'émission correspond à la longueur d'onde $\lambda = 250\ \mathrm{nm}$, tandis que le Soleil, dont la température est de $5{,}8.10^3\mathrm{K}$, a un maximum d'émission à $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$. Quelle est la température en surface de l'étoile ?

2. Le Soleil peut-être modélisé par un corps noir dont la température de surface est d'environ $T_S = 5\,800$ K. Le rayon du soleil vaut environ $R_S = 7.10^5$ km et la distance Terre-Soleil est d'une unité astronomique soit $D_T = 1{,}5.10^8$ km. Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$. Évaluer la puissance P_S émise par le soleil et en déduire la puissance surfacique moyenne φ_m en provenance du Soleil reçue par la Terre au niveau du sol.

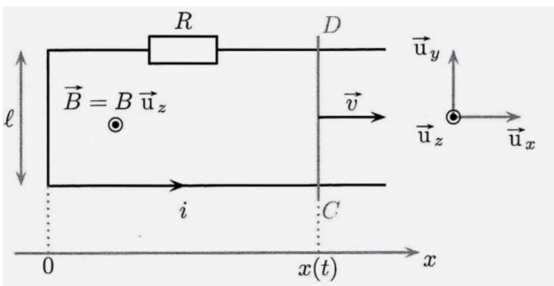
3. ❤️ Le rayonnement reçu par la Terre est principalement celui du Soleil considéré comme un corps noir, avec une puissance surfacique moyenne $\varphi_m = 340\ \mathrm{W.m^{-2}}$ en provenance du Soleil reçue par la Terre au niveau du sol. On considère que l'atmosphère de la Terre possède un coefficient de réflexion $A_T = 30\%$ vis-à-vis des rayonnements solaires. L'atmosphère est assimilée à une couche à l'équilibre thermique, parfaitement transparente au rayonnement solaire incident φ_m, mais absorbant l'intégralité du rayonnement émis par la Terre ; elle émet de manière isotrope à la fois vers la Terre et vers l'espace. Déterminer la température d'équilibre T_T de surface de la Terre selon ce modèle. **Donnée :** constante de Stefan $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$.

4. ❤️ Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

5. On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.



6. ❤️ ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



7. ❤️ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

8. ❤️ ❤️ Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ ou du champ $\vec{B}$ (au choix de l'examinateur) dans le vide et définir la célérité c des ondes électromagnétiques.

9. ❤️ Rappeler l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

10. ❤️ On étudie un atome d'hydrogène qui, dans le cadre du modèle de Bohr, est constitué d'un noyau (charge $+e$, masse m_p) supposé fixe en un point O et d'un électron (charge $-e$, masse m_e). On considère que l'électron n'est soumis qu'à la force d'attraction électrostatique de la part du noyau. Montrer que le mouvement est plan. On considère que l'électron a une trajectoire circulaire de rayon r. Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de l'électron. Etablir la relation entre elles.

11. ** Rappeler l'énergie potentielle et le moment de forces d'un dipôle électrostatique dans un champ $\vec{E}$ uniforme, et indiquer l'effet du champ sur le dipôle. Que se passe-t-il dans un champ non uniforme ?

12. ❤️ ❤️ Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0\ \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$. Etablir la relation entre ω et k, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

13. ❤️ ❤️ Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

14. ❤️ Polarisation d'une onde électromagnétique : polarisation rectiligne, polarisation circulaire.

15. On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$. Exprimer la densité volumique d'énergie et montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique. Dans le cas d'une OemPPH, établir l'expression de la densité volumique d'énergie moyenne.

16. ❤️ Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\ \mathrm{mm}$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\ nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\ \mathrm{mW}$. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$. Calculer les amplitudes E_{max} et B_{max} des champs électrique et magnétique.

17. Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)}\vec{e}_z$ Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ? Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.

Questions de cours avec éléments de réponses

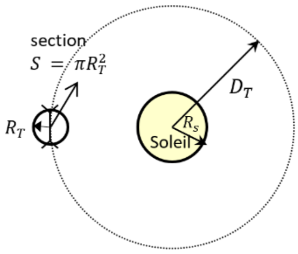
1. ❤️ Considérons une étoile dont le maximum d'émission correspond à la longueur d'onde $\lambda = 250\ \mathrm{nm}$, tandis que le Soleil, dont la température est de $5{,}8.10^3\mathrm{K}$, a un maximum d'émission à $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$. Quelle est la température en surface de l'étoile ?

D'après la loi de Wien, pour un corps noir, la longueur d'onde λ_{max} du maximum de puissance spectrale est : $\lambda_{max}\, T = cte$.

Ici, $\lambda_{m,soleil} T_{soleil} = T_{étoile}$ $\Leftrightarrow$ $T_{étoile} = \frac{\lambda_{m,soleil} T_{soleil}}{\lambda_{m,étoile}}$. A.N. : $T_{étoile} = 2T_{soleil} = 11\ 600\ \mathrm{K}$.

2. Le Soleil peut-être modélisé par un corps noir dont la température de surface est d'environ $T_S = 5\,800$ K. Le rayon du soleil vaut environ R_S = 7.10^5 km et la distance Terre-Soleil est d'une unité astronomique soit D_T = 1,5.10^8 km. Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$. Évaluer la puissance P_S émise par le soleil et en déduire la puissance surfacique moyenne φ_m en provenance du Soleil reçue par la Terre au niveau du sol.

$$P_S = \phi_S = \varphi_S.4\pi R_S^2 \underbrace{=}_{\substack{Loi\ de\\ Stefan}} \sigma T_S^4 4\pi R_S^2 = 3{,}9.10^{26}\ \mathrm{W}$$



Cette puissance est émise de manière isotrope donc se répartit sur des sphères. A la distance D_T du Soleil, donc au niveau de la Terre, cette puissance émise est répartie sur la sphère de surface $4\pi D_T^2$.

La puissance surfacique φ_T qui arrive depuis le Soleil au niveau de la Terre en entrée de l'atmosphère est donc :

$$\varphi_T = \frac{\phi_S}{4\pi D_T^2} = \frac{\varphi_S.4\pi R_S^2}{4\pi D_T^2} = \frac{\varphi_S.R_S^2}{D_T^2}$$

A.N. : $\varphi_T = 1{,}4\ \mathrm{kW.m^{-2}}$

Tout récepteur de section S à cette distance D_T reçoit une puissance $\phi_{reçue} = \varphi_T S = \frac{\phi_S}{4\pi D_T^2} S$

Pour une planète de rayon R, la section exposée à la puissance émise par l'étoile correspond au disque de surface $S = \pi R^2$,

Finalement, la puissance de rayonnement solaire reçue au niveau de la Terre est

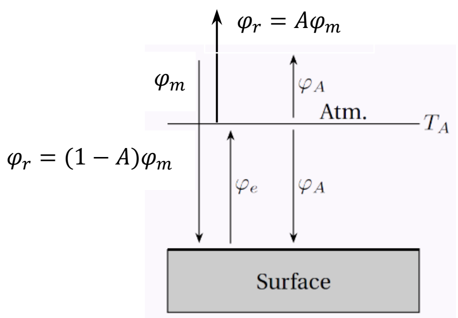
$$\phi_{T,reçue} = \pi R_T^2 \varphi_T$$

On note φ_m la puissance surfacique moyenne reçue par la Terre au niveau du sol en provenance du Soleil en considérant que la puissance totale reçue $\phi_{T,reçue}$ se repartit en moyenne sur l'ensemble de la surface de la Terre (surface sphérique) qui est considérée comme un ensemble homogène. On a donc

$$\varphi_m = \frac{\phi_{T,reçue}}{4\pi R_T^2} = \frac{\varphi_T}{4} = \frac{\sigma T_S^4.R_S^2}{4D_T^2} = 340\ \mathrm{W.m^{-2}}$$

3. ❤️ Le rayonnement reçu par la Terre est principalement celui du Soleil considéré comme un corps noir, avec une puissance surfacique moyenne $\varphi_m = 340\ \mathrm{W.m^{-2}}$ en provenance du Soleil reçue par la Terre au niveau du sol. On considère que l'atmosphère de la Terre possède un coefficient de réflexion $A_T = 30\%$ vis-à-vis des rayonnements solaires. L'atmosphère est assimilée à une couche à l'équilibre thermique, parfaitement transparente au rayonnement solaire incident φ_m, mais absorbant l'intégralité du rayonnement émis par la Terre ; elle émet de manière isotrope à la fois vers la Terre et vers l'espace. Déterminer la température d'équilibre T_T de surface de la Terre selon ce modèle. **Donnée :** constante de Stefan $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$.

les flux mis en jeu sont représentés sur la figure ci-contre (attention, le flux réfléchi n'intervient pas dans les différents bilans) ; l'émission totale par l'atmosphère est de $2\varphi_a$, en notant φ_a les flux surfaciques émis par l'atmosphère vers la Terre et vers le soleil, tandis que l'émission par le sol de la Terre est φ_e



Conservation de l'énergie solaire : $\varphi_m = \varphi_{absorbé,Terre} + \varphi_{réfléchi} = \varphi_{absorbé,Terre} + A\varphi_m$ soit $\varphi_{absorbé,Terre} = (1-A)\varphi_m$

Les équilibres radiatifs des corps opaques s'expriment sous la forme

$$\varphi_{emis} = \varphi_{absorbé}$$

Equilibre radiatif de l'atmosphère :

$$\varphi_e = 2\varphi_a$$

Equilibre radiatif du sol : en tenant compte de la réflexion d'une partie du flux incident φ_m par le sol qui reçoit depuis le soleil $(1-A)\varphi_m$ et depuis l'atmosphère φ_a :

$$\underbrace{\varphi_e}_{\substack{bilan\ radiatif\\ sol}} \underbrace{=} \underbrace{(1-A)\varphi_m}_{issu\ du\ soleil} + \underbrace{\varphi_a}_{\substack{issu\ de\\ l'atmosphère}} = (1-A)\varphi_m + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi_e}_{\substack{bilan\ radiatif\\ atmosphère}}$$

Soit

$$\frac{1}{2}\varphi_e = (1-A)\varphi_m$$

$$\varphi_e \underbrace{=}_{Loi\ de\ Stefan} \sigma T_{T2}^4 \underbrace{=}_{\substack{bilans\ radiatifs\\ sol+\ atmosphère}} 2(1-A)\varphi_m$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{T_{T2} = \left(\frac{2(1-A)\varphi_m}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

A.N. : $T_{T2} = 302\ K$

On trouve une température réaliste mais un peu surestimée, la transparence partielle de l'atmosphère aux rayons IR émis par la Terre ayant été négligée.

4. ❤️ Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

On suppose la bobine parcourue par un courant I (attention ! il faut l'orienter !) ; le champ magnétique créé par ce courant est $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I\ \vec{e_z}$ à l'intérieur de la bobine.

Orienter $d\vec{S}$ avec I.

$\vec{B}_{int}$ et $d\vec{S}$ sont nécessairement dans le même sens, imposé par l'orientation de I.

Calcul du flux de ce champ à travers une spire de la bobine est $\Phi_1 = \iint_{1\ spire} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S = \frac{\mu_0 N I S}{\ell}$

Le flux de ce champ à travers les N spires de la bobine est $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell}$

L'inductance de la bobine longue est : $L = \frac{\Phi}{I}$

$$\boldsymbol{L = \frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}} = 0{,}25\ \text{mH}$$

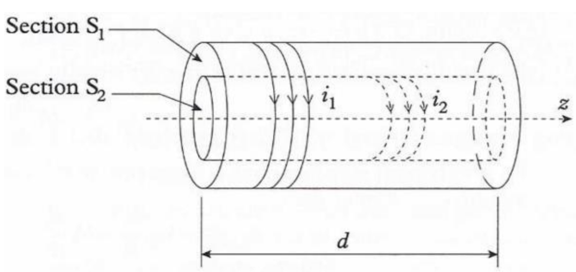
Energie stockée par la bobine : en fonction de i, N, μ_0, ℓ et S : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}\ i^2$

Densité volumique d'énergie magnétique : énergie stockée par la bobine par unité de volume :

$$w_m = \frac{\mathcal{E}_L}{\ell\, S} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2 S}{\ell^2 S}\ i^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2}{\ell^2}\ i^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\mu_0 N i}{\ell}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

On admet que ce résultat est général et que l'énergie est localisée dans les régions de l'espace où règne un champ magnétique et non au niveau de ses sources.

5. On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.



Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = \text{M}i_1$ et $\Phi_{21} = \text{M}i_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12}.

a) Calcul de $M = M_{12}$ tel que $\phi_{1\to 2} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\overrightarrow{B_1}) = M_{12}\, i_1$

à l'intérieur de $\mathcal{C}_1$!

or $\overrightarrow{B_1}$ créé par $\mathcal{C}_1$: $\overrightarrow{B_1} = \mu_0 \dfrac{N_1\, i_1}{d}\, \overrightarrow{u_z}$ (cf orientation i_1)

et $\phi_{12} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\overrightarrow{B_1}) = N_2\, \phi_{1\,\text{spire}}(\overrightarrow{B_1}) = N_2 \displaystyle\iint_{(\Sigma)_2\ 1\ \text{spire de}\ \mathcal{C}_2} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{dS_2}$

↑ flux de $\overrightarrow{B_1}$ à travers $\mathcal{C}_2$

or $\overrightarrow{dS_2} = dS_2\, \overrightarrow{u_z}$

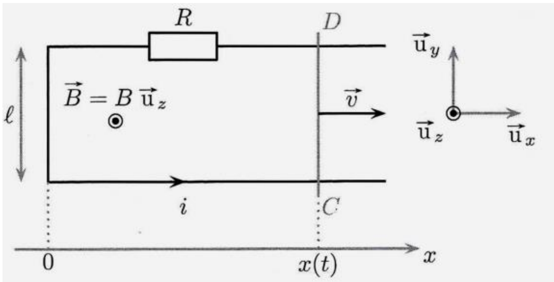
↑ cf orientation i_2 + main droite

⚠ arbitraire ! peut être en sens opposé !

soit $\phi_{12} = N_2 \times B S_2 = \underbrace{\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d}}_{M = M_{12}}\, i_2$

↑ $\overrightarrow{B_1}$ uniforme sur toute la surface

6. ❤ ❤ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



⇨ ***Analyse qualitative :*** *la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)*

⇨ ***Equation électrique***

1. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i.*
2. *Orienter la surface*
3. *Calcul du flux :* $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bax$
4. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$*, donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. *Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :*

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ *soit* $Ri = -Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

1. *Système ;* 2. *Bilan des actions mécaniques extérieures : poids $\vec{P}$; réactions des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements) ; Force $\overrightarrow{Fop}$; Force de Laplace :* $\overrightarrow{F_{Laplace}}$ *= iBa* $\overrightarrow{u_x}$ *(attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

3. *PFD appliqué à la tige* 4. *projeté sur* $\overrightarrow{ux}$ *:* $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)*

Bilan énergétique

On multiplie (EE) *par i :* $ei = Ri^2 = -Ba\,\dot{x}\,i$

On multiplie (EM) *par* $\dot{x}$ *:* $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} + Bia\,\dot{x}$

- ***Terme de couplage*** $Ba\dot{x}i$

$ei = -Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par le générateur induit*

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)*

La somme de ces deux puissances est nulle.

cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\underbrace{F\dot{x}}_{\mathcal{P}_{opérateur}} = \underbrace{\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt}}_{\frac{dEc}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{Joule}}$

Il y a c*onversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.*

7. ❤ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

Équation de	Maxwell Gauss	Maxwell Thomson	Maxwell Faraday	Maxwell Ampère
Régimes variables	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régime variable dans le vide	$\text{div}(\vec{E}) = 0$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régimes stationnaires (indépendants du temps)	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j}$
ARQS magnétique	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cong \mu_0\vec{j}$

8. ❤ ❤ Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ ou du champ $\vec{B}$ (au choix de l'examinateur) dans le vide et définir la célérité c des ondes électromagnétiques.

Équation pour le champs électrique $\vec{E}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{E})\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,(\vec{E})\right) - \vec{\Delta}\vec{E}$

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}\,(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{E})\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$

Avec **(MF)** : $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,(\vec{\boldsymbol{E}}) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}}$ **soit** $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}}\right) = \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}}\right)}{\partial \boldsymbol{t}}$$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,(\vec{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}}$ **d'où** $\vec{\Delta}\vec{E} = \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0}\,\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}^2}$

Finalement $\boxed{\vec{\Delta}\vec{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \vec{\boldsymbol{0}}}$

Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{B})\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,(\vec{B})\right) - \vec{\Delta}\vec{B}$

Avec **(MΦ)** : $\text{div}\,(\vec{B}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{B})\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$

Avec **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,(\vec{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}}$ **d'où** $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\boldsymbol{\mu_0\varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\vec{\Delta}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right)}{\partial t}$$

Or selon **(MF)** : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ **d'où** $\vec{\Delta}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$

D'où $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

9. ❤ Rappeler l'équation de Poynting en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t}=-\underbrace{\mathrm{div}(\vec{\Pi})}_{rayonnement}-\underbrace{\vec{j}.\vec{E}}_{dissipation}$$

Elle traduit le bilan local de conservation de l'énergie électromagnétique

Avec $u_{em}(M,t)$ densité volumique d'énergie électromagnétique associée en un point M, à une date t, au champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t)\right)$

$$u_{em}(M,t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(M,t)+\frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Telle que l'énergie électromagnétique U_{em} d'un système de volume (V) soit :

$$U_{em}(t)=\iiint_{(V)}u_{em}(M,t)\ d\tau$$

$\vec{\Pi}$ **vecteur de Poynting** correspondant au vecteur densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée en $W.m^{-2}$:

$$\mathcal{P}_{em}=\frac{dU_{em}}{dt}=\iint_{(\Sigma)}\vec{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ou $\vec{R}$ à travers une surface (Σ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface (Σ) dans le sens de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, et s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, qui coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique si elle est progressive.

10. ❤ On étudie un atome d'hydrogène qui, dans le cadre du modèle de Bohr, est constitué d'un noyau (charge $+e$, masse m_p) supposé fixe en un point O et d'un électron (charge $-e$, masse m_e). On considère que l'électron n'est soumis qu'à la force d'attraction électrostatique de la part du noyau. Montrer que le mouvement est plan. On considère que l'électron a une trajectoire circulaire de rayon r. Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de l'électron. Etablir la relation entre elles.

Dans un référentiel d'étude considéré galiléen, d'origine O, position du noyau considéré fixe, l'électron ne subit que la force d'attraction électrostatique de la part du noyau :

$\vec{F}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\overrightarrow{\mathbf{u_r}}$ qui peut s'écrire $\vec{F}=-\frac{k}{r^2}\overrightarrow{\mathbf{u_r}}$ avec $k=\frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0}$ constante positive.

Théorème du moment cinétique vectoriel dans ce référentiel galiléen d'étude par rapport au point O fixe :

$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{L(M)}/\mathrm{O,R}}{\mathrm{dt}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{F}\underbrace{=}_{colinéaires}\vec{0}$, donc le vecteur $\vec{L}$ est constant au cours du temps.

$\overrightarrow{L_0}=\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}\wedge m\,\vec{v}_0=\overrightarrow{cte}$ perpendiculaire au plan (Π₀) défini par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$ et $\vec{v}_0$ (vecteurs position et vitesse à $t=0$), or $\forall t,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires à $\vec{\mathrm{L}}$ donc compris dans le plan (Π₀) : mouvement **plan.**

Etude du mouvement circulaire de l'électron dans le référentiel d'étude galiléen.

En polaires : $\overrightarrow{v(\mathrm{M})_{\mathrm{R}}} = r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{a(\mathrm{M})_{\mathrm{R}}} = \left(-r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (r\,\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta}$

PFD : $\vec{F} = m\,\vec{a}$ projeté selon $\overrightarrow{u_\theta}$: $mr\ddot{\theta} = 0$ soit avec $r = cte \neq 0$: : $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = cte$: mouvement uniforme

selon $\overrightarrow{u_r}$: $-\frac{k}{r^2} = m(-r\,\dot{\theta}^2)$ donc $\dot{\theta}^2 = \frac{k}{mr^3}$ et $v = r\dot{\theta} = r\sqrt{\frac{k}{mr^3}}$

Energie cinétique de l'électron : $Ec = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,(r\dot{\theta})^2 = \frac{m\,r^2k}{2mr^3} = \boldsymbol{\frac{k}{2r}}$

Energie potentielle $E_p = -\frac{k}{r}$.

Energie mécanique : $E_m = E_p + E_c = -\frac{k}{r} + \frac{k}{2r} = -\boldsymbol{\frac{k}{2r}}$

$$E_m = E_p + E_c = \frac{E_p}{2} = -E_c$$

11. ** Rappeler l'énergie potentielle et le moment de forces d'un dipôle électrostatique dans un champ $\vec{E}$ uniforme, et indiquer l'effet du champ sur le dipôle. Que se passe-t-il dans un champ non uniforme ?

Un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrostatique extérieur uniforme possède une énergie électrostatique

$$\mathcal{E}_{p,ext} = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$$

*Et il est soumis à **un couple** : la résultante des forces est nulle mais le moment résultant des forces est non nul.*

***Moment résultant** (indépendant du point où on le calcule) :*

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

Ce couple tend à aligner le dipôle électrostatique dans la direction et le sens du champ $\vec{E}_{ext} = \vec{E}_0$ par rotation.

Les positions d'équilibre de ce dipôle correspondent aux situations où le dipôle est alignés avec le champ ; position stable si $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ sont colinéaires de même sens, position instable si $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ sont colinéaires de sens inverse.

*Si le champ n'est pas uniforme, il apparait une résultante des forces qui **entraine le dipôle vers les zones de champ fort**.*

12. ❤️ ❤️ Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_O\ \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$. Etablir la relation entre ω et k, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

Il faut exploiter l'équation de propagation de d'Alembert : $\overrightarrow{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, et ici $\overrightarrow{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Méthode N°1 : Sans passage aux complexes

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à $\boldsymbol{x}$, qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert :

or $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = -k^2E_O\ cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$ et $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_O\ cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$ soit, les grandeurs étant définies positives : $k = \frac{\omega}{c}$

Méthode N° : Utilisation de la notation complexe

On a alors $\underline{\vec{E}} = E_0\ \exp\mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$

Dérivées spatiales : $\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik\underline{\vec{E}} = -ikE_0\ \exp\mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$ $\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2\underline{\vec{E}} = -k^2E_0\ \exp\mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$

Dérivées temporelles : $\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}} = i\omega E_0\ \exp\mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$ $\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}} = -\omega^2E_0\ \exp\mathrm{i}(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\Delta\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$

On trouve

$$-k^2\underline{\vec{E}} = \boldsymbol{\frac{1}{c^2}} \times \left(-\omega^2\underline{\vec{E}}\right)$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\boldsymbol{\omega = kc} \qquad \text{soit} \quad \boldsymbol{\lambda = cT}$$

13. ❤️ ❤️ Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Equations de Maxwell en représentation complexe

Maxwell-Gauss : $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$ Maxwell-Faraday : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$

Maxwell-Flux : $\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$ Maxwell-Ampère : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

Relation de structure, d'après la relation de Maxwell Faraday :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Soit avec la relation de dispersion $\omega = kc$:

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{kc} = \frac{\overrightarrow{u_k} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

Cette relation reste vraie pour les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\overrightarrow{u_k} \wedge \vec{E}}{c}$$

Toute OPP étant une somme d'OPPH de même vecteur $\overrightarrow{u_k}$, cette relation reste vraie pour toute OPP

De même, Maxwell Ampère :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc}\vec{k} \wedge \vec{B} = -c\overrightarrow{u_k} \wedge \vec{B}$$

14. ❤️ Polarisation d'une onde électromagnétique : polarisation rectiligne, polarisation circulaire.

Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est celle du champ électrique.

Une onde OEM possède une **polarisation rectiligne** si le vecteur champ électrique de l'onde garde au cours du temps une direction constante **:** $\vec{e}_p = cte$.

Nous pouvons choisir par exemple la direction de l'Oem polarisée colinéaire à l'axe Oy, l'expression de ce champ est alors de la forme : $\vec{E} = E_y\,\vec{e}_y$ *avec* $E_y = E_{Oy}\,\cos(\omega t - kx + \varphi_y) = Re\left(\underline{E_{Oy}}\,e^{j\,(\omega t - kx)}\right)$

Plus généralement, avec $\vec{E} = \underbrace{E_{0x}\cos(\omega t - kz)}_{E_x}\vec{u}_x + \underbrace{E_{0y}\cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)}_{E_y}\vec{u}_y$, polarisation rectiligne ssi $\Delta\varphi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$,

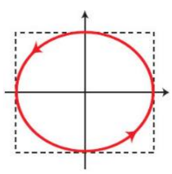
Pour que le champ $\vec{E}$ d'une OemPPH soit **polarisé rectilignement** et donc possède une direction constante au cours du temps, il faut que **ses deux composantes** dans le plan de phase oscillent **en phase ou en opposition de phase,** soit $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pi}$**,**

$$\vec{E} = \left|\begin{matrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{matrix}\right. = \cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} E_{0x} \\ (-1)^p E_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right. = \cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right. = E_0\cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{matrix}\right.$$

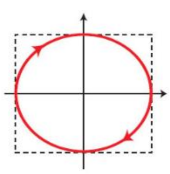
Avec α angle entre l'axe (Ox) et $\vec{E}$

Une onde électromagnétique possède **une polarisation circulaire** si, en tout point M, le champ électrique $\vec{E}$ possède une **norme constante** ; son extrémité décrit alors un cercle.

On parle de **polarisation circulaire gauche** si le cercle est parcouru dans le **sens trigonométrique** autour du vecteur d'onde $\vec{k}$, soit pour un observateur qui verrait arriver l'onde vers lui, et de **polarisation circulaire droite** pour une rotation dans le **sens horaire**



φ=π/2
circulaire gauche



φ=3π/2
circulaire droite

L'onde électromagnétique est **polarisée circulairement** ssi

Les deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde ont **même amplitude**

Ces deux composantes sont en **quadrature de phase, avec** $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}[\pi]}$

Polarisation droite pour $\boldsymbol{\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ **et polarisation gauche pour** $\boldsymbol{\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2}[2\pi]}$

15. On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$. Exprimer la densité volumique d'énergie et montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique. Dans le cas d'une OemPPH, établir l'expression de la densité volumique d'énergie moyenne.

Densité volumique d'énergie électromagnétique associée au champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$:

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Pour l'OemPP, les normes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont liés par la relation $E = Bc$ *soit* $\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0}$

Avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, *on a* $\frac{1}{c^2\mu_0} = \varepsilon_0$ *soit* $\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ *d'où*

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 B^2 c^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Si on considère de plus une OemPPH, le champ électrique est variable, de la forme

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\ \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$

La densité volumique d'énergie est donc variable dans le temps en un point donné, on peut calculer la **moyenne temporelle de la densité d'énergie** associée à l'onde :

$\langle u_{em}\rangle = \langle\varepsilon_0 E^2\rangle = \varepsilon_0 E_0^2\ \langle\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)\rangle$

En moyenne temporelle :

$$\langle\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\langle u_{em}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}}}$$

16. ❤️ Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\ \mathrm{mm}$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\ nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\ \mathrm{mW}$. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$. Calculer les amplitudes E_{max} et B_{max} des champs électrique et magnétique.

$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)}\vec{\Pi}.\overrightarrow{dS} = \Pi S = \Pi\pi r^2$ soit $P = \langle\mathcal{P}_{em}\rangle = \langle\Pi\rangle S = \langle\Pi\rangle\pi r^2$ d'où $\langle\Pi\rangle = P/\pi r^2$ or

Expression du vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$

Relation de structure (OPP) : $\vec{B} = \frac{\vec{u_k}\wedge\vec{E}}{c}$ d'où $B = \frac{E}{c}$ soit $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$

Avec $E = E_{max}\cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$:

$\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$

$\langle\Pi\rangle = \langle\frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)\rangle = \frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\langle\cos^2(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)\rangle$

soit avec $\langle\cos^2(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle\Pi\rangle = \frac{{E_{max}}^2}{2c\mu_0} = P/\pi r^2$$

$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4{,}9.10^2\ V.m^{-1}$; $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1{,}6.10^{-6}\ T.$

17. Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)}\vec{e}_z$ Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ? Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.