

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. relation de dispersion  |  1 |  1 ou 2

$$\vec{\Delta E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{avec} \quad \vec{\Delta E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert :

$$\text{or } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

$$\text{En simplifiant, on trouve } -k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0 \quad \text{soit} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Exercice 2. OemPPH et notation complexe  1 |  2 ou 3

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z) \end{cases} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \quad \text{où} \quad \vec{E}_0 = \begin{cases} E_{0x} \exp i \varphi_x \\ E_{0y} \exp i \varphi_y \\ E_{0z} \exp i \varphi_z \end{cases}$$

b) dans le cas où $\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$, équation de d'Alembert :

Obtention de la relation de dispersion :

$$\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées spatiales : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik \vec{E} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E} = -k^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées temporelles : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} = i\omega E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} = -\omega^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\vec{\Delta E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 \vec{E})$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

Equations de Maxwell en représentation complexe

Maxwell-Gauss : $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$	Maxwell-Faraday : $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$
Maxwell-Flux : $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$	Maxwell-Ampère : $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$

D'après la relation de Maxwell Faraday :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Soit avec la relation de dispersion $\omega = kc$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{kc} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Cette relation reste vraie pour les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Toute OPP étant une somme d'OPPH de même vecteur \vec{u}_k , cette relation reste vraie pour toute OPP

De même, Maxwell Ampère :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

Exercice 3. Démonstration de la relation de structure pour une OemPPH

Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ soit $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

\vec{k} et ω étant des constantes réelles, cette relation reste vraie pour les champs réels (linéarité de la partie réelle) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De plus, avec $\vec{k} = k \vec{u}_k$ et la relation de dispersion $\omega = kc$: $\vec{B} = \frac{k \vec{u}_k \wedge \vec{E}}{kc}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Cette relation étant vraie pour toute OPPH, elle est également vraie pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur \vec{u}_k .

De la même manière, équation de Maxwell-Ampère : $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$ donne pour les champs réels :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

$$\vec{E} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge c \vec{u}_k$$

Exercice 4. Structure des ondes planes progressives électromagnétiques



1) Cf. relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$, d'où propagation vers les x décroissants.

2) Variable $t - \frac{x}{c}$: propagation selon $+$ \vec{e}_x puis relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$

Exercice 5. OemPPH et polarisation rectiligne

a. On a $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$

Relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$$

b. L'onde représentée est un exemple d'OEMPPH polarisée rectilignement selon y et se propageant selon $+x$.

Son champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

Son champ magnétique s'écrit, à l'aide de la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$$

En accord avec la représentation de \vec{B} dans la direction (Oz)

$$c. \quad \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{array}{l} \text{propagation} \\ \text{selon } \vec{u}_z \end{array} \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \text{polarisation rectiligne} \\ \text{à } 45^\circ = \frac{\pi}{4} \end{array} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{array}{l} \text{propagation} \\ \text{selon } \vec{u}_z \end{array} \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{array} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

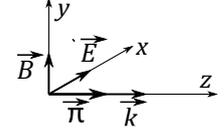
$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(\omega t - kz) (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = E_0' \cos(\omega t - kz) (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

Son champ magnétique s'écrit, à l'aide de la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{2 c} \cos(\omega t - kz) (-\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \frac{E_0'}{c} \cos(\omega t - kz) (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

Exercice 6. OemPPM polarisée  |  1 |  2 ou 3



1) Cf. schéma ci-contre (rappel : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$)

2) Le champ magnétique est déterminé grâce à la relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Remarque : le calcul de \vec{B} peut être fait composante par composante (linéarité)

	polarisation	propagation	plans d'onde	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$
a.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_y$	$\vec{e}_k = \vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ où $B_0 = \frac{E_0}{c}$
b.	$\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_x}{\sqrt{2}}$ Polarisation à 45° des vecteurs \vec{e}_y et \vec{e}_x	$\vec{e}_k = \vec{e}_z$	$z = cte$	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \right)$
c.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_z$ (le signe - ne change rien, on s'intéresse à la direction)	$\vec{e}_k = -\vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = -\frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{e}_z$
d.	$\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$	$\vec{e}_k = \vec{e}_x$	$x = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kx) \frac{\vec{e}_z - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = A\sqrt{2}/c$
e.	$\vec{e}_{pol} = \vec{e}_x$	$\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$	$y + z = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\dots) \frac{-\vec{e}_z + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = E_0/c$

Question d) : $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\|\vec{e}_x + \vec{e}_y\|}$ avec $\|\vec{e}_x + \vec{e}_y\| = K = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ soit $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$

Question e) : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(y+z)\right) \vec{e}_x = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_x$ d'où $\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ or par définition $\vec{k} = k \vec{e}_k$ d'où $\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$

Exercice 7. Polarisation circulaire

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - ky + \varphi(t)) \end{pmatrix} \text{ est la forme générale de l'onde.}$$

Une onde polarisée circulairement doit décrire un cercle dans le plan orthogonal à la direction de propagation, ce qui impose que $E_{0x} = E_{0z} = E_0$.

Ensuite, il s'agit que les composantes selon les axes x et z soient en quadrature de phase, ce qui impose que $\varphi = \pm\pi/2$.

On en déduit les expressions des deux types d'ondes circulaires droite ou gauche.

$$\vec{E}_{droite}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = -E_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_{gauche}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Nature d'ondes électromagnétiques

1) $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_x$: les OemPPH dans le vide sont nécessairement transverses, l'expression ne peut convenir.

2) $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$: OK : OemPPH polarisée rectilignement selon \vec{e}_y et se propageant selon $-\vec{e}_x$

3) $\vec{E}(M, t) = E_0(\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z) = E_0 \cos(\omega t - kx) (\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

OemPPH polarisée rectilignement à 45° et se propageant selon $+\vec{e}_x$ (on a bien une onde transverse)

4) $\vec{E}(M, t) = E_0(\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{e}_z) = E_0 \left(\cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z \right)$

OemPPH polarisée circulairement (polarisation circulaire gauche) se propageant selon $+\vec{e}_x$

Exercice 9. Énergie transportée par une onde plane



1. Relation de structure pour une OPP : $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ soit $E = cB$;

2. cf. cours, avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$: $u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$;

3. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, correspondant à la densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée vers l'extérieur ;

4. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \right)}{\mu_0} = \frac{E^2 \vec{u}}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$.

Exercice 10. Caractéristiques ondulatoires de l'onde émise par un laser Hélium Néon



$$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi S = \Pi \pi r^2 \text{ soit}$$

$$P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2 \text{ soit } \langle \Pi \rangle = P / \pi r^2 \text{ avec}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ soit } \Pi = \frac{EB}{\mu_0}$$

$$\text{avec } \vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \text{ d'où } B = \frac{E}{c} \text{ soit } \Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$$

$$\text{Avec } E = E_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) :$$

$$\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

$$\langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \right\rangle = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle$$

$$\text{soit avec } \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P / \pi r^2$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} ;$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

Exercice 11. Vecteur de Poynting

$\vec{E}(M, t) = E_0(\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y)$: OemPPH se propageant selon \vec{e}_z

avec la relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}(\cos(\omega t - kz) \vec{e}_y - \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x)$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left(\begin{array}{c} \cos(\omega t - kz) \\ \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{array} \wedge \begin{array}{c} -\sin(\omega t - kz) \\ \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{array} \right) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} (\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz)) \vec{e}_z = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z$$

Exercice 12. Etude d'une onde électromagnétique 1 (oral banque PT)

1. L'onde $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_z$ dépend de y et de x sans changement de variable possible permettant de se ramener à une unique variable cartésienne, il ne s'agit donc pas d'une onde plane, mais couplage des variables espace et temps avec $e^{j(kx - \omega t)}$: propagation selon $+\vec{e}_x$.

Polarisation = direction de \vec{E} : ici polarisation rectiligne selon \vec{e}_z .

2. Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide : $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Ici, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_z$ et $\vec{\Delta} \vec{E} = \Delta E_z \vec{e}_z = \left[\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \right) \right] \vec{e}_z$

$$\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right) = -k^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \quad \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \right) = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = -\left[k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right] E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow -\left[k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right] E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} = -\frac{1}{c^2} \omega^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)}$$

Soit

$$\boxed{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

On peut éventuellement poursuivre : pour qu'il y ait propagation, il faut avoir k réel, donc $k^2 > 0$ (sinon, cf. effet de peau, atténuation de l'onde).

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Les différentes grandeurs physiques étant définies positivement, on a :

$$\boxed{\omega > \frac{\pi c}{a}}$$

3. L'onde n'est pas plane, on ne peut donc pas utiliser la relation de structure. Avec l'équation de Maxwell-Faraday dans le vide et $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \vec{e}_z$:

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B}$ et

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)_{z,x} \\ -\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_{z,x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)_{z,x} \\ -\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_{z,x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \\ -jk E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\text{rot}(\vec{E}) = E_0 e^{j(kx - \omega t)} \left(\frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x - jk \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B}$$

D'où

$$\boxed{\vec{B} = E_0 e^{j(kx - \omega t)} \left(\frac{\pi}{j\omega a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y \right)}$$

4. Il faut exprimer les champs réels pour pouvoir exploiter la relation $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx - \omega t) \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx - \omega t) \\ E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) & -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx - \omega t) \\ -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(kx - \omega t) \\ \frac{\pi}{\omega a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0^2}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(kx - \omega t) \\ \frac{\pi}{4\omega a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin(2kx - 2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0} \left[\frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \underbrace{\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle}_{\frac{1}{2}} \vec{e}_x + \frac{\pi}{4\omega a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \underbrace{\langle \sin(2kx - 2\omega t) \rangle}_0 \vec{e}_y \right]$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x$$

$\langle \vec{\Pi} \rangle$ étant dirigé selon \vec{e}_x , il y a transport d'énergie dans cette direction-là

Exercice 13. Polariseur et analyseur



1) Seule la composante selon \vec{e}_x est transmise par le polariseur : $\vec{E}_2 = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$: obtention d'une onde polarisée rectilignement.

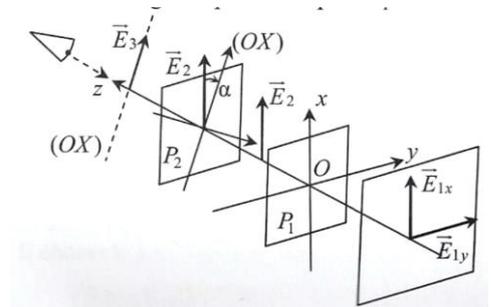
$$2) A) \quad \vec{\Pi}_2 = \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} = \frac{E_2^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_x \quad \text{soit}$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2}{2} \text{ car } \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{2};$$

Le second polaroïd ne transmet que la projection de \vec{E}_2 selon son axe (OX) :

$$\vec{E}_3 = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_X] \vec{e}_X = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \cos \alpha] \vec{e}_X$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2 \alpha}{2} \vec{e}_X$$



Le rapport des intensités est dans le même rapport que celui des normes du vecteur de Poynting moyen :

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle} = \cos^2 \alpha \quad (\text{loi de Malus})$$

b) Lorsque les directions (OX) et (Ox) sont orthogonales (polariseur et analyseur croisés), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $I_3 = 0$: extinction complète de la lumière émergente.

c) Si la polarisation est elliptique, on observe les situations suivantes quand on tourne P_2 :

- Quand l'axe (OX) coïncide avec le grand axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est maximale, idem pour l'intensité lumineuse.

- Quand l'axe (OX) coïncide avec le petit axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est minimale, idem pour l'intensité lumineuse.

- Entre ces deux cas, l'amplitude donc l'intensité varient entre ces deux valeurs extrêmes sans jamais s'annuler.

Si la polarisation est circulaire, la projection du champ incident sur l'axe du polariseur est constante, donc l'amplitude et l'intensité émergentes également.

d) L'observation du minimum nul à l'écran pour une orientation donnée de l'axe du polaroïd renseigne à la fois sur le caractère rectiligne de la polarisation incidente et sur sa direction (orthogonale à l'axe du second polaroïd placé dans sa position d'extinction). L'observation d'une intensité variant sans s'annuler indique une polarisation elliptique, une intensité ne variant pas une polarisation circulaire.

EXERCICES

Ondes planes progressives

Exercice 14. Structure de l'onde plane



Expression en $ky + \omega t = \omega t + ky$: Propagation selon $-\vec{e}_y$, et $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$

Relation de structure : $\vec{B} = \frac{-\vec{e}_y \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(ky + \omega t) \vec{e}_x$

Exercice 15. Longueurs d'onde de quelques ondes radios



$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 1,20 \text{ km}$; $\sigma = \frac{1}{\lambda} = 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$.

$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 3,00 \text{ m}$; $\sigma = \frac{1}{\lambda} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 2,09 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$.

$\lambda = 17 \text{ cm}$; $\sigma = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$; $k = 38 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 16. Caractéristiques d'une onde



a. $\vec{E} = \text{Re}(\vec{\underline{E}}) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x = E_0 \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \vec{e}_x = E_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_x$: propagation selon $+\vec{e}_z$, polarisation selon \vec{e}_x ; Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = B_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_y$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$;

b. $E_0 = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; $B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ T}$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 0,42 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$; $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 15 \text{ m}$.

Exercice 17. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM



	polarisation	propagation	plans d'onde	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$
a.	x	$+z$	$z = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$
b.	x	$-z$	$z = cte$	$\vec{B} = -B_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$
c.	z	$+x$	$x = cte$	$\vec{B} = -B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$

Exercice 18. Antenne cadre

L'antenne cadre fonctionne grâce à l'induction : le champ électrique variable produit un champ magnétique variable, dont le flux à travers le cadre de l'antenne sera donc également variable, générant une fem induite, et permettant la circulation d'un courant induit.

Selon l'énoncé, l'onde radio est de fréquence 27 MHz, cela signifie qu'elle est modélisée par une OPPH. Le champ électrique peut alors être écrit sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

Relation de structure (OPPH) : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Avec l'écriture retenue pour \vec{E} , on a une propagation dans le sens direct de l'axe (Ox) : $\vec{e}_p = \vec{e}_x$ et $\vec{k} = k\vec{e}_x$ soit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k\vec{e}_z \wedge E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x}{\omega} = \frac{kE_0 \cos(\omega t - kz)}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x) = \frac{kE_0 \cos(\omega t - kz)}{\omega} \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Pour la fréquence étudiée, la longueur d'onde est $\lambda = \frac{c}{f} \approx 100 \text{ m} \gg a$, on peut donc considérer le champ uniforme sur la surface du cadre de l'antenne.

Flux du champ magnétique à travers le cadre de l'antenne en orientant le plan de l'antenne selon \vec{e}_y :

$$\Phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{E_0}{c} a^2 \cos(\omega t - kz)$$

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{E_0}{c} a^2 \omega \sin(\omega t - kz)$$

Valeur efficace de la tension : $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} a^2 \omega$ soit

$$E_0 = \frac{c\sqrt{2}}{a^2\omega} E_{eff}$$

Exercice 19. Polarisation d'une onde EM (corrigé J. Kieffer)

1) Dans le cas général, on a

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = E_0 \begin{pmatrix} a \cos(\omega t - kz) \\ b \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit que dans le cas général, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse avec des axes principaux selon x et y .

2) L'onde serait rectiligne pour $a = 0$ ou $b = 0$ (et donc $b = 1$ ou $a = 1$).

L'onde serait circulaire droite si $a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'onde serait circulaire gauche si $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) C'est de l'algèbre linéaire ...

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \right) \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \right)$$

Donc le vecteur polarisation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a \\ -ib \end{vmatrix} = \frac{a}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \right) - \frac{b}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \right) = \underbrace{\frac{a-b}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}}_{\text{circulaire droite}} + \underbrace{\frac{a+b}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix}}_{\text{circulaire gauche}}$$

A noter qu'on retrouve bien que pour $a = b$ on a une circulaire gauche et $a = -b$ une circulaire droite...

■ Équations de Maxwell dans le vide, énergie électromagnétique

Exercice 20. Laser (Oral ATS)

Propagation : expression $\cos(\omega t - kx)$: propagation selon $+\vec{u}_x$

Polarisation : par définition direction du vecteur \vec{E} , soit ici (Oz)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Méthode N°1 : Relation de structure car OPP (non valable pour une onde stationnaire par exemple !!!)

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Méthode N°2 : Maxwell-Faraday avec $E_x = 0$; $B_x = 0$ (propagation selon $+\vec{u}_x$ et onde transverse) et $E = f(x, t)$ soit

$B = g(x, t)$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = k E_0 \cos(\omega t - kx) \Leftrightarrow B_{0y} = -\frac{k E_0}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow B_{0z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

$$\frac{P}{S} = \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle \vec{\Pi} \rangle}{c \varepsilon_0}} = 8,7 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } B_0 = \frac{E_0}{c} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Exercice 21. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule (ATS 2012)

1) Equations de Maxwell dans un milieu non chargé ($\rho = 0$), non conducteur ($\vec{j} = \vec{0}$) et assimilable au vide :

		Régime variable dans le vide
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = 0$
Maxwell-Faraday	MF	$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$

Unités du champ magnétique \vec{B} : tesla (T) et du champ électrique \vec{E} : newton par coulomb (N/C^{-1}) ou volt par mètre ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)

2) Equation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique \vec{E} dans le vide :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec **(MF)** : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou $\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t}$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

3) Soit $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$

Sens de propagation de \vec{E} : suivant $+\vec{e}_x$ (car \vec{E} est fonction de $\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$).

Direction de polarisation de \vec{E} : polarisation rectiligne suivant $+\vec{e}_z$.

4) On calcule d'une part $\vec{\Delta} \vec{E}$ puis d'autre part $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et on les remplace dans l'équation d'onde :

On a $\vec{E}(x, t) = E_z(x, t) \vec{e}_z$ d'où :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x + \Delta E_y \cdot \vec{e}_y + \Delta E_z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \vec{e}_z = \frac{\partial^2 \left(E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right)}{\partial x^2} \vec{e}_z = -E_0 \frac{\omega^2}{c^2} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \left(E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right)}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Leftrightarrow -E_0 \frac{\omega^2}{c^2} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z + \varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega^2 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow E_0 \omega^2 \left(\varepsilon_0 \mu_0 - \frac{1}{c^2} \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Si $\varepsilon_0 \mu_0 - \frac{1}{c^2} = 0$, soit $\boxed{\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0}$ alors l'onde vérifie l'équation de propagation.

5) Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = - \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_y$$

$$\vec{rot} \vec{E} = -E_0 \frac{\omega}{c} \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On intègre par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{B} = -E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y}$$

Autre méthode : L'onde se propage suivant \vec{e}_x , son vecteur direction de propagation est $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{e}_x \wedge E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z}{c} = -E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y$$

6) Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ s'exprime en **watt par mètre carré** (W.m⁻²). Il donne la **direction de propagation de l'énergie** associée à l'onde et son flux est la puissance instantanée traversant une surface.

7) Expression du vecteur de Poynting relatif à l'onde considérée :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z \right) \wedge \left(-E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y \right)$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{c \mu_0} E_0^2 \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_x}$$

8) Expression de $\langle \vec{\Pi} \rangle : \langle \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \rangle = \frac{1}{2}$ d'où $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 c \mu_0} \vec{e}_x}$

9) Une puissance moyenne $P = 50.10^{-3}$ W se répartit sur des sphères de surface $4\pi d^2$: $P = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot S = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot 4 \pi d^2$

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Application numérique : $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^2} = \frac{5}{4\pi} \cdot 10^{-4} = 0,4 \cdot 10^{-4} = 40 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} = \underline{40 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$

Détermination de E_0 : $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot 2c\mu_0}$

Application numérique :

$$E_0 = \sqrt{40 \cdot 10^{-6} \times 2 \times 3 \cdot 10^8 \times 4\pi \cdot 10^{-7}} = \sqrt{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times \pi \cdot 10^{-5+8-7}} = \sqrt{16 \times 6\pi \cdot 10^{-4}} = 17 \cdot 10^{-2} = \underline{0,17 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

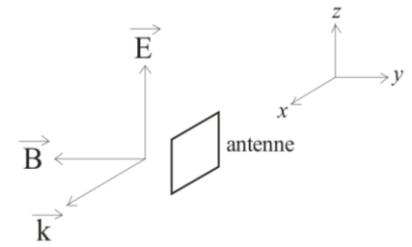
Détermination de B_0 : $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Application numérique : $B_0 = \frac{0,17}{3 \cdot 10^8} = 0,058 \cdot 10^{-8} = \underline{5,8 \cdot 10^{-10} \text{ T}}$

10) Le cadre doit être orienté pour que \vec{B} ait un bon flux au-travers. La loi de Lenz sur l'induction :

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

explique l'apparition d'une fém dans ce cadre.



11) Longueur d'onde : $\lambda = c/f$ A.N. : $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^6} = \frac{3}{4} \text{ m} = \underline{75 \text{ cm}}$

Exercice 22. Un problème d'orientation



1) propagation selon \vec{u}_x et polarisation rectiligne selon \vec{u}_z : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ en choisissant \vec{E} comme origine des phases.

Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$.

2) Vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$ soit $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$ car

$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$; notons que $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ est uniforme (indépendant du point de l'espace considéré).

$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, soit

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \text{ et}$$

$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$ (uniforme).

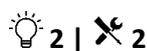
3) $s = K \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = K \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S} = K \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} S \cos \theta$

4) Pour optimiser la mesure (en veillant à ce que le capteur ne sature pas), il doit orienter son capteur de sorte que $\theta = 0$: incidence normale sur le capteur.

5) Puissance moyenne rayonnée : $\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{s}{K} = 2,0 \text{ mW}$ et amplitude du champ électrique :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2c\mu_0 s}{KS}} = 8,7 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Exercice 23. Onde sphérique



1) Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par $\vec{k} = k \vec{e}_r$.

2) Le champ magnétique est donné par $\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$.

3) Par définition, $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$

avec $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2}$, on en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_r$

- 4) La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)_{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \langle \Pi \rangle 4\pi r^2$ avec $\langle \vec{\Pi} \rangle$ uniforme sur la surface de la sphère et colinéaire à \vec{dS} soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 = 2\pi r^2 \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c}$.

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée**, la puissance P est donc constante et indépendante du rayon de la sphère ; en revanche, **elle s'étale** dans l'espace en étant répartie sur une surface de plus en plus grande, et l'amplitude de l'onde diminue donc quand r augmente.

On en déduit, avec $2\pi r^2 \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} = P : E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c P}{2\pi r^2}$ d'où $E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c P}{2\pi}}$.

Exercice 24. OPPM électromagnétique de direction quelconque (J. Kieffer)  1 |  2

1) On a $f = \frac{c}{\lambda} \simeq 4,9 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

2) On est dans le domaine visible (ce qui est plus évident en regardant la longueur d'onde...)

3) On est dans le vide et l'onde est une OPPM donc $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$.

4) Par définition sur un plan d'onde, la phase dans l'OPPM est constante soit donc $2x + 2y + z = \text{cste}$.
En particulier, on trouve la normale unitaire au plan qui vaut $\frac{1}{3}(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ et qui est aussi la direction de propagation de l'onde.

5) L'onde doit être transverse

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \Rightarrow 2E_x + 2E_y = 0 \Rightarrow E_y = -E_x$$

On a donc le vecteur \vec{E} qui s'écrit (utile pour la suite)

$$\vec{E} = E_0 \exp \left[i \left(\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6) L'onde est une OPPM donc on peut appliquer la relation de structure (dans le vide)

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{3c} \exp \left[i \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) \right] \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix}$$

Au passage, on vérifie rapidement que $\vec{E} \cdot \vec{B}$ et $\vec{u} \cdot \vec{B}$ sont nuls ce qui montre bien que la structure de l'onde est vérifiée ...

7) Par définition (et en n'oubliant pas de repasser en réel)

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right)$$

Soit en moyenne $\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$.

8) De même, le vecteur de Poyting vaut (toujours en n'oubliant pas de repasser en réel!)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{3\mu_0 c} \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix} = \frac{E_0^2}{3\mu_0 c} \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) \vec{u} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \varepsilon_0 E_0^2 c \vec{u} = \langle u_{em} \rangle c \vec{u}$$

On retrouve bien le résultat "classique" qui relie Π et u_{em} et le vecteur Π est bien dans la direction de propagation.

Exercice 25. Etude d'une onde électromagnétique 2 2 | ✖ 2

1) \vec{E} vérifie l'équation de d'Alembert: $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
ainsi que l'équation de Maxwell - Gauss: $\text{div} \vec{E} = 0$ dans le vide.

• $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ avec

$$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \left[\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y + d \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_z \right] : E_x = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = E_0 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \times \left(-\frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_0 E_0 d \exp(i(\omega t - k_0 z)) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{E_0} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) = -ik_0 \cancel{E_0} d \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z))$$

$$\boxed{\frac{\pi}{a} = -i k_0 \alpha} \quad (a)$$

$$\bullet \vec{\Delta} \vec{E} = \begin{cases} \Delta E_x = 0 \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{cases} \quad \Delta E_y = \underbrace{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \quad \text{avec } E_y = E_y(y, z)$$

$$\text{idem } \Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = E_0 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \times \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = E_0 \times (-ik_0)^2 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \times \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = E_0 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \times \alpha \times \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = E_0 \times (-ik_0)^2 \exp(i(\omega t - k_0 z)) \times \alpha \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] \\ E_0 \alpha \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] \end{cases}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = -E_0 \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] \exp(i(\omega t - k_0 z)) \begin{cases} 0 \\ \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ \alpha \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] E_y \\ -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] E_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \vec{E}$$

$$\text{D'où } \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{projection sur } \vec{e}_y : (1) \\ \text{project. sur } \vec{e}_z : (2) \end{cases}$$

$$(1): -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] E_y = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 E_y \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (b)$$

(2): on retrouve la même relation (b)

• On obtient donc finalement le système:
$$\begin{cases} \frac{\pi}{a} = -i k_0 d \\ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \end{cases}$$

d'où
$$k_0 = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \text{si} \quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega > \frac{\pi c}{a}}$$

$$\boxed{\frac{d}{a} = \frac{i\pi}{k_0 a}} \quad (d)$$

2) \triangle pas 1 OemPP!! on ne peut donc pas utiliser la relation de structure. Il faut passer par $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

• Calcul de $\text{rot } \vec{E}$:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{e}_{xx} \left[+\alpha E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) - (-i k_0) E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \right]$$

$$\text{rot } \vec{E} = \left[\frac{\alpha \pi + i k_0}{a} \right] E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{e}_x$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = + \text{rot } \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = B_x \vec{e}_x \quad (\text{en projetant MF})$$

avec absence de
constantes non nulles

soit $\frac{\partial B_x}{\partial t} = - \left[\frac{d}{a} \frac{\pi}{a} + i k_0 \right] E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)}$

$$B_x = - \frac{\left[\frac{d}{a} \frac{\pi}{a} + i k_0 \right] E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)}}{i \omega} \quad \left(\begin{array}{c} + \\ \text{---} \\ 0 \end{array} \right)$$

or avec $\frac{d}{a} = \frac{i \pi}{\mu_0 k_0}$, $\frac{d}{a} \frac{\pi}{a} + i k_0 = i \frac{\pi^2}{a^2} \frac{1}{k_0} + i k_0$

relation (d) $= \frac{i}{k_0} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 \right] = \frac{i}{k_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$

relation (b)

soit $-\frac{\left[\frac{d}{a} \frac{\pi}{a} + i k_0 \right]}{i \omega} = -\frac{i}{i \omega k_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$

et $\vec{B}_x = \frac{-\omega}{k_0 c} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$

3) L'onde n'est pas plane : elle dépend des deux coordonnées cartésiennes y et z sans qu'un changement de variable ne permette de se ramener à une unique variable cartésienne. 4/

Onde progressive se propageant selon $+\vec{e}_z$ (terme en $(\omega t - k z)$)
pseudo-harmonique de pulsation ω , mais avec une amplitude A modulée dans l'espace : $E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) = A(y)$

Transverse électrique : non, car propagation selon $+\vec{e}_z$, et composante E_z non nulle (possible car pas 1 OPP!)

Transverse magnétique : $\vec{B} \perp \vec{e}_z$: oui.

$$4) \langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$\vec{B}^* = \frac{-\omega}{k_0 c} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} = \frac{-\omega E_0^2}{\mu_0 k_0 c} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) & 0 \\ \hline d \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) & 0 \end{array} \right]$$

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} = \frac{-\omega E_0^2}{\mu_0 k_0 c} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \begin{array}{c} 0 \\ d \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \end{array} \quad \text{avec } \frac{1}{a} = \frac{i\pi}{k_0 a}$$

$$= \frac{-\omega E_0^2}{\mu_0 k_0 c} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \left[\frac{i\pi}{k_0 a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_z \right]$$

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\omega E_0^2}{2 \mu_0 k_0 c} \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_z$$

ou retrouve bien une propagation de l'énergie dans la direction de propagation de l'onde, c'est plutôt rassurant.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega E_0^2}{2 \mu_0 k_0 c} \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_z$$

Exercice 26. Etude d'une onde électromagnétique 3 (d'après Mines) (corrigé J. Kieffer) 2 | ✖ 2

- 1) Il ne s'agit pas d'une onde plane puisqu'elle dépend de z à $x = \text{cste}$ qui aurait été un plan d'onde si elle avait été plane...

Le terme en $\sin(\omega t - kz)$ rappelle un terme progressif et elle est bien entendue polarisée selon \vec{e}_z .

Cela peut faire penser à plein de choses : le guide d'onde pour ceux qui ont fait l'exercice, l'onde zig-zag, les interférences du coin d'air...

- 2) Comme il ne s'agit PAS d'une onde plane, il est impossible d'appliquer la relation de structure. Il faut donc revenir à l'équation de Maxwell-Faraday dont elle dérive

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E}{\partial x} \vec{e}_z = bE_0 \sin(bz) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x - kE_0 \cos(bz) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = E_0 \frac{b}{\omega} \sin(bz) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \frac{k}{\omega} \cos(bz) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

On peut remarquer au passage que l'onde n'est pas transverse... Ce qui n'est pas "grave" car elle n'est pas plane.

- 3) Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \cos^2(bz) \sin^2(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{E_0^2 b}{\mu_0 \omega} \cos(bz) \sin(bz) \sin(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

Et en moyenne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \cos^2(bz) \vec{e}_x$$

On trouve que l'énergie se propage dans la même direction que l'onde ce qui est "rassurant" (mais il existe des milieux bizarres où ce n'est pas le cas)

- 4) On est toujours dans le vide donc l'onde vérifie l'équation de d'Alembert et on peut en déduire la relation de dispersion

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \Rightarrow \text{en faisant } \cdot \vec{e}_y, -\frac{\omega^2}{c^2} E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -(k^2 + b^2)E$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 c^2 = \omega^2 - b^2 c^2}$$

On retrouve une relation de Klein Gordon.

- 5) La densité d'énergie électromagnétique vaut

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(bz) \sin^2(\omega t - kx) + \frac{E_0^2}{2\omega^2 \mu_0} (b^2 \sin^2(bz) \cos^2(\omega t - kx) + k^2 \cos^2(bz) \sin^2(\omega t - kx))$$

En passant en moyenne temporelle puis moyenne spatiale

$$\langle \langle u_{em} \rangle_t \rangle_z = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8} + \frac{E_0^2}{8\omega^2 \mu_0} (b^2 + k^2) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

En utilisant la relation de dispersion $b^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ et $1/(\mu_0 c^2) = \varepsilon_0$.

De même, on a la moyenne temporelle et spatiale du vecteur de Poyting qui vaut

$$\langle \langle \vec{\Pi} \rangle_t \rangle_z = \frac{E_0^2}{4\mu_0 \omega} k \vec{e}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \frac{kc^2}{\omega} \vec{e}_x$$

Si on écrit $\vec{\Pi} = u_{em} \times v_g$ où v_g est la vitesse de l'énergie (donc la vitesse de groupe), on a

$$v_g = \frac{kc^2}{\omega} \Leftrightarrow v_g \frac{\omega}{k} = v_g v_\varphi = c^2$$

On retrouve la relation classique pour vitesse de phase et la vitesse de groupe dans le cas de la relation de Klein-Gordon...

Exercice 27. Mesure de la concentration en CO2 dans l'atmosphère (E. Thibierge)

- 1- Avec $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$: OemPPH

Propagation : expression $\cos(\omega t - kz)$: propagation selon $+\vec{e}_z$

Relation de structure car OPP (non valable pour une onde stationnaire par exemple !!!)

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x) \wedge \left(E_0 \frac{1}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \right)$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z}$$

- 2- Raisonons sur une section droite du faisceau de normale \vec{e}_z . Comme le vecteur de Poynting est uniforme sur toute cette surface,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{1}{c \mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) S \right\rangle = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$$

$\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$ d'où

$$\boxed{I = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c}}$$

- 3- Bilan d'énergie pour une tranche d'épaisseur dz : entrée d'énergie sous forme de rayonnement par la face située en z , sortie d'énergie par la face en $z + dz$, et énergie absorbée par le CO_2 .

$$\langle dU_{em} \rangle = \mathcal{P}_{ray}(z)dt - \mathcal{P}_{ray}(z + dz)dt - \mathcal{P}_{abs}(z)dt \stackrel{\substack{\text{régime} \\ \text{stationnaire}}}{=} 0$$

Les puissances rayonnées s'expriment à l'aide du flux du vecteur de Poynting :

$$\mathcal{P}_{ray}(z) = \left\langle \iint_{\text{face } z} \vec{\Pi}(z) \cdot d\vec{S} \right\rangle = SI(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{ray}(z + dz) = SI(z + dz)$$

La tranche de volume Sdz contient $nSdz$ molécules de CO_2 qui absorbent donc en moyenne une puissance

$$\mathcal{P}_{abs}(z) = pnSdz = \sigma I(z)nSdz$$

Soit dans le bilan d'énergie :

$$SI(z)dt - SI(z + dz)dt - \sigma I(z)nSdzdt = 0$$

$$[I(z + dz) - I(z)] + \sigma I(z)ndz = 0$$

$$\boxed{\frac{dI}{dz} + \sigma nI(z) = 0}$$

- 4- Absorbance $A = \ln \frac{I(z=0)}{I(z=L)}$, or en résolvant l'équation différentielle obtenue :

$$I(z) = K \exp(-\sigma n z)$$

Condition aux limites : $I(z = 0) = I_0 = K$ $I(z) = I_0 \exp(-\sigma n z)$

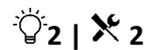
Soit

$$A = \ln \frac{I(z = 0)}{I(z = L)} = \ln \frac{I_0}{I_0 \exp(-\sigma n L)} = \ln(\exp(\sigma n L)) = \sigma n L$$

La longueur de l'échantillon L et la section efficace σ étant connues, l'absorbance est directement proportionnelle à la quantité n que l'on cherche à mesurer.

- 5- L'équation d'état des gaz parfaits indique que la concentration d'un gaz dépend directement de la température et de la pression, qu'il faut donc contrôler pour que les mesures soient fiables. Procéder par étalonnage plutôt que par une mesure absolue permet de s'affranchir de manière efficace et reproductible de toutes les imperfections du dispositif : réflexions parasites, etc.
- 6- On constate une hausse quasi-linéaire (voire un début d'exponentielle ...) due aux émissions humaines de CO_2 par la combustion de charbon, pétrole, gaz, etc. Les oscillations saisonnières sont dues au cycle de la végétation : comme il y a nettement plus de terres émergées dans l'hémisphère Nord, la consommation de CO_2 par photosynthèse est maximale au printemps/été de cet hémisphère,

Exercice 28. Superposition d'OemPPH polarisées et déphasées – énergie (J. Le Berre)



Chacun des champs électriques s'écrit $\vec{E}_i = E_m \cos(\omega t - k\vec{e}_i \cdot \vec{r})\vec{e}_y$ avec $k = \omega/c$.

Le champ résultant de la superposition s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_m \vec{e}_y [\cos(\omega t - k\vec{e}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\omega t - k\vec{e}_2 \cdot \vec{r})]$.

En utilisant les formules trigonométriques, avec $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2 \cos \theta \vec{e}_z$ et $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 2 \sin \theta \vec{e}_x$, on en déduit que $\vec{E} = 2E_m \vec{e}_y \cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{r}\right) \cos\left(\frac{k}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{r}\right)$ qui se simplifie en

$$\boxed{\vec{E} = 2E_m \vec{e}_y \cos(\omega t - kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta)}$$

L'onde reste propagative selon la direction \vec{e}_z à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{k \cos \theta}{\omega} = \frac{\cos \theta}{c}$, mais elle n'est plus plane à cause du terme en $\cos(kx \sin \theta)$. En effet, si on cherche l'ensemble des points de l'espace tels qu'à un instant t , le champ soit de même amplitude, on soit résoudre $\cos(\omega t - kz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta) = c^{ste}$, ce qui n'est pas l'équation d'une surface plane.

Le champ magnétique total se calcule en appliquant la relation de structure sur chaque OPPH (mais pas sur la somme !!) et en sommant les deux champs

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{E}_1}{c} + \frac{\vec{e}_2 \wedge \vec{E}_2}{c}$$

On peut retrouver ce résultat plus simplement en exploitant l'équation de MF ; $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ qui peut quant à elle être directement appliquée au champ électrique total :

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -2kE_m \cos\theta \vec{e}_x \sin(\omega t - kz \cos\theta) \cos(kx \sin\theta) - 2k \sin\theta E_m \vec{e}_z \cos(\omega t - kz \cos\theta) \sin(kx \sin\theta)$$

Donnant par intégration temporelle (comme on cherche une solution ondulatoire, on prendra une constante d'intégration nulle)

$$\vec{B} = 2 \frac{kE_m}{\omega} (-\vec{e}_x \cos\theta \cos(\omega t - kz \cos\theta) \cos(kx \sin\theta) + \vec{e}_z \sin\theta \sin(\omega t - kz \cos\theta) \sin(kx \sin\theta))$$

Le calcul du vecteur de Poynting met en évidence la propagation de l'énergie globalement selon $+\vec{e}_z$ mais une répartition non uniforme de celle-ci dans l'espace. On obtient en effet que l'éclairement lumineux ne dépend que de la variable x , on obtient des **franges d'interférences rectilignes et parallèles à la direction x'** .

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{2E_m^2}{\mu_0 c} \cos\theta \cos^2(k_0 x \sin\theta) \vec{e}_z$$

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 29. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM 2

	polarisation	propagation	plans d'onde	$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$
f.	x	$\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_z}{2}$	$y + \sqrt{3}z = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\dots) \frac{-\vec{e}_z + \sqrt{3}\vec{e}_y}{2}$ où $B_0 = E_0/c$
g.	$\vec{e}_{pol} = \frac{\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z}{2}$	$+x$	$x = cte$	$\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kx) \frac{\sqrt{3}\vec{e}_z - \vec{e}_y}{2}$ où $B_0 = E_0/c$

Exercice 30. Énergie reçue par le toit d'une maison 2 | 1

b. Vecteur de Poynting donnant la puissance surfacique : $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \Pi S$ soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S$ et $\langle \Pi \rangle = \frac{P}{S}$

En considérant pour simplifier une OPPM : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$ avec $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$ d'où $B = \frac{E}{c}$ soit $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$

Avec $E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$: $\Pi = \frac{E_0^2}{c\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$

$\langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \right\rangle = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle$ soit avec $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}. \quad \text{A.N. : } \langle \Pi \rangle \approx 1,3 \text{ kW/m}^2;$$

c. maison de $100 \text{ m}^2 \Rightarrow \mathcal{P}_{maison} = \langle \Pi \rangle S = 130 \text{ kW}$;

d. Énergie récupérable par jour : $\mathcal{E}_{réc} = \mathcal{P}_{maison} \Delta t = 780 \text{ kWh}$ avec $\Delta t = \frac{24h}{4} = 6h$

e. Au vu des puissances données, une famille ne devrait pas consommer toute l'énergie disponible, même en ajoutant l'éclairage ; de l'énergie peut être revendue à EDF.

Par exemple : cuisinière pendant 1h, lave-linge + sèche-linge pendant 2h, four pendant 1h, petit électroménager pendant 2h, ordinateur, TV, etc. pendant 20 h : $\mathcal{E}_{conso} = 10 + 2 \times 3 + 2,5 + 2 \times 2 + 0,2 \times 20 = 24,7 \text{ kWh}$.

Exercice 31. OemPPH de direction quelconque

f. $f = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14}$ Hz ; onde lumineuse dans le domaine visible ($\lambda = 6.10^{-7}$ m = 600 nm).

Pour une onde de la forme $f(M, t) = f_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ on a $f(M, t) = f_m \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi)$

Ici :

$$\vec{k} = \frac{K}{3}(2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10,5.10^6 \text{ m}^{-1}, \text{ et } k = \frac{K}{3}\sqrt{4 + 9 + 1} \text{ soit } K = 8,4.10^6 \text{ m}^{-1}$$

g. Plan d'onde = plan équiphase : équation $2x + 3y + z = cte$

h. Equation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + 0$, soit $\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial y}$ ce qui donne tous calculs faits :

$$E_y = -E_x.$$

i. OPP : on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{K(2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge (E_x \vec{e}_x - E_x \vec{e}_y)}{\omega} = \frac{KE_x}{3\omega}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{k\sqrt{14}E_x}{\omega}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{\sqrt{14}E_x}{c}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

j. $u_{em}(M, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, on en déduit $u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ soit

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 : \text{uniformément répartie dans l'espace}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k \text{ soit } \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ est uniforme (indépendant du point de l'espace considéré).

Exercice 32. Champ du vide ?  2 |  2

1) M.G. dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$.

Ici, $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} = -\frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \neq 0$: incompatible avec M.G., un tel champ ne peut exister dans le vide.

2) $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = -\frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = 0$

soit $\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = \frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)$ d'où $E_y(x, y, t) = -E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + K$, avec K valeur moyenne temporelle de E_y , soit également de E , d'où $K = 0$.

3) $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_x - E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_y = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_x - \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_y\right)$$

Champ magnétique associé déterminer à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{Avec } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x(x,y,t) \\ E_y(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} + \vec{0} + \left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{z,x} \right] \vec{e}_z = \vec{0}$$

On a donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ soit $\vec{B} = \vec{K}' = \vec{0}$ (valeur moyenne nulle)

4) Equation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{0}$ (cf. $\vec{B} = \vec{K}' = \vec{0}$)

soit $\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{e}_y$: cette région vide de charge n'est pas vide de courant.

5) Densité volumique d'énergie : $u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, soit $u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

avec $E^2 = \|\vec{E}\|^2 = E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right) \left(\cos^2\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \right) = E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$

soit $u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$: la densité d'énergie dépend de la zone de l'espace considérée, et tend vers zéro quand x augmente

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$ puisque $\vec{B} = \vec{0}$ pas de transport d'énergie

Exercice 33. Identification et caractérisation d'une onde électromagnétique (J. Le Berre)  2 |  2

- OEMPPH polarisée rectilignement
- $\lambda = 44,4 \text{ m}$, $f = 6,76 \text{ MHz}$, onde radio (bande MF, HF)
- On exploite l'équation de Maxwell Gauss $\Rightarrow E_{0y} = -E_0$
- On exploite la relation de structure des OPPH $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$
- $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 2\varepsilon_0 c E_0^2 \frac{\vec{k}}{k} \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$.

Exercice 34. Polarisation d'onde (J. Le Berre)  2 |  2

- $\alpha = 0, \alpha = \pm 1$
- a) circulaire droite b) $\vec{E} = E_0(\vec{e}_y - j \cdot \vec{e}_z) \exp[j(\omega t - kx)]$ c) $\vec{E}' = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z$ et $\vec{E}'' = E_0(\vec{e}_y + j \cdot \vec{e}_z) \exp[j(\omega t - kx)]$

Exercice 35. Principe du radar (J. Le Berre)  2 |  2

- 123 km
- 100 m, onde radar
- $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz)$ avec $\vec{k} = k \vec{e}_z$
- Le plan de l'obstacle constitue un nœud du champ électrique total, $\vec{B}_r(M, t) = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y \cos(\omega t + kz)$
- La longueur d'onde de 100 m est bien supérieure à la dimension du circuit de détection, le champ magnétique peut y être considéré comme uniforme
- Le flux magnétique $\varphi = \frac{NE_0 hL}{c} \cos(\omega t + kL)$
- $e = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{N\omega E_0 hL}{c} \sin(\omega t + kL)$

