

DS. DE PHYSIQUE N°4 - MPI**Durée : 4 h**

Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).

Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fautive ne sont pas comptabilisés.

Attention ! il faudra **choisir entre le problème 3A (E3A) et le problème 3B (Mines Ponts)**, puis choisir à nouveau **entre problème 4A (Mines Pont) et le problème 4B (Centrale)**

PROBLEME N°1 : PHENOMENES PHYSIQUES EN MONTAGNE : EFFET DE TENSION INDUITE DE LA Foudre

La foudre se manifeste particulièrement en montagne, milieu propice à la formation de nuages d'orage. Elle peut causer des dégâts matériels de plusieurs façons. L'une d'elle est par un effet de tension induite dans les circuits électriques avoisinants. Ces circuits peuvent être l'installation électrique d'un refuge de montagne, ou les accessoires électroniques du randonneur.

Pour étudier ceci, on modélise d'abord le coup de foudre comme un fil rectiligne infini, d'axe z vertical ascendant, parcouru par un courant I constant et dirigé dans le sens des z croissants. On se place dans le vide. On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe z . La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

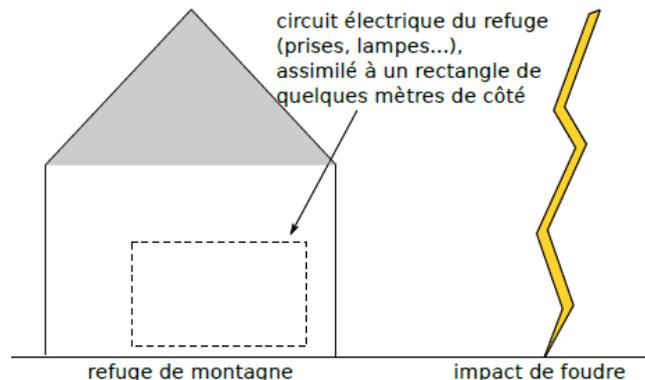
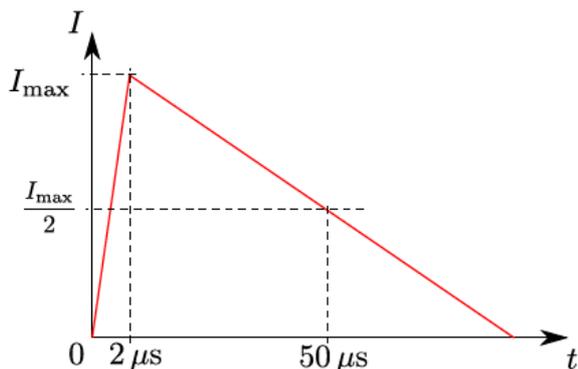
- 1 - En utilisant les symétries et invariances du problème, déterminer la direction du champ magnétique produit par le fil, et les variables dont il dépend.
- 2 - Déterminer ensuite l'expression du champ magnétique \vec{B} produit à l'extérieur du fil.

Le courant I n'est en réalité pas constant. On admet toutefois que l'expression précédente du champ magnétique reste valable à chaque instant en remplaçant I par $I(t)$.

- 3- (**Résolution de problème**) En utilisant notamment les deux schémas ci-dessous, et en proposant des ordres de grandeur raisonnables pour les dimensions considérées, estimer la valeur maximale de la force électromotrice (ou tension) induite dans le circuit électrique d'un refuge de montagne, si le coup de foudre tombe à une distance $d = 10 \text{ m}$ de celui-ci.

Commenter le résultat.

Remarque : on commencera par identifier les effets et lois physiques en jeu. On effectuera des approximations pour rendre les calculs simples.



Document 10a : profil standardisé de l'intensité $I(t)$ délivrée par un coup de foudre, utilisé pour les études de risques dans les installations électriques. On pourra prendre $I_{max} = 50 \text{ kA}$.

Document 10b : vue schématique de la situation.

PROBLEME N°2 : CONCEPTION D'UN PROTOTYPE DE MACHINE A PANCAKES

- Les données utiles à la résolution du sujet figurent en fin de chaque partie.

Traditionnellement servis au petit-déjeuner dans les pays d'Amérique du Nord (Canada, États-Unis), accompagnés par exemple de sirop d'érable, les pancakes sont des crêpes plus petites (5 à 10 cm de diamètre) et plus épaisses que les crêpes classiques. Ils sont aujourd'hui appréciés et dégustés dans le monde entier. Ce sujet étudie certains aspects de la conception d'un prototype de machine à poêles et distributeur de pâte à pancakes, transportable et peu encombrant, permettant de cuire à la maison des pancakes authentiques de manière ergonomique et automatisée.

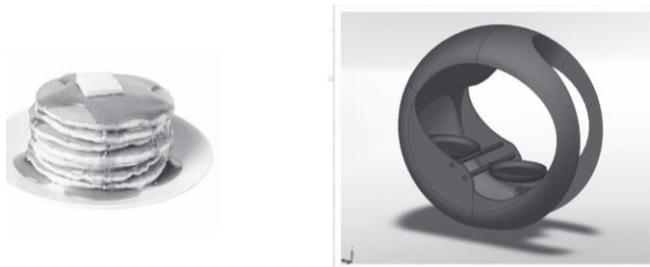


Figure 1 - À gauche : assiette de pancakes nappés de sirop d'érable. À droite : perspective de design de la machine à pancakes, en vue de sa commercialisation

Partie I - Chauffage des poêles par induction

Le système est constitué de deux poêles. Lorsque la première poêle a cuit une face du pancake, un système de roue-vis sans fin programmé par un actionneur (non détaillé dans ce sujet) met en rotation cette poêle et projette ainsi le pancake dans la seconde poêle, chargée de cuire l'autre face. Plusieurs options sont envisageables pour chauffer les poêles : gaz, résistance chauffante, induction (voir **tableau 1**). Le chauffage par induction permet d'obtenir une bonne saisie de la pâte à pancakes, tout en satisfaisant des exigences de sécurité et en minimisant l'encombrement.

Système / Contrainte	Sécurité	Encombrement	Saisie de la pâte
Gaz	-	-	+
Résistance chauffante	+	-	-
Induction	+	+	+

Tableau 1 Comparaison des différents modes de chauffage envisagés

Après avoir choisi l'alimentation et l'onduleur, qui permet de convertir le courant continu en courant alternatif, l'objectif de cette partie est de dimensionner le nombre de spires de la bobine permettant d'obtenir une température de poêle de 160 °C. Cette condition est nécessaire à l'obtention d'un pancake bien cuit, doré et savoureux.

Afin de concevoir le module à induction, on choisit une alimentation électrique pouvant fournir 3 A en continu (régime permanent stationnaire) pour une tension maximale de 30 V.

On utilise le montage représenté sur la **figure 2**, l'inductance L étant celle de la bobine destinée au chauffage.

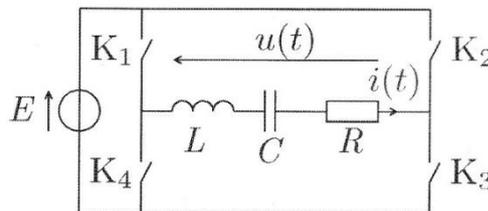


Figure 2 — Onduleur à circuit RLC série : schéma du montage

1.1 - Puissance induite dans la poêle

Le circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la **figure 4**. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe ; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R , parcourue par une intensité $i(t)$. Dans la suite, on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , muni de la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

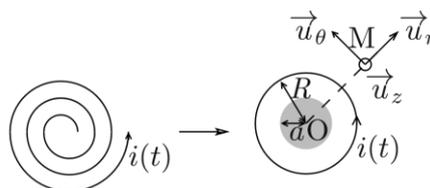


Figure 4 — Bobine : schéma et modélisation

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e , de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ . Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant μ_0 la perméabilité magnétique du vide, on donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R} \vec{u}_z$$

4- Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où S désigne une surface s'appuyant sur le contour fermé \mathcal{L} .

Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

On cherche le champ électrique induit au sein de la poêle sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

5- Déterminer $E(r, t)$ en fonction de $r, t, R, I_0, \omega, \mu_0$ et de μ_r .

6- Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer leur densité de courant volumique \vec{j} en tout point de la poêle, puis la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.

7- Etablir l'expression de la puissance moyenne totale induite sur le volume de la poêle.

8- On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ?

Données pour la partie I

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Propriétés physiques de la fonte :

- Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 80$
- Masse volumique : $\rho = 7,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- Conductivité électrique : $\gamma = 1,0 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
- Capacité thermique massique : $c = 5,0 \cdot 10^2 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- Conductivité thermique : $\lambda = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

PROBLEME N°3 -A : SUJET FACILE - QUELQUES ASPECTS DE L'INDUSTRIE NUCLEAIRE

Le dénouement de la COP26 à Glasgow a été marqué par l'intervention de l'Inde pour demander non plus une sortie du charbon mais une réduction des gaz à effet de serre. Dans son allocution télévisée en date du 9 Novembre 2021, le Président de la République Française, Emmanuel Macron, a annoncé la relance de la construction de réacteurs nucléaires. C'est une annonce majeure pour le domaine de l'énergie, le recours aux énergies fossiles s'en trouvant grandement limité.

Partie I – Centrale nucléaire

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté figure 7. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit primaire. Cette eau permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit secondaire et dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit tertiaire est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

Une centrale nucléaire peut être vue comme une machine ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur :

- une source chaude (eau du circuit primaire) de température $T_c = 573 \text{ K}$;

- une source froide (eau de la Moselle) de température moyenne annuelle $T_F = 287$ K.

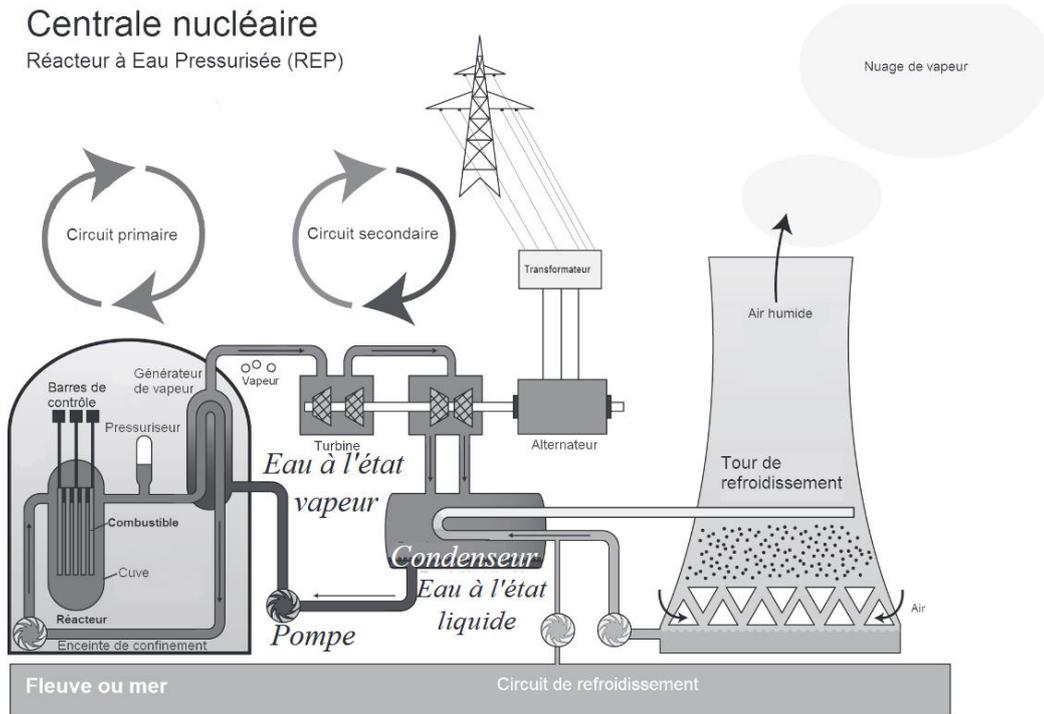


Figure 7 – Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Document 1 - Centrale nucléaire - Site de Cattenom

Mise en service entre 1986 et 1991, la centrale de Cattenom située dans le département de la Moselle, participe activement au développement du tissu économique de la région. En 2020, les contrats passés avec des entreprises locales ont représenté plus de 35 millions d'euros d'investissement.

Une énergie sûre, neutre en $\text{CO}_2(g)$

La centrale nucléaire de Cattenom possède 4 réacteurs à eau pressurisée de 1 300 MWe (mégawatt électrique) chacun. En 2020, elle a produit 31,18 TWh d'électricité sans émettre de $\text{CO}_2(g)$, ce qui couvre les besoins de près de 6,8 millions de foyers français chaque année.

La surveillance de l'environnement

Certifiée ISO 14001 depuis 2004, la centrale surveille en permanence son impact sur l'environnement. En 2020, 6 850 prélèvements et 20 774 analyses ont été réalisés pour s'assurer de l'efficacité des démarches environnementales en vigueur.

- Calculer le rendement η de la centrale sachant qu'il est égal à 60,0 % du rendement maximal de Carnot. Vous établirez tout d'abord l'expression du rendement de Carnot.
- Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_{th,C}$ reçue de la source chaude vers le fluide caloporteur en fonction de η et \mathcal{P} , puissance mécanique algébriquement reçue
- Résolution de problème** – Pour ce type de système étudié en tant que système ouvert au travers duquel il y a un écoulement, on exploite le premier principe industriel. Entre l'amont et l'aval de la centrale nucléaire, le premier principe industriel appliqué à l'eau de la Moselle en contact avec le circuit tertiaire donne la variation d'enthalpie :

$$\rho_e D_v (h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th,F}$$

Estimer la variation de température ΔT de l'eau de la Moselle due à la présence de la centrale nucléaire de Cattenom. Commenter la valeur obtenue.

Donnée : Débit volumique annuel moyen de la Moselle : $D_v = 3,3 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Partie II - L'industrie nucléaire et le stockage des déchets nucléaires

L'objet de cette partie est d'aborder l'un des points délicats de l'industrie nucléaire, celui du retraitement des déchets radioactifs.

La radioactivité est un phénomène physique naturel au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent en dégageant de l'énergie, pour se transformer en noyaux atomiques stables. L'usage est de caractériser l'activité d'un atome par sa période (ou demie vie) radioactive $T_{1/2}$, temps au bout duquel la concentration initiale a été divisée par deux.

Le projet français Cigéo vise à enfouir, sous 500 m de roches argileuses, les déchets nucléaires dits «de moyenne et haute activité à vie longue» ($T_{1/2} > 31 \text{ a}$) – soit les plus dangereux - sur un terrain situé à cheval sur les départements de la Meuse et de la Haute-Marne (site de Bure). Afin de préparer ce projet, un laboratoire souterrain a été mis en service sur ce site en 2000 par l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra). Les combustibles usés, qui constituent l'essentiel des déchets de haute activité et qui resteront radioactifs des centaines de milliers d'années, sont actuellement entreposés dans les installations d'Orano (ex-Areva) à La Hague (Manche) sous forme de «colis» vitrifiés.

On étudie de manière très simplifiée la possibilité de stocker de tels déchets radioactifs, sous une couche argileuse d'épaisseur $L = 5,0 \cdot 10^2 \text{ m}$. Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont exothermiques. Ils sont vitrifiés dans des colis qui dégagent une puissance $\mathcal{P}_0 = 2,0 \text{ kW}$ dans la première décennie du stockage et décroissante dans le temps.

N colis sont entreposés à 500 m sous la surface. Ils sont uniformément répartis sur une surface S .

La température dans l'argile est notée $T(z, t)$. L'argile a une masse volumique $\rho_a = 1,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, une conductivité thermique $\lambda_a = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$, une capacité thermique massique $c_a = 7 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{kg}^{-1}$ et une diffusivité thermique D_a , toutes uniformes.

L'épaisseur de la couche dans laquelle seront entreposés les déchets radioactifs est négligeable devant L .

12- Citer la loi de Fourier en nommant les différentes grandeurs physiques qui interviennent et en précisant les unités. Quel est son contenu physique ?

13- En réalisant un bilan d'énergie interne sur une tranche d'argile de surface S d'épaisseur dz , montrer que $T(z, t)$ est solution de l'équation de la diffusion thermique (1) où le coefficient de diffusivité thermique D_a sera exprimé en fonction de ρ_a , c_a et λ_a . Préciser l'unité de D_a .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

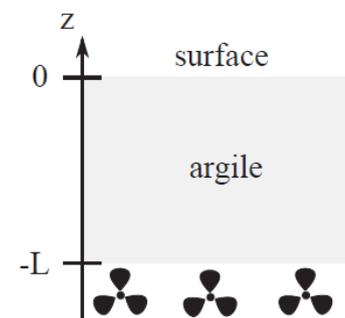


Figure 6 – Paramétrage du problème

Simplifier l'équation de la diffusion thermique (1) dans le cas stationnaire.

14- Interpréter les deux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-L} = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S} \quad T(z=0, t) = T_{ext} \quad (2)$$

15- Donner l'expression de $T(z)$ en régime permanent. Que vaut $T(-L)$?

Donnée numérique :

• Température annuelle moyenne de l'atmosphère sur le site de Bure : $T_{ext} = 13^\circ\text{C}$.

16- La température dans l'argile ne doit pas dépasser T_{max} afin que ses propriétés de confinement ne soient pas dégradées. Le stock total de déchets français représente $N = 3,6 \cdot 10^4$ colis. Estimer la surface S nécessaire à leur enfouissement, si $T_{max} = 100^\circ\text{C}$.

17- On envisage d'attendre 30 ans avant d'enfouir les déchets, pendant lesquels ils sont entretenus en surface. Pourquoi ?

On se propose dans la suite de simuler numériquement l'évolution temporelle du champ de température $(z, t) \mapsto T(z, t)$ de la couche supérieure d'argile au cours du temps. L'objectif sera donc d'approcher la fonction $(z, t) \mapsto T(z, t)$.

Notations

• h est le pas de la subdivision uniforme $(t_i)_{i \in \llbracket 0; N_t \rrbracket}$ de l'intervalle de temps $[0, \Delta t = 3\tau]$ où τ est la durée caractéristique de diffusion thermique.

$t_i = i \cdot h$ et $\tilde{T}^i(z)$ est l'approximation de $T(z, t_i)$ pour $i \in \llbracket 0; N_t \rrbracket$

• k est le pas de la subdivision uniforme $(z_n)_{n \in \llbracket 0; N_z \rrbracket}$ de l'intervalle $[-L, 0]$

$z_n = n \cdot k$ et $\tilde{T}_n(t)$ est l'approximation de $T(z_n, t)$ pour $n \in \llbracket 0; N_z \rrbracket$

En conclusion : \tilde{T}_n^i est l'approximation numérique de la solution $T(z = n \cdot k, t = i \cdot h)$ sur un maillage spatial de pas k et une discrétisation temporelle de pas h .

18- Donner l'expression du pas de discrétisation temporelle h en fonction de Δt et N_t .

19- Donner en expliquant l'expression du schéma numérique explicite centré en espace associé à l'équation de la diffusion thermique reliant $\tilde{T}_{n+1}^i, \tilde{T}_n^i$ et \tilde{T}_{n-1}^i

Stabilité du schéma numérique : le schéma numérique est stable si $r \leq \frac{1}{2}$ avec $r = D_a \frac{h}{k^2}$.

On propose les lignes de code suivantes. Initialement, le champ de température de l'argile est uniforme de valeur égale à T_{ext} .

```

1      #Constantes numériques
2  lambda_a, c_a, rho_a = 1.5, 7e2, 1.7e3
3  D_a = ...      #coefficient de diffusivité thermique
4  P0, N, L, S = 2e3, 36000, 5e2, 1e8
5  tau = ...      #temps caractéristique de diffusion thermique
6  Text = 13.
7  Nt, Nx = 30000, 50
8  h = ...      #pas discrétisation temporelle
9  k = ...      #pas discrétisation spatiale

```

```

10     #coefficient r
11     r = D_a * h / k**2
12     assert(r < 0.5)
13     #initialisation champ température
14     T = [[Text for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
15     T[0][0] = T[0][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
16     #Schéma numérique explicite
17     for t in range(Nt - 1):
18         for x in range(1, Nx - 1):
19             T[t + 1][x] = T[t][x] + ...
20     T[t+1][0] = T[t+1][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k

```

Après traitement des données, on obtient le réseau de courbes ci-dessous (figure 10).

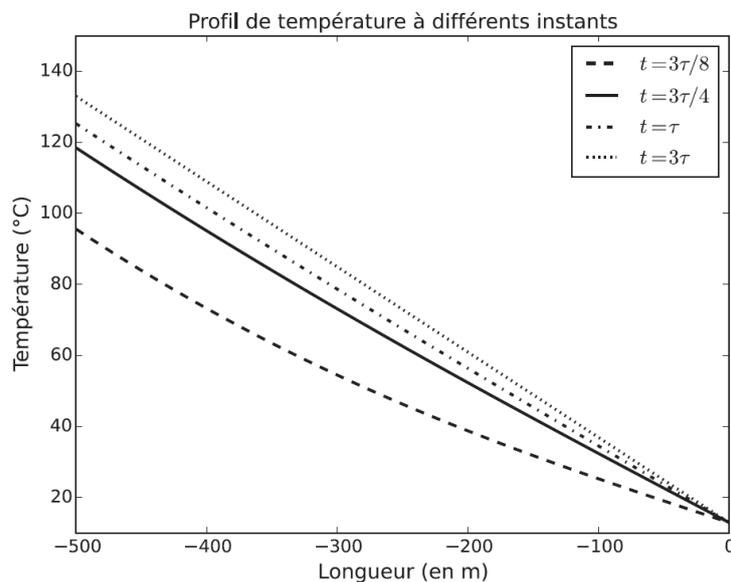


Figure 7 – Évolution temporelle du champ de température dans la couche d'argile

- 20-** Donner une estimation de la durée caractéristique τ de diffusion thermique. Faire l'application numérique.
- 21-** Quel est l'intérêt de la ligne 12 ? Que traduisent les lignes 15 et 20 ? Compléter la ligne 19 sur votre copie
- 22-** Commenter le réseau de courbes obtenu. Quelle(s) critique(s) pourrait-on formuler au sujet des lignes de code proposées ?

PROBLEME N°3-B : SUJET DIFFICILE - FONCTIONS SPECIALES - LA FONCTION D'ERREUR DE GAUSS : $\text{ERF}(\chi)$

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

□ – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

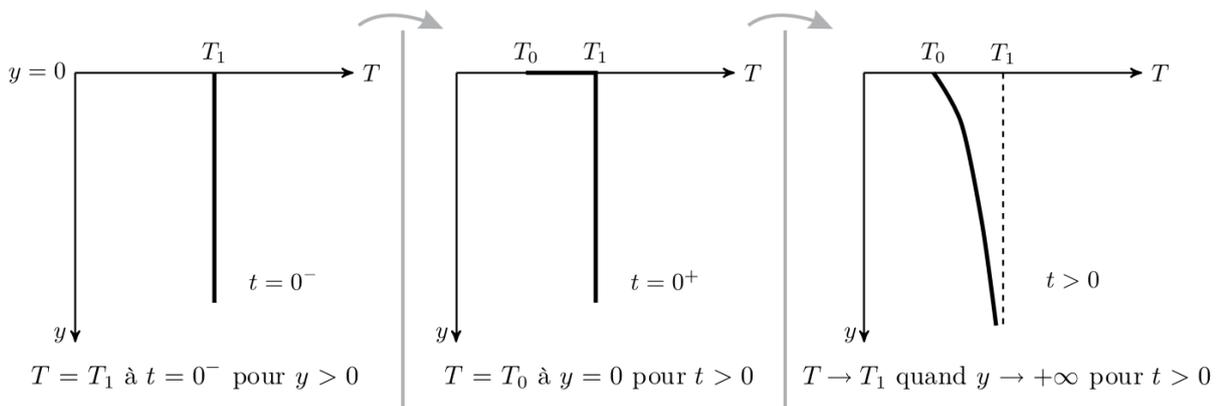


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

□ – 24. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ? Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.

En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface \mathcal{S} .

□ – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, \mathcal{S} , dy et dt

puis en fonction de ρ , c , \mathcal{S} , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .

En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

□ – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y,t)$?

Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

□ – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

□ – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y,t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

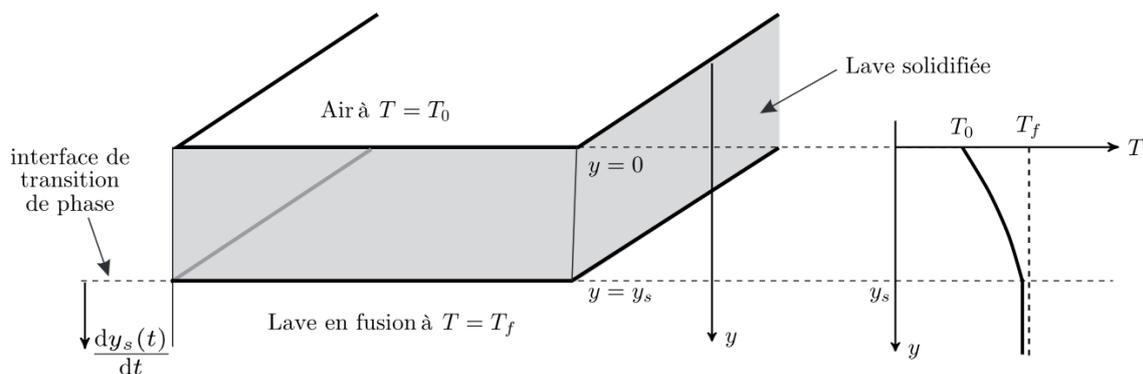


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

□ – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

□ – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.

□ – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

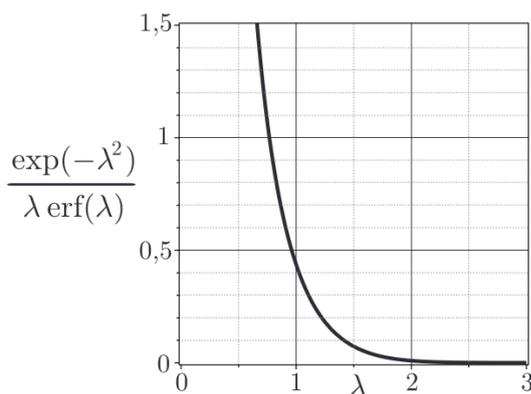


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \text{erf}(\lambda)}$

□ – 32. En déduire que

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \text{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$$

□ – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?

Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

- – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .
 En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.
 Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

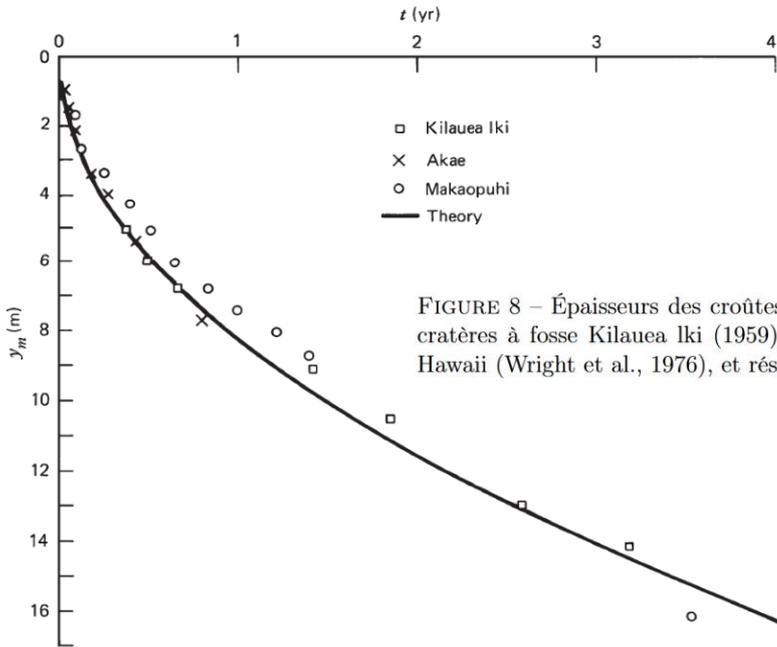


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In *The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin*, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAffee, vol. 19 of Geophysical Monograph Series, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375-90

PROBLEME N°4 A – SUJET FACILE - DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE – PINCE AMPEREMETRIQUE

Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_z) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{p}).

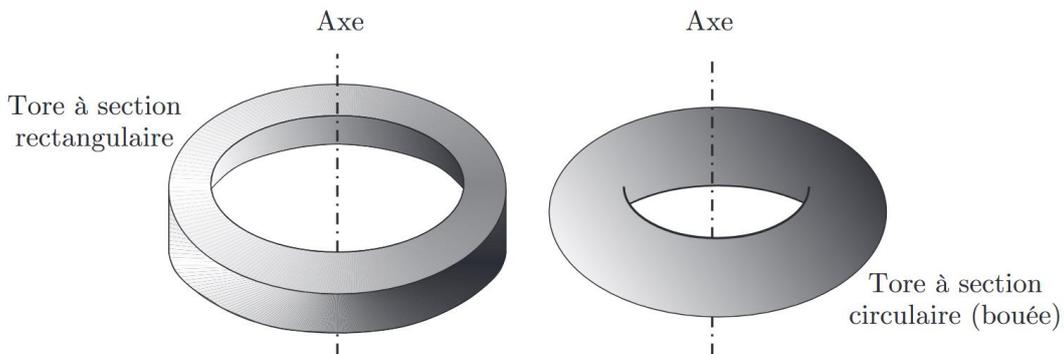


FIGURE 1 – Deux types de tores

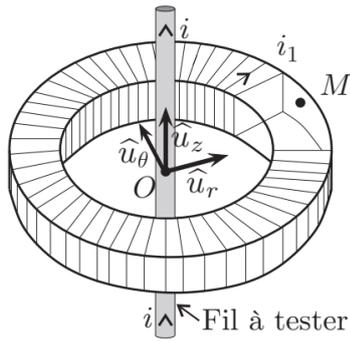


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

□ **13** — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ **14** — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

□ **15** — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

□ **16** — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

□ **17** — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

□ **18** — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

PROBLEME N°4 B : SUJET DIFFICILE - LES BOUEES HOULOGRAPHES WAVERIDER

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du Waverider repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde au travers de modèles simples.



Figure 1 Photographies d'une bouée houlographe Waverider

IV Mesure de l'inclinaison de la bouée

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waveriders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle φ (figure 8).

La mesure de φ s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

- Une paire de bobines plates $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_1\}$ est collée à la paroi extérieure de la sphère \mathcal{S} . Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}_3 .
- Une bobine-sonde \mathcal{C}_2 est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

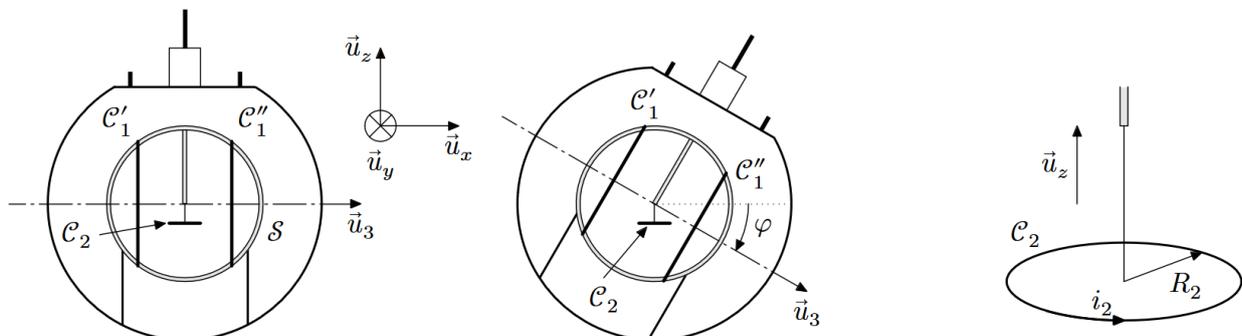


Figure 8 La bouée, la sphère \mathcal{S} , \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}''_1 s'inclinent alors que \mathcal{C}_2 se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde \mathcal{C}_2

IV.A – Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}''_1 sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres O'_1 et O''_1 , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de N_1 spires parcourues par un courant d'intensité i_1 et sont séparées d'une distance égale à leur rayon R_1 (figure 9).

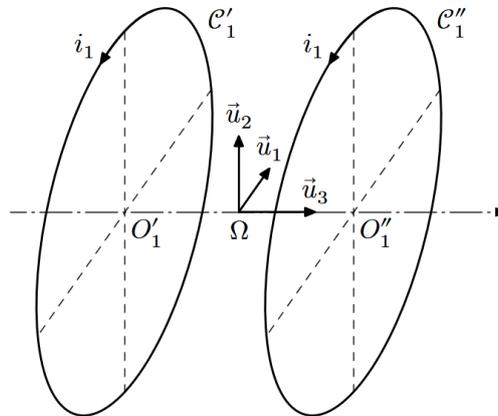


Figure 9 Les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base orthonormée directe

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu Ω de $[O'_1O''_1]$. Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres $R_1 = 20$ cm, $N_1 i_1 = 1$ A. Ses résultats sont fournis sur les figures D et E du document réponse. Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) d'origine Ω , on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) d'axe (Ω, \vec{u}_3) . On voit que x_3 joue le rôle de la coordonnée usuellement notée z , mais on prendra garde à ne pas confondre \vec{u}_3 et \vec{u}_z (figure 8). Dans le plan de la figure D, défini par $\theta = 0$, r se confond avec $|x_1|$ et le vecteur unitaire d'habitude noté \vec{u}_r vaut $\pm \vec{u}_1$ selon le signe de x_1 . On note $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$, $B_{\text{axe}}(x_3) = B_3(0, x_3)$, $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ et $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$.

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures du document réponse. On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

Q 36. Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure D se limite au plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$. Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la

direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

Q 37. Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de \vec{B} ? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les figures D et E, vous apporterez une réponse *quantitative* avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ \mathcal{C} passant par les points D et E. De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

Q 38. Les valeurs du champ observées le long de \mathcal{C} sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ?

Deux constatations se dégagent des figures D et E :

- dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à \vec{u}_3 si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- B_{axe} est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

Q 39. Considérons à titre d'exemple le point $A(x_{1A} = 5 \text{ cm}, x_{3A} = 20 \text{ cm})$, près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent $B_3(A)$ et $B_r(A)$? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

Q 40. En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe (coordonnées (r, x_3) avec $r \ll R_1$), l'équation de Maxwell de la question 37, démontrer que

$$B_r(r, x_3) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}.$$

Q 41. Cette relation est-elle satisfaite en A ?

Q 42. À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur μ tel que

$$B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1.$$

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon r_{max} défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3 \left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4} \right) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0).$$

Q 43. Déterminer r_{max} et représenter ce cylindre sur la figure D.

IV.B – Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde \mathcal{C}_2 présente un rayon R_2 et une inductance propre L_2 . Elle est formée de N_2 spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité i_2 , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à \vec{u}_2 . On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par \mathcal{C}_1 est quasi-uniforme. On note L_1 l'inductance propre de \mathcal{C}_1 et on néglige les résistances de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Q 44. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction M entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . L'exprimer en fonction de N_1, N_2, R_2, μ et φ .

On applique une tension alternative $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$ aux bornes de \mathcal{C}_1 . La bobine \mathcal{C}_2 est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.

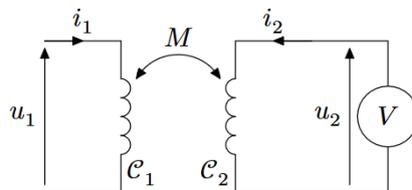


Figure 10

Q 45. Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la « très grande impédance » du voltmètre.

Q 46. À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la « très grande impédance » du voltmètre? En déduire une relation entre u_1, u_2, L_1 et M .

Q 47. Application numérique : $U_{1m} = 5,00 \text{ V}$, $U_{2m} = 170 \text{ mV}$, $L_1 = 3,6 \text{ mH}$, $R_2 = 5,0 \text{ cm}$, $N_1 = 50$, $N_2 = 200$. Calculer le coefficient de mutuelle induction M (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison φ (supposé positif) en degrés.

Données numériques

Masse molaire de l'aluminium	$M_{\text{Al}} = 27,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique de l'aluminium	$\rho_{\text{Al}} = 2,72 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Produit ionique de l'eau	$K_e = 1 \times 10^{-14}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e = 96,5 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{rot} A(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

PROBLEME N° 5 : PHYSIQUE EN ARCTIQUE — POLES GEOGRAPHIQUES ET MAGNETIQUES

Ce sujet aborde certaines propriétés physiques particulières aux régions polaires. Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème ainsi qu'un **formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé**.

Les exemples seront tous traités dans le cas des régions polaires nord (également appelées arctiques ou boréales). Les **notations géographiques usuelles sont également rappelées en fin d'énoncé**. Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques ; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires. Les parties I.A et I.B sont indépendantes entre elles. La partie I.A est consacrée à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète). Enfin, la partie I.B décrit quelques propriétés des mouvements des particules chargées à l'approche du pôle nord.

I.A. — Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant supposée indiquer le nord.

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \vec{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

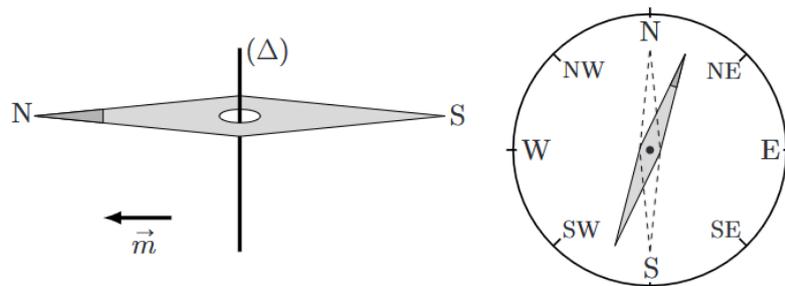


FIGURE 1 – Boussole de navigation

□ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

□ 2 — Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 5). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et

$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

□ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

□ 4 — Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique \vec{B} , projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de

λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles » ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

I.B. — Aurores polaires

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux spectaculaires observables sur le fond du ciel nocturne des régions polaires : des particules chargées issues du vent solaire et guidées vers les pôles le long des lignes de champ du champ géomagnétique y interagissent avec la haute atmosphère. On n'étudie que quelques caractéristiques du mouvement de ces particules à l'approche du pôle nord.

On étudie d'abord le mouvement circulaire de centre O' d'une particule de charge q et de masse m sous la seule influence d'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_0 = -B_0\vec{e}_z$, avec $B_0 > 0$. On pourra utiliser des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du mouvement.

□ 6 — Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse angulaire ω_c du mouvement. Le cercle est-il parcouru dans le sens direct ou rétrograde ?

Ce mouvement est équivalent, pour des durées nettement supérieures à $2\pi/\omega_c$, à une boucle de courant circulaire de rayon r parcourue par un courant (moyen) i associé à la rotation périodique de la charge q . Il s'agit donc d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} .

□ 7 — Montrer que l'énergie cinétique E_c du mouvement vérifie $E_c = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$. Pour la suite de cette partie, on considérera que ce résultat reste applicable, même si \vec{B}_0 n'est plus exactement uniforme.

On étudie maintenant le mouvement d'un proton dans un champ non uniforme, $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$; on notera $G_m(z) = \frac{dB_0}{dz}$ l'intensité du gradient associé. On admet l'expression de la résultante des forces exercées sur cette particule, en fonction du moment magnétique \vec{M} équivalent à son mouvement moyen : $\vec{F} = \left(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B}_0$ soit aussi $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$. Le proton, issu du vent solaire, s'approche du pôle terrestre nord.

□ 8 — À l'approche du pôle nord et en justifiant votre réponse, préciser la direction et le sens des trois vecteurs \vec{B}_0 , \vec{M} et \vec{F} . Le proton est-il freiné ou accéléré ?

□ 9 — L'hypothèse $G_m(z) \neq 0$ est-elle compatible avec l'équation de Maxwell assurant la conservation du flux magnétique le long d'un tube de courant ?

□ 10 — Compte tenu du caractère dipolaire du champ géomagnétique, évaluer $G_m(z)$ puis l'accélération d'un proton d'énergie $E_c = 0,50 \text{ keV}$ à l'approche immédiate du pôle ; comparer aux effets de la pesanteur. Que peut-on en conclure ?

Données et formulaire

Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du proton	$m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse volumique de l'eau liquide à 4°C	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera $(Oxyz)$ les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 5 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$); celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 5 à droite.

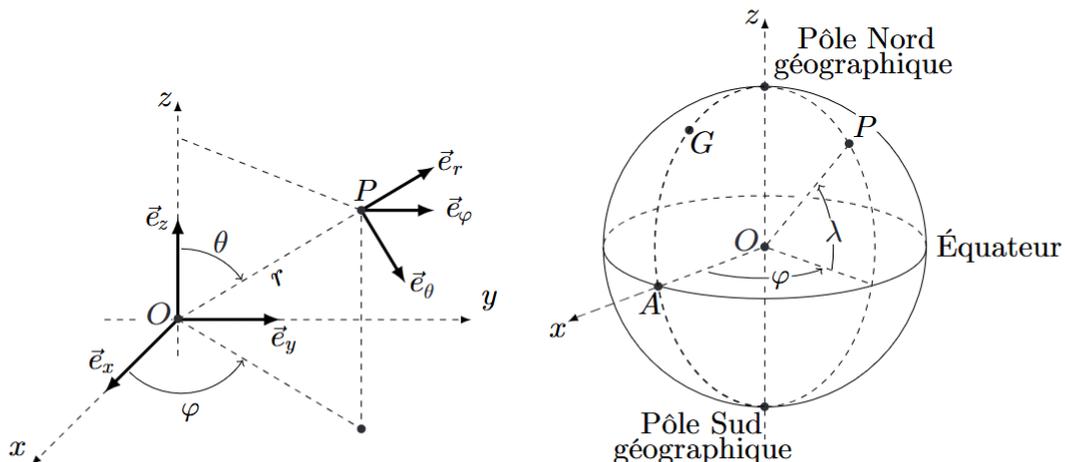


FIGURE 5 – Coordonnées sphériques et géographiques

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

PROBLEME N° 6 : TERRAFORMATION DE MARS

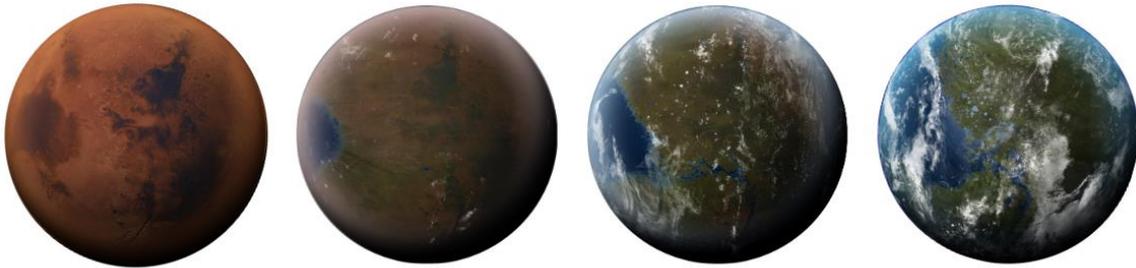


Figure 1 Vue d'artiste des phases hypothétiques de la terraformation de Mars. D'après Wikipédia, auteur : Daein Ballard.

Parue entre 1994 et 2000, la Trilogie de Mars de l'américain Kim Stanley Robinson relate la colonisation et la terraformation de la planète Mars.

La terraformation consiste à modifier la géologie et le climat d'une planète pour la rendre habitable par les humains ou toute forme de vie terrestre. Les modifications profondes à apporter à la planète sont complexes et demandent énormément de ressources. Sur Mars, les faibles température et pression empêchent la vie à la surface. Avant de développer un écosystème, il faut d'abord apporter une atmosphère à même de réchauffer la planète et de supporter la vie. Bien que considérée comme un vieux rêve de science fiction, la faisabilité de la terraformation soulève de nombreuses questions de physique, ce problème en abordant quelques-unes.

II Constitution d'une atmosphère martienne

II.A – Conditions de température et de pression attendues sur Mars

Terraformer, c'est aussi changer la température sur la planète à coloniser. Avec une température moyenne de 210 K, l'eau liquide n'est quasiment pas présente à la surface de la planète Mars. On va étudier dans quelle mesure l'atmosphère peut permettre, par effet de serre, une augmentation de la température.

On rappelle la loi de Stefan-Boltzmann qui donne la puissance émise par unité de surface d'un corps noir à la température T : $p_e = \sigma T^4$ où $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$.

De même, on rappelle la loi du déplacement de Wien qui permet de prédire la longueur d'onde pour laquelle la densité spectrale de puissance du rayonnement thermique émis par ce corps est maximale: $\lambda = \frac{\beta}{T}$, avec $\beta = 2,90 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Dans la suite, on pourra considérer que ce rayonnement est monochromatique.

Les puissances surfaciques sont indiquées par des p minuscules, les puissances totales, par des \mathcal{P} majuscules caligraphiés. On repère par un premier indice, s ou m , les grandeurs relatives respectivement au Soleil ou à la planète Mars; un second indice, i , e ou a , indique respectivement si la puissance est incidente, émise ou absorbée.

II.A.1) Détermination de la température d'équilibre en l'absence d'atmosphère

En l'absence d'atmosphère, la principale source d'énergie permettant au sol martien d'atteindre sa température d'équilibre, notée T_m , est le rayonnement solaire. On suppose que T_m est uniforme en tout point de la surface de Mars.

Dans ce modèle, on considère que le sol de Mars n'absorbe pas la totalité de la puissance du rayonnement solaire incident, notée $\mathcal{P}_{m,i}$. Il en réfléchit une partie, notée $\mathcal{P}_{m,r}$, selon la loi $\mathcal{P}_{m,r} = \alpha \mathcal{P}_{m,i}$ où la constante α , appelée albédo de Bond de la surface de Mars, vaut 0,25.

Q 23. Exprimer la puissance totale émise par la surface du Soleil, notée $\mathcal{P}_{s,e}$.

Q 24. Exprimer la puissance moyenne surfacique reçue par le sol martien, $p_{m,i}$, au niveau de l'orbite de Mars.

- Q 25. Exprimer la puissance totale absorbée par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,a}$.
- Q 26. Exprimer la puissance émise par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,e}$.
- Q 27. Justifier que la puissance absorbée doit être égale à la puissance émise, puis en déduire l'expression et la valeur de la température d'équilibre T_m pour la surface de Mars en l'absence d'atmosphère. Commenter.

II.A.2) Utilisation du modèle de l'effet de serre

On considère que le sol martien absorbe toujours une fraction du rayonnement solaire incident selon la loi indiquée dans la sous-partie précédente. Par contre, on admet qu'il absorbe totalement le rayonnement atmosphérique. On note T'_m , la nouvelle température d'équilibre de la surface du sol martien, supposée uniforme.

Quant à l'atmosphère, elle peut être modélisée par une fine couche de gaz (épaisseur $e \ll R_m$) totalement transparente aux rayonnements électromagnétiques, sauf aux infrarouges pour lesquels elle absorbe une fraction ε des rayonnements. On suppose que l'atmosphère, homogène, possède une température uniforme notée T_a .

On néglige tout phénomène de réflexion du rayonnement par l'atmosphère.

- Q 28. Indiquer à quel domaine du rayonnement électromagnétique correspond le rayonnement émis par le Soleil. Préciser également à quel domaine du rayonnement électromagnétique doit correspondre le rayonnement émis par le sol martien.
- Q 29. En respectant les conventions de notations adoptées, réaliser un schéma faisant apparaître les puissances surfaciques incidentes, absorbées et émises par la surface du sol martien et par son atmosphère.
- Q 30. À partir de deux bilans de puissances, déterminer la température d'équilibre du sol martien, T'_m , en présence d'une atmosphère en fonction de $\mathcal{P}_{s,e}$, α , ε et r_m , puis en fonction uniquement de T_m et ε .
- Q 31. Calculer la valeur du coefficient d'absorption ε qu'il faudrait pour obtenir une température moyenne au sol de 298 K sur Mars. Commenter le résultat.
- Q 32. Déterminer la température d'équilibre du sol martien maximale envisageable en supposant que l'on soit capable d'optimiser les coefficients α et ε . Conclure.

Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil	r_m	$2,28 \times 10^8$ km
Rayon moyen de la planète Mars	R_m	$3,39 \times 10^3$ km
Masse de la planète Mars	m_m	$6,42 \times 10^{23}$ kg
Température à la surface de Mars	T_0	210 K
Pression à la surface de Mars	P_0	600 Pa
Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière)	e	$2,20 \times 10^2$ km

Caractéristiques du Soleil :

Rayon moyen du Soleil	R_s	$6,96 \times 10^5$ km
Masse du Soleil	m_s	$1,99 \times 10^{30}$ kg
Température de surface du Soleil	T_s	5778 K

Ceinture d'astéroïdes :

Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes	r_{ast}	$4,6 \times 10^8$ km
---	-----------	----------------------

Autres données utiles :

Constante de gravitation universelle	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	N_a	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du carbone	M_C	$12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	M_O	$16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'argon	M_{Ar}	$40 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'azote	M_N	$14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \\ \text{div} \vec{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \\ \left[f(r) \vec{u}_r \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] (f(r) \vec{u}_r) &= f(r) \frac{df(r)}{dr} \vec{u}_r \end{aligned}$$

Quelques intégrales : $\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2$ et $\int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$.

• • • FIN • • •

DOCUMENT REPOSE DU PROBLEME N°4 B : LES BOUEES HOULOGRAPHERS WAVERIDER

Sous-partie IV.A

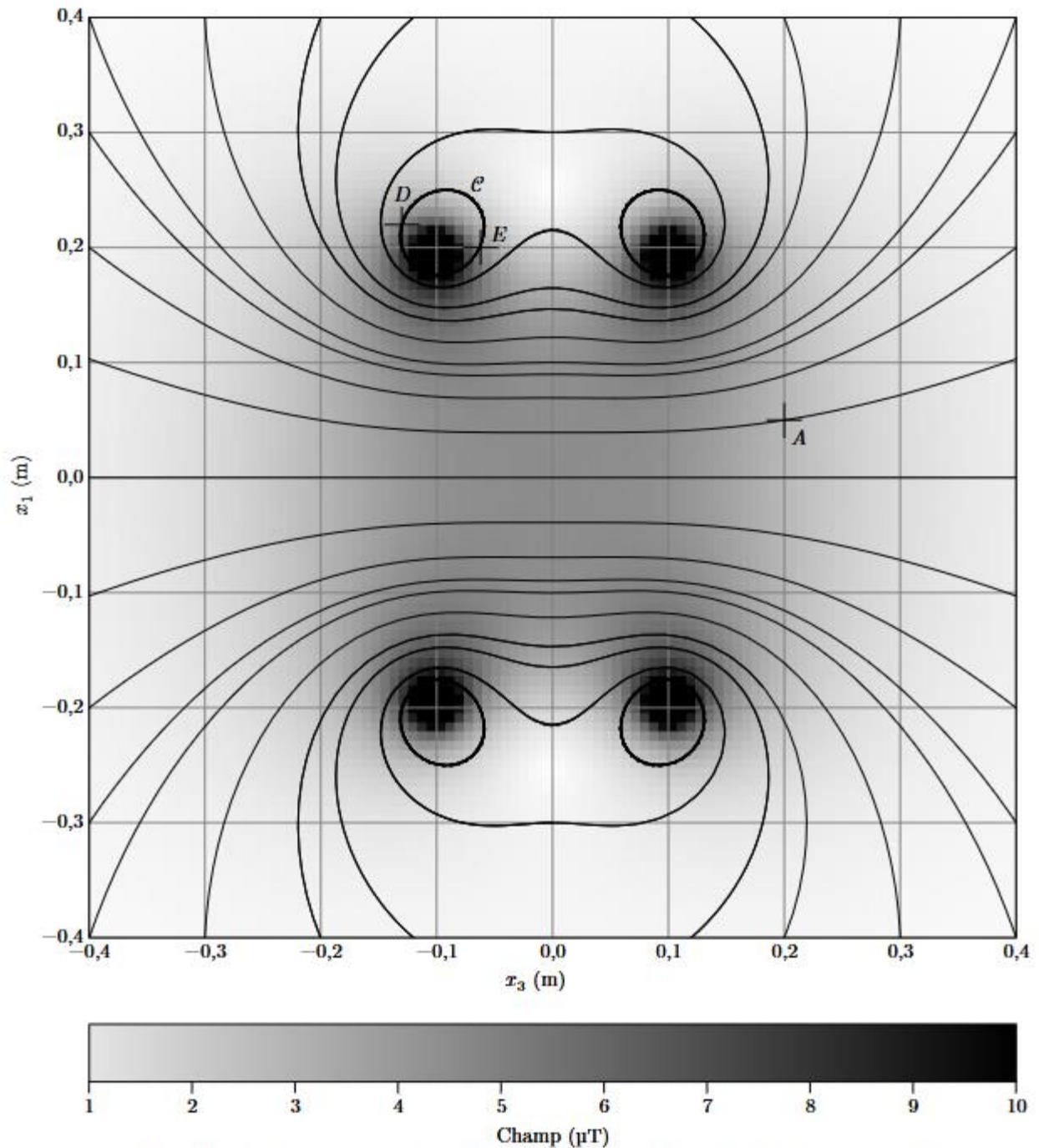


Figure D Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan $(O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$

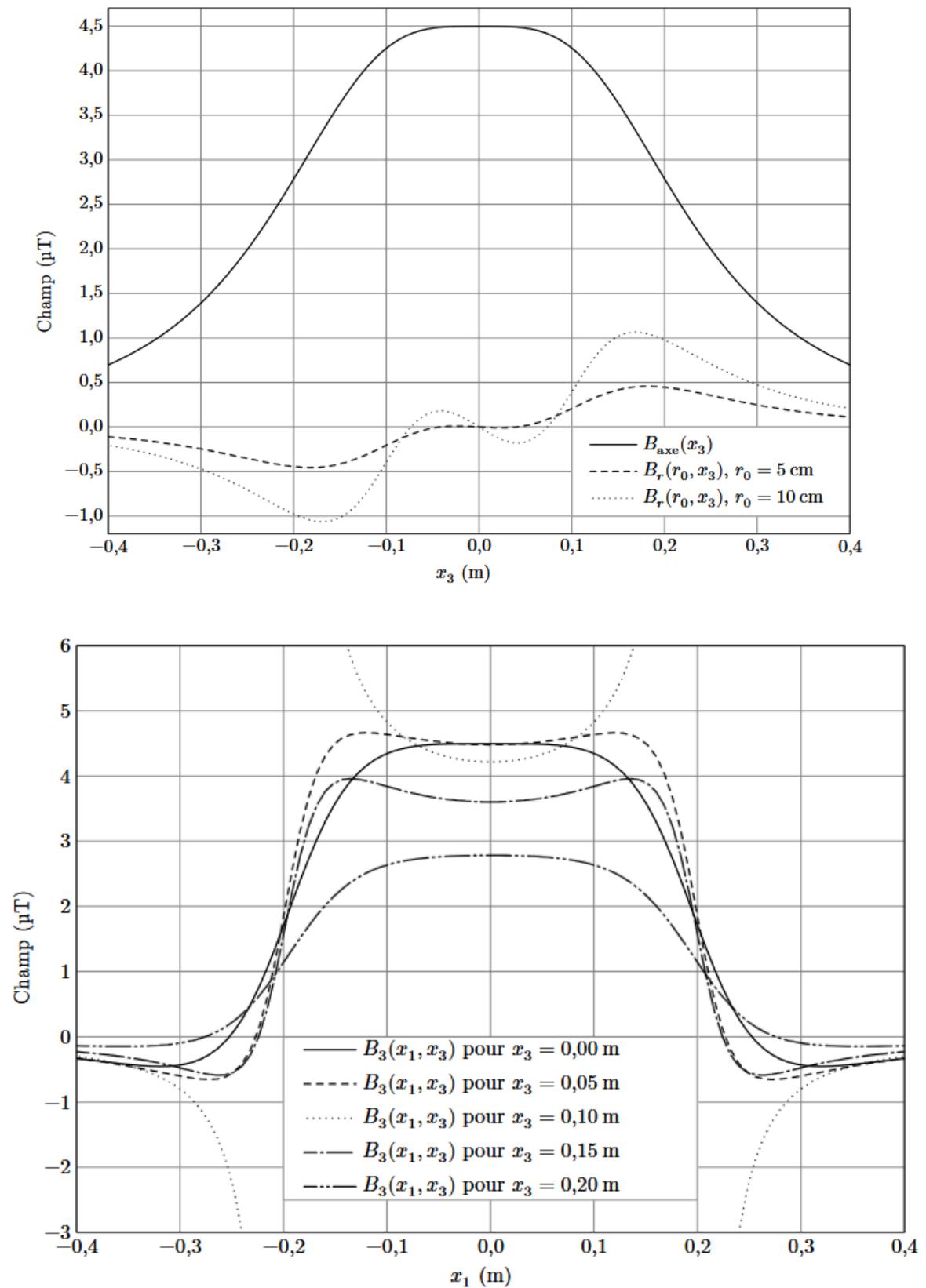


Figure E Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique, r est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote x_3 . Sur le second graphique, x_3 est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée x_1 .