

DS. DE PHYSIQUE N°4 MPI - CORRIGE

PROBLEME N°1 : PHENOMENES PHYSIQUES EN MONTAGNE : EFFET DE TENSION INDUITE DE LA Foudre ATS 2022

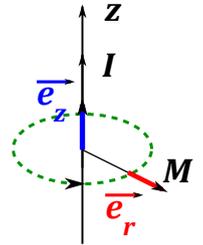
1- Le point de calcul, M , est repéré en coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$.

Direction du champ magnétostatique :

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant donc d'antisymétrie pour \vec{B} .

$\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan, orthoradial : $\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta$

Variable utile : La distribution de courant est invariante dans toute rotation d'angle θ et toute translation suivant z . $B_\theta(M)$ est donc indépendante de θ et z : $B_\theta(M) = B_\theta(r)$



2- Soit (Γ) le cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique. (Γ) est fermé et orienté.

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \oint_{(\Gamma)} B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \oint_{(\Gamma)} B_\theta(r) r d\theta$$

Sur le cercle, $r = cte$ donc $rB_\theta(r) = cte$

$$C = B_\theta(r) r \oint_{(\Gamma)} d\theta = 2\pi r B_\theta(r)$$

Courant enlacé : Orientation dans le sens trigonométrique : $I_{enlacé} = +I$

Théorème d'Ampère

(Γ) est fermé et orienté, donc $C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé}$ d'où $+2\pi r B_\theta(r) = +\mu_0 I$

Conclusion

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

3- (Résolution de problème) Le courant variable crée un champ magnétique variable. Le flux de ce champ à travers le circuit électrique du refuge est donc lui aussi variable, et la loi de Faraday permet d'exprimer la force électromotrice induite par cette variation de flux magnétique :

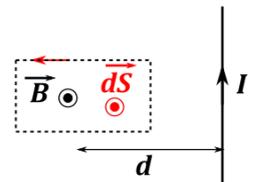
$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Pour simplifier les calculs, on peut considérer que le champ magnétique est sensiblement uniforme sur le circuit.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} \vec{e}_\theta$$

On oriente le circuit comme indiqué, les vecteurs \vec{B} et $d\vec{S}$ sont dans le même sens, d'où :

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{circuit}} B dS \stackrel{B \text{ uniforme}}{=} B \iint_{\text{circuit}} dS = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} \ell h$$



où ℓ et h sont la largeur et la hauteur du circuit.

La force électromotrice induite est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0}{2\pi d} \ell h \frac{dI(t)}{dt}$$

Sa valeur absolue est maximale quand la pente de $I(t)$ est maximale, entre $t = 0$ et $t = \tau = 2 \mu s$.

$$|e_{max}| = \frac{\mu_0}{2\pi d} \ell h \frac{I_{max}}{\tau}$$

Application numérique, en prenant $\ell = 5 m$ et $h = 2 m$: $|e_{max}| = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \times 10} \times 5 \times 2 \times \frac{50 \times 10^3}{2 \times 10^{-6}} = 500 \times 10 V$

Ordre de grandeur pour la tension induite :

$$|e_{max}| = 5 kV$$

Cette tension est élevée et peut certainement causer des dégâts dans le circuit électrique du refuge.

PROBLEME N°2 : CONCEPTION D'UN PROTOTYPE DE MACHINE A PANCAKES - E3A PSI 2022 (corrigé F. Pauchet et G. Wagner)

I - Chauffage des pôles par induction

I.2 Puissance induite dans la poêle

Q7. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Calculons la circulation sur le contour \mathcal{L} du champ électrique \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{S(\mathcal{L})} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \iint_{S(\mathcal{L})} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} \quad (S(\mathcal{L}) \text{ fixe}) \\ \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté \mathcal{L} . On retrouve la loi de Faraday.

Q8. On va utiliser la relation précédente sur un contour \mathcal{L} circulaire, de centre O et de rayon R , orienté selon $+\vec{u}_\theta$. On obtient :

$$\oint_{\mathcal{L}} E(r, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = B \pi r^2$$

Remarque : $d^2\vec{S}$ est orientée selon la règle de la main droite à partir de l'orientation de \mathcal{L}

Cela donne alors :

$$E(r, t) 2\pi r = -\frac{\pi r^2 \mu_0 \mu_r}{2R} \frac{di}{dt} \Rightarrow E(r, t) = -\frac{r \mu_0 \mu_r}{4R} \frac{di}{dt} = \frac{r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t)$$

Q9. D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est :

$$p = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2$$

Q10.

$$P_{\text{ind}} = \iiint_V p \, d^3V = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \iiint_V r^3 \, dr \, d\theta \, dz = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \times \frac{a^4}{4} \times 2\pi e$$

donc on retrouve bien l'expression de l'énoncé :
$$P_{\text{ind}} = \frac{\gamma \pi (\mu_0 \mu_r \omega I_0)^2 e a^4}{64 R^2}$$

Q11. $\gamma_{\text{alu}} > \gamma_{\text{fonte}}$ mais $\mu_{r,\text{alu}} = 1 < \mu_{r,\text{fonte}}$.

Comme, numériquement, $\gamma_{\text{alu}} \times \mu_{r,\text{alu}}^2 = 4,0 \cdot 10^7 < \gamma_{\text{fonte}} \times \mu_{r,\text{fonte}}^2 = 6,4 \cdot 10^9$,

on a $P_{\text{ind,alu}} < P_{\text{ind,fonte}}$ ou encore $\frac{P_{\text{ind,fonte}}}{P_{\text{ind,alu}}} = 160$.

Ainsi, la puissance Joule dissipée dans une poêle en fonte est supérieure à celle dans une poêle en aluminium : le chauffage par induction est plus efficace dans une poêle en fonte.

PROBLEME N°3 -A : QUELQUES ASPECTS DE L'INDUSTRIE NUCLEAIRE (E3A PSI 2023)

Partie I – Centrale nucléaire

9. Efficacité de Carnot

La centrale échange Q_c avec la source chaude, Q_f avec la froide et un travail W avec les turbines. Le premier principe appliqué sur un cycle décrit par la machine donne :

$$Q_c + Q_f + W = 0 \quad (1)$$

Le rendement de Carnot étant obtenu pour une machine totalement réversible, on en déduit que l'inégalité de Clausius devient :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad (2)$$

La centrale est assimilée à un moteur, donc son rendement est donné par :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} \quad (3)$$

En divisant (1) par Q_c , on obtient :

$$1 + \frac{Q_f}{Q_c} = \eta$$

L'équation (2) donne : $\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$ ainsi, on en déduit le rendement de Carnot :

$$\eta_C = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

Le rendement de la centrale vaut donc : $\underline{\eta} = 0,6 \times \frac{T_c - T_f}{T_c} = 30\%$.

10. Par définition du rendement

$$\eta = -\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{th,C}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_{th,C} = -\frac{\mathcal{P}}{\eta}}$$

11. Premier principe industriel

Le premier principe industriel appliqué sur l'eau de la Moselle en contact avec le circuit tertiaire donne la variation d'enthalpie entre l'amont et l'aval de la centrale :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th,F}$$

où $D_m = D_V \rho_e$ est le débit massique du fleuve et $\mathcal{P}_{th,F}$ est la puissance thermique échangée avec le fleuve.

En considérant l'eau comme une phase condensée : $h_s - h_e = c_e \Delta T$ et d'après le premier principe :

$$\mathcal{P}_{th,F} = -\mathcal{P}_{th,C} - \mathcal{P} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

On en déduit donc :

$$D_V \rho_e c_e \Delta T = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta T = \frac{\mathcal{P}}{D_V \rho_e c_e} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)}$$

Ainsi, numériquement : $\underline{\Delta T} = 8,8 \text{ K}^1$.

La valeur obtenue est élevée mais surévaluée dans la mesure où une partie des échanges thermiques avec la source froide sont effectués au niveau de la tour de refroidissement.

12. Loi de Fourier : dans un milieu matériel soumis seulement à la conduction thermique, la densité de flux thermique \vec{j}_{th} est proportionnelle au gradient de température $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$:

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

La constante λ est la **conductivité thermique du matériau**, dépendant du matériau considéré, toujours positive, s'exprimant en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; la température s'exprime en Kelvins (K) donc $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$, et la densité de flux thermique \vec{j}_{th} en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Physiquement, cette loi traduit le fait que le flux thermique est orienté dans le sens opposé au gradient de température, la conduction thermique se fait donc des zones chaudes vers les zones froides. Par ailleurs, plus la conductivité thermique d'un matériau est élevée, et plus le flux thermique associé à un gradient de température donné sera élevé.

13. Démonstration de l'équation de la diffusion thermique :

Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre z et $z + dz$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :

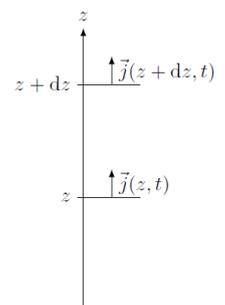
$$d(\delta H) = d^2 H \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ + \text{isobare}}}{=} \delta^2 Q$$

Dans le cas d'un système monophasé : $d(\delta H) \stackrel{PCH}{=} \delta m c_a dT = \rho_a S dz c_a dT$; **z fixé :**

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z dt \quad \text{soit} \quad d(\delta H) = d^2 H = \rho_a c_a S dz \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z dt = \rho_a c_a S \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z dz dt$$

La quantité de chaleur reçue s'exprime en fonction du flux entrant en z moins le flux sortant en $z + dz$, soit :

$$\delta^2 Q = (\Phi(z, t) - \Phi(z + dz, t)) dt = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_t dz dt$$



$$\text{Avec } \Phi(z) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(z) d\vec{S} = j_{Qz} S, \quad \delta^2 Q = - \left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z} \right)_t S dz dt$$

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{J}_Q(z) = -\lambda_a \overrightarrow{\text{grad}}(T), \text{ d'où } j_{Qz} = -\lambda_a \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t \quad \text{et} \quad \delta^2 Q = - \left(\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z} \right)_t S dz dt = \lambda_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t S dz dt ;$$

$$\text{finalement : } d(\delta H) = d^2 H = \delta^2 Q \Leftrightarrow \rho_a c_a S \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z dz dt = \lambda_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t S dz dt \Leftrightarrow \rho_a c_a \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z = \lambda_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t$$

équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t = D_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t$$

avec $D_a = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a}$ **diffusivité thermique.**

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_z \right] = [D_a] \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t \right] \Leftrightarrow \frac{\theta}{T} = [D_a] \frac{\theta}{L^2} \Leftrightarrow [D_a] = \frac{L^2}{T}$$

On a donc D_a en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Cas stationnaire : on a alors $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_t$ soit $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$

14. En $z = -L$, le flux thermique est continu et provient directement des déchets. Chaque colis libère une puissance \mathcal{P}_0 et les N colis diffusent une puissance à travers la surface S . Dans le modèle proposé, la température ne variant que selon z , on suppose que cette puissance est entièrement libérée selon la verticale et pas dans les directions latérales, à la fois vers le haut et vers le bas. On la supposera également répartie entre les deux directions, avec donc une puissance (donc un flux) vers le haut de $\frac{\mathcal{P}_0}{2}$ par colis ; par définition de la densité de flux thermique j_z :

$$j_z(-L^-, t) S = \frac{N \mathcal{P}_0}{2}$$

De plus, d'après la loi de Fourier, $j_z(-L^+, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(-L^+, t)$

Par continuité du flux, la section étant constante : $j_z(-L^-, t) = j_z(-L^+, t) \Leftrightarrow \frac{N \mathcal{P}_0}{2S} = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(-L^+, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-L} = -\frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S}$$

En $z = 0$, on admet que le contact thermique est parfait et qu'il n'y a pas de discontinuité de température ; ainsi :

$$T(z = 0^-, t) = T(z = 0^+, t) = T_{\text{ext}}$$

15. En intégrant l'équation obtenue en régime stationnaire $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ deux fois par rapport à z :

$$\frac{dT}{dz} = A = \text{cte} \quad \text{et} \quad T(z) = Az + B$$

En exploitant les conditions aux limites de la question précédente :

$$T(z = 0^-, t) = T(z = 0^+, t) = T_{\text{ext}} = B$$

et

$$\frac{dT}{dz} = A = \text{cte} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-L} = -\frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S}$$

Soit

$$T(z) = T_{\text{ext}} - \frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S} z$$

En particulier

$$T(-L) = T_{ext} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S} L$$

16. On cherche S telle que $T(-L) = T_{max} = T_{ext} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S} L$ soit

$$S = \frac{NP_0}{2\lambda_a(T_{max} - T_{ext})} L$$

$$\text{A.N. : } S = \frac{3,6 \cdot 10^4 \times 2,10^3 \times 5 \cdot 10^2}{2 \times 1,5 \times 87} = \frac{3,6 \times 5 \cdot 10^9}{1,5 \times 87} = \frac{3,6 \times 5}{1,5 \times 8,7} \cdot 10^8 \approx \frac{\frac{7}{2} \times 5}{3 \times 8,7} \cdot 10^8 \approx \frac{36}{28} \cdot 10^8 \approx \frac{9}{7} \cdot 10^8 \approx 130 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \approx \mathbf{130 \text{ km}^2}$$

$$S = 138 \text{ km}^2$$

17. En attendant 30 ans, on diminue la quantité d'atomes radioactifs dans les échantillons. En ordre de grandeur, on attend environ une demi-vie, ce qui divise donc par environ deux le nombre d'atomes radioactifs, et ce qui permet donc de diviser par deux la puissance émise et ainsi la surface nécessaire à l'enfouissement.

18. Il y a $N_t + 1$ points donc :

$$h = \frac{\Delta t}{N_t}$$

19. L'équation de la diffusion thermique est $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = D_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t$

$$\text{Avec } \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(z, t + \Delta t) - T(z, t)}{\Delta t}, \text{ soit à l'ordre 1 : } \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z \approx \frac{T(z, t + \Delta t) - T(z, t)}{\Delta t}$$

Avec $\Delta t = h$, d'après l'approximation numérique donnée dans l'énoncé : $\tilde{T}_n^i = T(z_n, t_i)$, soit $T(z, t + h) = \tilde{T}_n^{i+1}$

$$\text{Ainsi, à l'ordre 1, } \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z \approx \frac{T(z, t + \Delta t) - T(z, t)}{\Delta t} = \frac{\tilde{T}_n^{i+1} - \tilde{T}_n^i}{h}$$

De plus,

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

Soit, à l'ordre 1 en k :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \approx \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

De même, pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial z}(z + \frac{k}{2}, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(z - \frac{k}{2}, t)}{k} \approx \frac{\frac{T(z + k, t) - T(z, t)}{k} - \frac{T(z, t) - T(z - k, t)}{k}}{k}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{T(z + k, t) - 2T(z, t) + T(z - k, t)}{k^2}$$

Enfin, d'après l'approximation numérique donnée dans l'énoncé : $\tilde{T}_n^i = T(z_n, t_i)$, on en déduit donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) = \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$$

Ou encore

$$T(z_n \pm \Delta z, t_i) = T(z_n, t_i) \pm \Delta z \frac{\partial T}{\partial z}(z_n, t_i) + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) + o(\Delta z^2)$$

Obtention de la dérivée seconde : en sous-entendant le terme en $o(\Delta z^2)$:

$$T(z_n + \Delta z, t_i) + T(z_n - \Delta z, t_i) \approx 2T(z_n, t_i) + \Delta z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i)$$

Soit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) \approx \frac{T(z_n + \Delta z, t_i) + T(z_n - \Delta z, t_i) - 2T(z_n, t_i)}{\Delta z^2} \approx \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$$

Soit dans l'équation de la diffusion thermique $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = D_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t$:

$$\frac{\tilde{T}_n^{i+1} - \tilde{T}_n^i}{h} = D_a \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$$

20. En raisonnant en ordre de grandeur sur l'équation de diffusion : $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = D_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t \rightarrow \frac{\Delta T}{\tau} = D_a \frac{\Delta T}{L^2}$

soit

$$D_a = \frac{L^2}{\tau} \quad \tau = \frac{L^2}{D_a} = \frac{L^2 \rho_a c_a}{\lambda_a}$$

A.N. : $\tau = 2,01 \cdot 10^{11} \text{ s} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ an}$

21. Fonction assert hors-programme

La ligne 12 permet d'assurer la stabilité du schéma numérique. Si la grandeur r venait à ne pas vérifier la condition imposée, le code renverrait un bug.

La ligne 15 permet d'imposer la valeur $T(-L) = T_{ext} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S} L$ en $z = -L$ à l'instant initial.

La ligne 20 permet de faire de même aux instants ultérieurs. Ces lignes correspondent à la gestion de la condition aux limites en flux thermique.

Le code de la ligne 19 complété est le suivant :

```
_____ T[t+1][x]=T[t][x]+D_a*h/k**2*(T[t][x+1]-2*T[t][x]+T[t][x-1])
```

22. Les courbes de température évoluent pour tendre au cours du temps vers une variation linéaire correspondant au régime stationnaire (le gradient de température s'uniformise). Entre les trois premiers instants, le gradient de température évolue davantage qu'entre τ et 3τ . La convergence vers le régime permanent est ainsi d'autant plus lente que le système en est proche.

Une critique possible est que la personne qui a rédigé le code n'a pas précisé les unités des grandeurs utilisées en commentaires ??.

PROBLEME N°3-B : FONCTIONS SPECIALES (CCMP MPI 2023)

23. Formulation de l'énoncé peu claire ! Kelvin évalue l'âge de la Terre en tenant compte uniquement de l'existence de diffusion thermique et exploite donc la loi de Fourier. Il considère que le centre de la Terre est chaud, à la température qu'elle avait à sa formation, et la surface plus froide, en considérant un flux de diffusion thermique du centre vers l'extérieur. Son travail suppose une Terre à la composition uniforme solide et omet l'existence de convection à l'intérieur de la Terre dans les zones liquides. Il omet également l'énergie thermique libérée par désintégration radioactive, la radioactivité n'étant alors pas connue. Enfin, il omet l'existence du rayonnement thermique de la Terre vers l'atmosphère.

24. Par définition, le vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q correspond à la quantité de chaleur traversant algébriquement une surface orientée Σ donnée par unité de surface et par unité de temps, tandis que le flux de \vec{j}_Q à travers une surface orientée Σ représente la puissance thermique traversant Σ .

$$\delta^2 Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt \quad \boxed{\delta\phi_Q = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}}$$

Loi de Fourier : dans un milieu matériel soumis **seulement à la conduction thermique, en présence d'un gradient de température pas trop élevé**, la densité de flux thermique \vec{j}_Q est proportionnelle au gradient de température $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$:

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)}$$

La constante λ est la **conductivité thermique du matériau**, dépendant du matériau considéré, toujours positive.

La température s'exprime en Kelvins (K) donc $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$, et la densité de flux thermique \vec{j}_Q en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. On a donc λ s'exprimant en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

ou encore $[T] = \Theta \Rightarrow [\overrightarrow{\text{grad}}(T)] = \Theta \cdot L^{-1}$

$$[\vec{j}_{th}] = [\mathcal{P}] \cdot L^{-2} \Rightarrow [\lambda] = [\mathcal{P}] \cdot L^{-2} / \Theta \cdot L^{-1} = [\mathcal{P}] \cdot L^{-1} \cdot \Theta^{-1}$$

$$\boxed{[\lambda] = [\mathcal{P}] \cdot L^{-1} \cdot \Theta^{-1} \text{ en } \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

25. On étudie une tranche mésoscopique en exploitant l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique local (ETL)

Premier principe appliqué au système entre t et $t + dt$, en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, pour une transformation isochore :

$$dU = \delta^2 Q + \delta^2 W \quad \stackrel{\substack{= \\ v=cte \\ \text{pas de travail autre} \\ \text{que pression}}}{=} \delta^2 Q$$

Quantité de chaleur reçue par le système entre t et $t + dt$: (énergie, en joules)

$$\delta^2 Q = (\Phi(y, t) - \Phi(y + dy, t)) dt$$

A l'aide d'un D.L. :

$$\Phi(y + dy, t) = \Phi(y, t) + \left(\frac{\partial \Phi(y, t)}{\partial y} \right)_t dy$$

$$\Phi(y, t) - \Phi(y + dy, t) = - \left(\frac{\partial \Phi(y, t)}{\partial y} \right)_t dy$$

$$dU = \delta^2 Q = - \left(\frac{\partial \Phi(y, t)}{\partial y} \right)_t dy dt$$

Avec $\Phi(y, t) = j_{Qy}(y, t) S$ où S est constante

Finalement :

$$\boxed{dU = - \left(\frac{\partial j_{Qy}}{\partial y} \right)_t S dy dt}$$

Or pour une phase condensée incompressible et indilatable :

$$dU = d(\delta U) \stackrel{PCI}{=} \delta m c dT = \delta m c (T(y, t + dt) - T(y, t))$$

avec $\delta m = \rho dV = \rho S dy$:

$$dU = \delta m c dT = \rho S dy c dT$$

A l'aide d'un DL de $T(y, t + dt)$, on a $T(y, t + dt) = T(y, t) + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_y dt$, d'où

$$dT = T(t + dt, y) - T(t, y) = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y dt$$

D'où l'expression de la variation d'énergie interne du système étudié situé entre y et $y + dy$

$$dU = \rho S dy c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y dt$$

Dans le bilan issu du premier principe :

$$\rho S dy c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y dt = - \left(\frac{\partial j_{Qy}}{\partial y}\right)_t S dy dt$$

En exploitant la loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ et en géométrie linéaire, $j_{Qy} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_t$ d'où

$$\left(\frac{\partial j_{Qy}}{\partial y}\right)_t = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_t$$

On reporte dans l'équation de départ

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y = +\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_t$$

Équation de la diffusion thermique ou équation de la chaleur dans le cas à une dimension cartésienne :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_t = 0$$

Soit en introduisant la **diffusivité D**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_y = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_t \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

En raisonnant en ordre de grandeur sur l'équation de diffusion : $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_t \rightarrow \frac{\Delta T}{\tau} = D \frac{\Delta T}{L^2}$ soit

$$D = \frac{L^2}{t} \quad L = \sqrt{Dt} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} t} \quad \text{longueur caractéristique de diffusion pour une durée } t$$

26. Equation différentielle linéaire, avec une relation linéaire entre T et θ , on a donc

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_y = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_t$$

En exploitant les conditions initiales et la valeur limite (résumées figure 5), on obtient avec $\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_1}{T_0 - T_1}$:

$$\theta(y > 0, t = 0) = \frac{T(y > 0, t = 0) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_0 - T_1} = 0 \quad \boxed{\theta(y > 0, t = 0) = 0}$$

$$\theta(y = 0, t > 0) = \frac{T(y = 0, t > 0) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_1} = 1 \quad \boxed{\theta(y = 0, t > 0) = 1}$$

$$\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0) = \frac{T(y \rightarrow +\infty, t > 0) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_0 - T_1} = 0 \quad \boxed{\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0) = 0}$$

27. On a $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\text{Or } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \times \frac{y}{2\sqrt{D}} t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \times \frac{1}{t} = -\frac{\eta}{2t} \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Or $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} = \frac{\eta}{y}$ d'où

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\eta}{y} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{d\theta}{d\eta}$$

On a donc

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_t = \left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right] \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \times \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = \frac{1}{4Dt} \times \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$$

En injectant dans $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_y = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)_t$: $-\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta} = D \frac{1}{4Dt} \times \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$ soit

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \times \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \iff \boxed{\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0} \quad \text{CQFD}$$

28. On pose $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$ soit $\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$ or dans $\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0$ on obtient

$$\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} + 2\eta\varphi(\eta) = 0 \implies \varphi(\eta) = \frac{\varphi(0)}{C} e^{-\eta^2} = C e^{-\eta^2} = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$$

On a donc en intégrant :

$$\theta(\eta) = D + C \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

Or $\theta(y=0, t>0) = 1 = \theta(\eta=0, t>0) = D$ soit

$$\theta(\eta) = 1 + C \int_0^\eta e^{-z^2} dz$$

Et $\theta(y \rightarrow +\infty, t=0) = 0 = \theta(\eta \rightarrow +\infty, t=0) \implies$

$$1 + C \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = 0 = 1 + C \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies C = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz} \quad \text{CQFD}$$

Enfin, $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz = \frac{T(y,t)-T_1}{T_0-T_1}$

$$T(y,t) = T_1 + (T_0 - T_1) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz \right]$$

$$\boxed{T(y,t) = T_1 + (T_0 - T_1) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz \right] = \left[\frac{2(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz \right]}$$

III.2 Formation d'une croûte de lave solide

□ - 29. On repart de $\varphi(\eta) = A' \exp(-\eta^2)$. Pour trouver la valeur de A' , on utilise les nouvelles conditions aux limites :

- $T(\lambda) = T_f$ donc $\theta(\lambda) = 1$;
- $\theta(0) = \theta(y=0, t>0) = \frac{T_0 - T_0}{T_f - T_0} = 0$

Or, en intégrant φ , on obtient :

$$\theta(\eta) = \theta(0) + A' \int_0^\eta \exp(-z^2) dz = \theta(0) + A' \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta)$$

Ainsi :

$$A' \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)}$$

D'où :

$$\theta(\eta) = \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)}$$

- – 30. On suppose la transformation monobare, lors du passage de l'état liquide à l'état solide, le transfert thermique reçu par le fluide est :

$$dH = m \Delta h_{\text{liq} \rightarrow \text{sol}}(T_f)$$

Le transfert thermique cédé est donc :

$$\delta Q = -dH = -m \Delta h_{\text{liq} \rightarrow \text{sol}}(T_f) = m \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$$

Or $m = \rho S dy_S$ donc :

$$\delta Q = \rho S dy_S \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$$

- – 31. L'énergie cédée par la tranche vers le haut par diffusion thermique est :

$$-j_Q(y = y_S) S dt$$

D'après la loi de Fourier :

$$j_Q(y = y_S) = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_S}$$

L'énergie libérée par la solidification s'échappe par diffusion thermique :

$$\rho S dy_S \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_S} S dt$$

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_S}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_S}$$

- – 32. On a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_S} = (T_f - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial y} = (T_f - T_0) \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

or :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_S} = \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{Dt}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)}$$

Et, comme $y_S(t) = 2\lambda\sqrt{Dt}$:

$$\frac{\partial y_S}{\partial t} = 2\lambda \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{t}} = \lambda \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{t}}$$

Ainsi, on injecte dans l'équation question 31 :

$$\rho \lambda \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{t}} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = -\kappa \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{Dt}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)}$$

$$\frac{\rho D}{\kappa} \frac{\sqrt{\pi}}{T_f - T_0} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$$

Or $D = \kappa/(\rho c)$ donc $\rho D/\kappa = 1/c$ d'où :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$$

□ – 33. La grandeur :

$$X = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$$

est une constante numérique. Il s'agit de trouver à quel moment la fonction $F : \lambda \mapsto \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$ atteint cette constante. On peut procéder par **dichotomie**. Le principe est le suivante.

1. on considère deux points de départ λ_d et λ_f tels que $F(\lambda_d) > X$ et $F(\lambda_f) < X$.

2. On évalue $F\left(\frac{\lambda_d + \lambda_f}{2}\right)$

— si la valeur obtenue est plus petite que X , alors la solution est entre λ_d et $\frac{\lambda_d + \lambda_f}{2}$. On remplace λ_f par $\frac{\lambda_d + \lambda_f}{2}$.

— si la valeur obtenue est plus grande que X , alors la solution est entre $\frac{\lambda_d + \lambda_f}{2}$ et λ_f . On remplace λ_d par $\frac{\lambda_d + \lambda_f}{2}$.

3. On renouvelle l'opération jusqu'à ce que l'intervalle $\lambda_f - \lambda_d$ soit assez petit.

On peut aussi utiliser la méthode des tangentes de Newton qui converge plus rapidement.

□ – 34. On a :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 0,708$$

L'antécédant de 0,708 par $\lambda \mapsto \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$ est environ égal à $\lambda = 0,8$ d'après la représentation graphique.

Pour estimer l'épaisseur de la croûte, on calcule :

$$y_s = 2\lambda\sqrt{Dt} = 2 \times 0,8 \times \sqrt{7 \cdot 10^{-7} \times 180 \times 24 \times 3600} \approx 5,3 \text{ m}$$

Graphiquement, on lit un résultat du même ordre (qui concorde surtout avec Makaopuhi).

PROBLEME N°4 A – SUJET FACILE - DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE – PINCE AMPEREMETRIQUE (MINES PONTS, MP, 2014) Corrigé P. Roux

13- L'AEQS consiste à négliger la durée de propagation d'une onde devant la durée caractéristique du signal, soit classiquement : $T \gg \tau = \frac{L}{c}$ avec L longueur caractéristique du système. L'énoncé semble toutefois vouloir évoquer l'AEQS magnétique, qui consiste à négliger le vecteur densité de courant de déplacement $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le vecteur densité de courant de conduction \vec{j} .

L'ARQS magnétique consiste à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, elle n'est valable que lorsque les variations temporelles de E sont suffisamment lentes, et que l'effet des courants électriques l'emporte sur celui des charges.

On peut alors simplifier l'équation de Maxwell-Ampère, ce qui revient à calculer le champ \vec{B} de la même manière qu'en magnétostatique alors même que le courant est variable.

Régimes variables	$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régimes quasi stationnaires (lentement variables) « magnétiques » :	$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) \cong \mu_0 \vec{j}$

ARQS magnétique				
Régimes stationnaires (indépendants du temps)	$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

Théorème d'Ampère : La circulation du vecteur champ magnétostatique le long d'un contour **fermé et orienté** (\mathcal{C}), est égale au produit par μ_0 de la somme algébrique des intensités des courants qui traversent une surface (Σ) s'appuyant sur (\mathcal{C}) :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Par définition, le courant enlacé $I_{\text{enlacé}}$ est la somme **algébrique** des intensités des courants qui traversent la surface Σ s'appuyant sur (\mathcal{C}) :

$$I_{\text{enlacé}} = \sum_k I_{\text{enlacé},k}$$

Le contour (\mathcal{C}) étant orienté, on définit le sens du vecteur $d\vec{S}$ dans le sens donné par la règle de la main droite ; $I_{\text{enlacé}}$ est compté positivement s'il traverse le contour d'Ampère dans le sens de $d\vec{S}$ et négativement sinon.

14. – Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle des courants $i(t)$ et $i_1(t)$ donc le champ \vec{B} créé par ces courants est perpendiculaire à ces plans de symétrie : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\hat{u}_\theta$. Ce champ est également invariant par toute rotation d'un angle multiple de $2\pi/N$; si N est assez grand, il s'agit pratiquement d'une invariance de révolution donc $\vec{B}(M) = B(r, z)\hat{u}_\theta$. On applique alors le théorème d'Ampère à un cercle (\mathcal{C}) de rayon r et d'axe (Oz), donc à r et z fixés, et entièrement situé à l'intérieur du tore ; on a alors $d\vec{r} = r d\theta \hat{u}_\theta$ donc $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z)$. Le courant traversant un disque de rayon r comporte (dans le sens positif) le courant i au centre en N courants tous égaux à i_1 (puisque le cercle (\mathcal{C}) est intérieur au tore, le disque est traversé une seule fois par chacun des fils formant un rectangle) soit $i_{(\mathcal{S})} = i + Ni_1$ et $\vec{B}(M) = B(r)\hat{u}_\theta$ où $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}(i + Ni_1)$.
15. – Considérant que le bobinage de la pince ampèremétrique est formé de N rectangles de côtés $b - a$ et c , il vient $\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dr dz \hat{u}_\theta$ donc $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi}(i + Ni_1) \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz$ ou enfin $\Phi = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}(i + Ni_1)$. Puisque $\Phi = Li_1 + Mi$ pour i et i_1 quelconque, on peut identifier les deux termes $L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$ et $M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{L}{N}$.
16. – Avec une résistance par unité de longueur λ et un bobinage formé de N rectangles de côtés $b - a$ et c donc de longueur $2(b + c - a)$, on a $R_p = 2\lambda N(b + c - a)$.
17. – En circuit fermé, le bobinage est un circuit (R_p, L, M) avec $u = 0 = R_p i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt} = 0$ qu'on écrit en notation complexe $(R_p + j\omega L) i_1 = -jM\omega i$ soit $\underline{H} = \frac{i_1}{i} = -\frac{jM\omega}{R_p + jL\omega}$.
18. – On réalise une mesure de i au moyen d'une mesure de i_1 si la relation entre les deux grandeurs est linéaire, indépendamment de la forme effectivement sinusoïdale ou non de ces deux courants ; il faut donc que $\omega \gg \frac{R_p}{L}$ pour toutes les pulsations ω figurant dans le spectre de Fourier du signal à mesurer. Dans ce cas, $i_1 = -\frac{M}{L}i$ donc $i_1 = -\frac{i}{N}$; le coefficient N permet de mesurer un courant i assez élevé avec un fort coefficient d'atténuation.

PROBLEME N°4 B : LES BOUEES HOULOGRAFES WAVERIDER (CCS MP 2022) corrigé C.E. Lecomte
IV Mesure de l'inclinaison de la bouée
IV.A Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

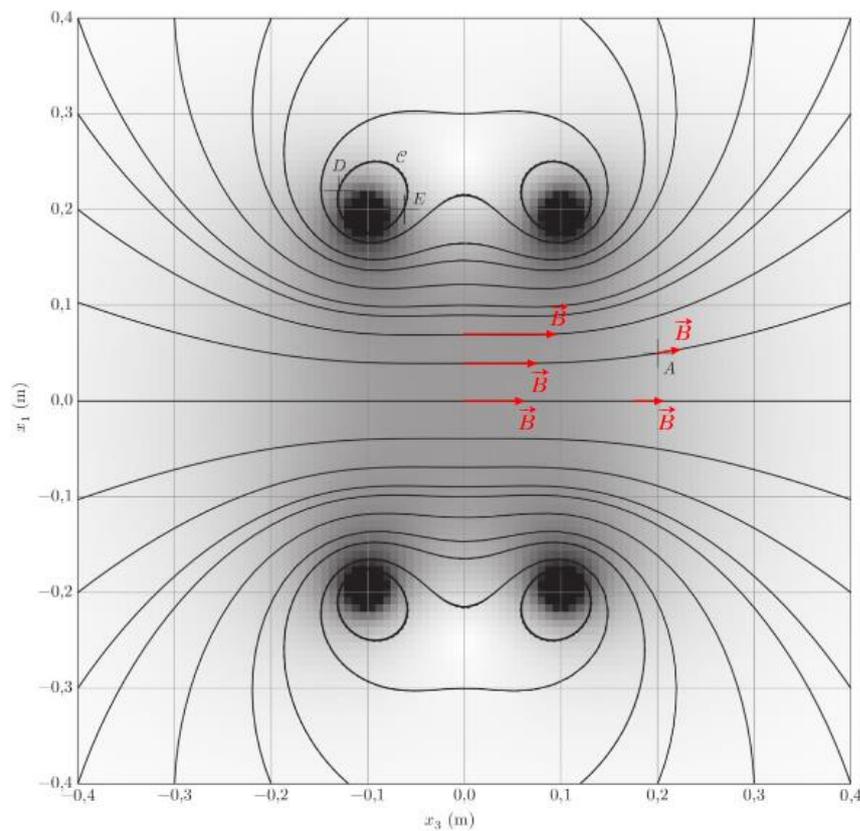
Q36. Le système présente une **invariance par rotation** autour de l'axe (O, \vec{u}_3) : ainsi, la connaissance du champ dans un plan contenant cet axe permet de connaître le champ dans tout l'espace.

Si on considère un point sur l'axe (O, \vec{u}_3) , tout plan contenant cet axe est plan d'antisymétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique appartenant à ces plans, il est dans la direction \vec{u}_3 : $\vec{B}_{\text{axe}} = B_{\text{axe}} \vec{u}_3$

Si on considère un point dans le plan médiateur des deux spires, alors ce plan est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique étant perpendiculaire à ces plans, il est dans la direction \vec{u}_3 :

$$\vec{B}_{\text{axe}} = B_{\text{axe}} \vec{u}_3$$

En dehors de ces points, les lignes de champ donnent la direction du champ magnétique :



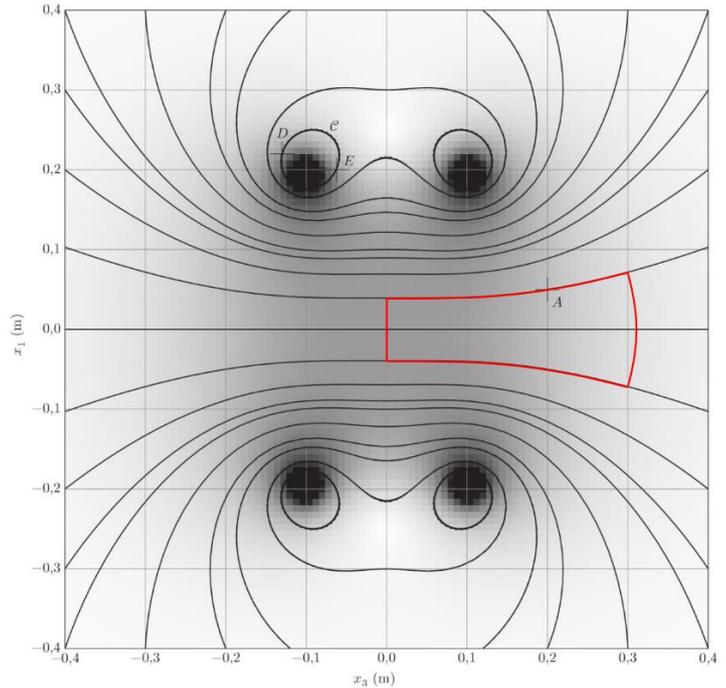
Q37 : Equation de Maxwell-Thomson : $\text{div}(\vec{B}) = 0$; formulation intégrale :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \forall \text{ surface } \Sigma \text{ fermée.}$$

Le champ magnétique est un champ à flux conservatif.

Considérons le tube de champ (à symétrie cylindrique) ci-dessous :

On décompose l'intégrale sur la surface fermée en introduisant la surface latérale ainsi que les surfaces de droite et de gauche aux extrémités du tube de champ.



$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{droite}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Sur la surface latérale, \vec{B} est perpendiculaire au vecteur surface par construction :

$$\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Sur la surface de gauche, \vec{B} est parallèle au vecteur surface de direction opposée :

$$\iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BS_{\text{gauche}}$$

on mesure $r_{\text{règle,gauche}} = 0,75$ cm sur la figure, soit en tenant compte de l'échelle (15,35 cm correspondent à 0,80 m) $r_{\text{gauche}} = 3,9$ cm et on repère $B = 4,5 \mu\text{T}$ entre les deux bobines (figure E) :

$$\iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B\pi r_{\text{gauche}}^2 = -215 \mu\text{T} \cdot \text{cm}^2$$

Sur la surface de droite, \vec{B} est parallèle au vecteur surface de même direction :

$$\iint_{S_{\text{droite}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS_{\text{droite}}$$

on mesure approximativement (la surface n'est pas plane) $r_{\text{règle,droite}} = 1,35$ cm sur la figure, soit en tenant compte de l'échelle $r_{\text{droite}} = 7,0$ cm et on repère $B = 1,4 \mu\text{T}$:

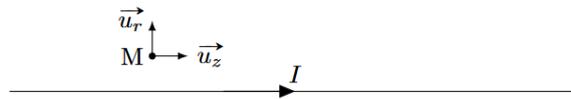
$$\iint_{S_{\text{droite}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\pi r_{\text{gauche}}^2 = 215 \mu\text{T} \cdot \text{cm}^2$$

On trouve bien :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Q38. On repère sur la figure D la valeur de $4 \mu\text{T}$ environ au niveau des points D et E.

Champ créé par un fil infini rectiligne d'axe \vec{u}_z , parcouru par un courant I : on définit les coordonnées cylindriques correspondantes.



Le plan de la feuille $\mathcal{P} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de **symétrie**. Le champ \vec{B} y est perpendiculaire : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$. Il y a une invariance par rotation autour de l'axe \vec{u}_z , le champ magnétique ne dépend pas de θ . Il y a également une invariance du système par translation selon cet axe : le champ magnétique ne dépend pas de z . Ainsi : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère sur un cercle \mathcal{C} de rayon r . D'une part :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} = \mu_0 I$$

D'autre part :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r)r d\theta = 2\pi r B(r)$$

D'où :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ainsi, au voisinage du fil, on peut estimer le champ à :

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{DE}{2}} = 3,5 \mu\text{T}$$

Les valeurs coïncident approximativement (la lecture en échelles de gris est difficile).

Q39. On repère sur le premier graphique la courbe correspondant à $r_0 = 5 \text{ cm}$, pour l'abscisse $x_3 = 0,20 \text{ m}$:

$$B_r(\text{A}) = 0,45 \text{ T}$$

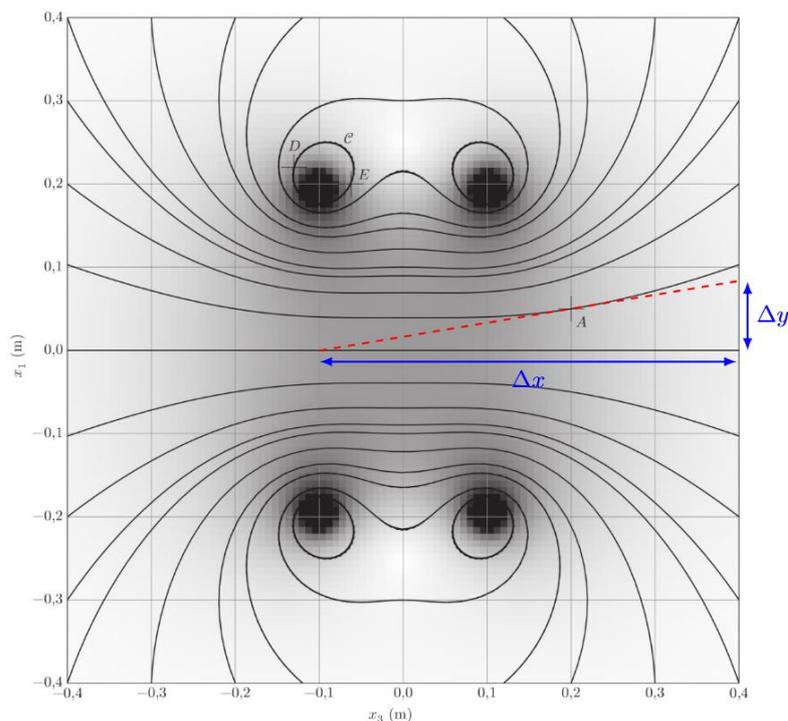
On repère sur le second graphique la courbe correspondant à $x_3 = 0,20 \text{ m}$, pour l'abscisse $x_1 = 0,05 \text{ m}$:

$$B_3(\text{A}) = 2,7 \text{ T}$$

On a alors :

$$\frac{B_3}{B_r} = 6$$

Graphiquement à l'aide de la figure D : on trace la tangente aux lignes de champ en A :



On repère :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{9,6 \text{ cm}}{1,6 \text{ cm}} = 6$$

La valeur graphique de la figure E est compatible avec l'inclinaison de la ligne de champ en A sur la figure D.

Q40. Considérons un cylindre de rayon r , d'axe (O, \vec{u}_3) , situé entre les abscisses x_3 et $x_3 + dx_3$. Appliquons l'équation de Maxwell-Thompson :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Le flux à travers le disque de rayon r à l'abscisse x_3 est :

$$\iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot (-dS\vec{u}_3) = - \iint B_3(r, x_3) dS$$

Nous nous plaçons proche de l'axe si bien que :

$$B_3(r, x_3) \approx B_{\text{axe}}(x_3)$$

D'où :

$$\iint_{S_{\text{gauche}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_{\text{axe}}(x_3) \pi r^2$$

De même, le flux à travers le disque de rayon r à l'abscisse $x_3 + dx_3$ est :

$$\iint_{S_{\text{droite}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{\text{axe}}(x_3 + dx_3) \pi r^2$$

À travers la surface latérale :

$$\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot (dS\vec{u}_r) = \iint_{S_{\text{lat}}} B_r(r, x_3) dS = B_r(r, x_3) 2\pi r dx_3$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} -B_{\text{axe}}(x_3) \pi r^2 + B_{\text{axe}}(x_3 + dx_3) \pi r^2 + B_r(r, x_3) 2\pi r dx_3 \\ \frac{B_{\text{axe}}(x_3 + dx_3) - B_{\text{axe}}(x_3)}{dx_3} = - \frac{B_r(r, x_3) 2\pi r}{\pi r^2} \end{aligned}$$

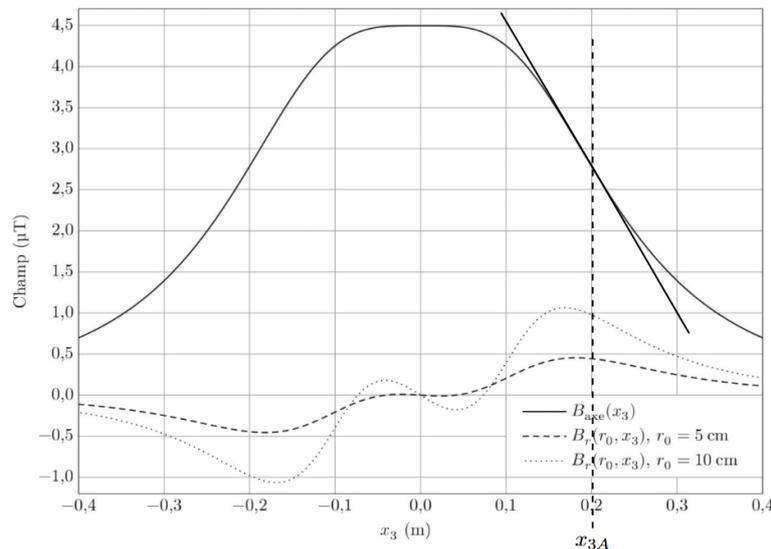
On obtient bien :

$$B_r(r, x_3) \approx - \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}$$

Q41. On lit $B_r(A) = B_r(r = 5 \text{ cm}, x_3 = 0,2 \text{ m})$ sur le premier graphique de la figure E :

$$B_r(A) = 0,45 \text{ T}$$

On estime $\frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}$ en traçant la tangente à la courbe B_{axe} en $x_3 = 0,2 \text{ m}$:



$$\frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3} = \frac{1,0 - 4,5}{0,3 - 0,1} = -17,5 \mu\text{T} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ainsi, pour $r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$:

$$\boxed{-\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3} = 0,44 \text{ T}}$$

Les résultats coïncident.

Q42. On repère $B_{\text{axe}} = 4,5 \mu\text{T}$ et on donne $N_1 i_1 = 1 \text{ A}$. Ainsi :

$$\boxed{\mu = 4,5 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}}$$

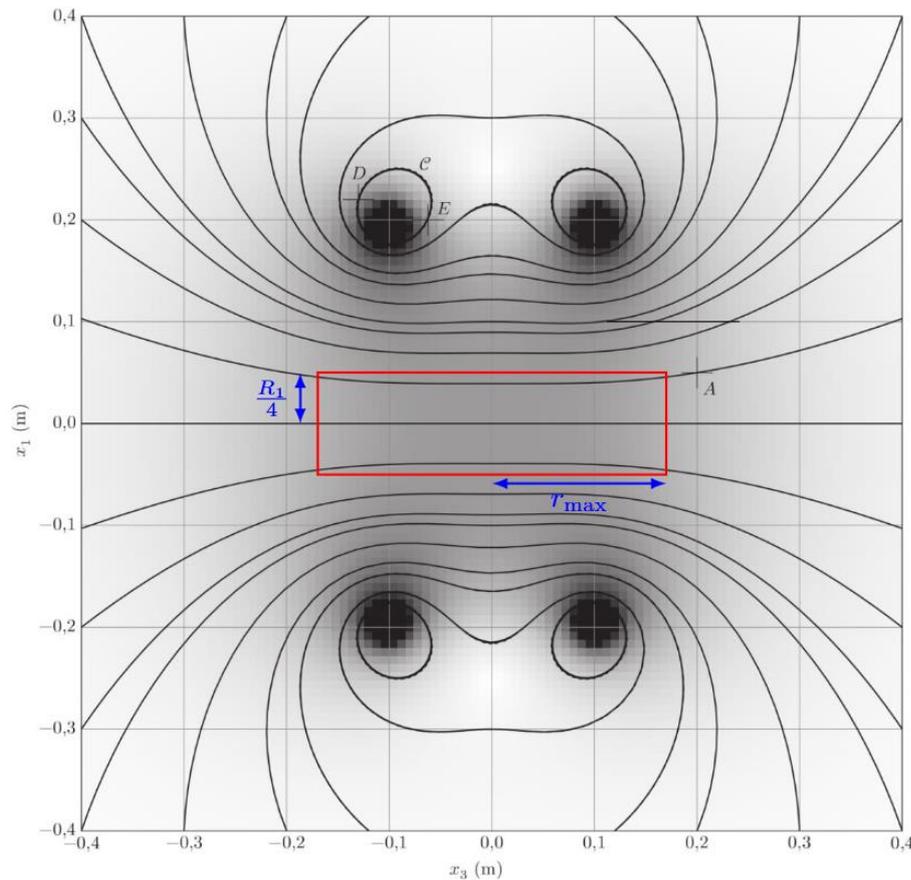
Q43. La condition demandée se réécrit :

$$\frac{9}{10} B_{\text{axe}}(0) \leq B_3 \left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4} \right) \leq \frac{11}{10} B_{\text{axe}}(0)$$

Soit :

$$4,05 \text{ T} \leq B_3 \left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4} \right) \leq 4,95 \text{ T}$$

On repère sur la courbe $B_3(x_1, x_3)$ pour $x_3 = 0,05 \text{ m} = \frac{R_1}{4}$ les abscisses respectant cette condition : c'est l'intervalle $-0,17 \text{ m} \leq x_1 \leq 0,17 \text{ m}$. Schéma du cylindre :



IV.B Exploitation du couplage électromagnétique

Q44. Le flux du circuit \mathcal{C}_1 dans le circuit \mathcal{C}_2 est proportionnel à l'intensité i_1 : l'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité :

$$\boxed{\phi_{\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2} = M i_1}$$

D'après la Q42 :

$$\vec{B}_1 = \mu N_1 i_1 \vec{u}_3$$

or :

$$\vec{S}_2 = \pi R_2^2 \vec{u}_z$$

Ainsi :

$$\phi_{\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \mu N_1 N_2 \pi R_2^2 i_1 \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_z$$

Or $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$ d'où :

$$\phi_{\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2} = -\mu N_1 N_2 \pi R_2^2 i_1 \sin \varphi$$

On identifie :

$$M = -\mu N_1 N_2 \pi R_2^2 \sin \varphi$$

Q45. La loi de Faraday stipule que :

$$e_1 = -\frac{d\phi_{\text{tot},1}}{dt}$$

où $\phi_{\text{tot},1} = L_1 i_1 + M i_2$. Or, d'après la loi des mailles, $u_1 = -e_1$ d'où :

$$u_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

De même :

$$e_2 = -\frac{d\phi_{\text{tot},2}}{dt}$$

avec $\phi_{\text{tot},2} = L_2 i_2 + M i_1$. De plus, $u_2 = -e_2$ d'où :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Q46. Le voltmètre a une grande impédance assurant que $i_2 = 0$ ainsi :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

Et :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1}$$

Q47. On a :

$$\frac{U_{2m}}{U_{1m}} = \frac{|M|}{L_1}$$

Ainsi :

$$|M| = L_1 \frac{U_{2m}}{U_{1m}} = 1,22 \times 10^{-4} \text{ H}$$

Ensuite :

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|M|}{\mu N_1 N_2 \pi R_2^2}\right) = 20,3^\circ$$

PROBLEME N° 5 : PHYSIQUE EN ARCTIQUE — POLES GEOGRAPHIQUES ET MAGNETIQUES (CMP PSI 2019)

I.A Boussole, champ magnétique et dipôle centrale

Le type de boussole décrit dans cet énoncé ne correspond pas aux boussoles utilisées actuellement par les randonneurs :

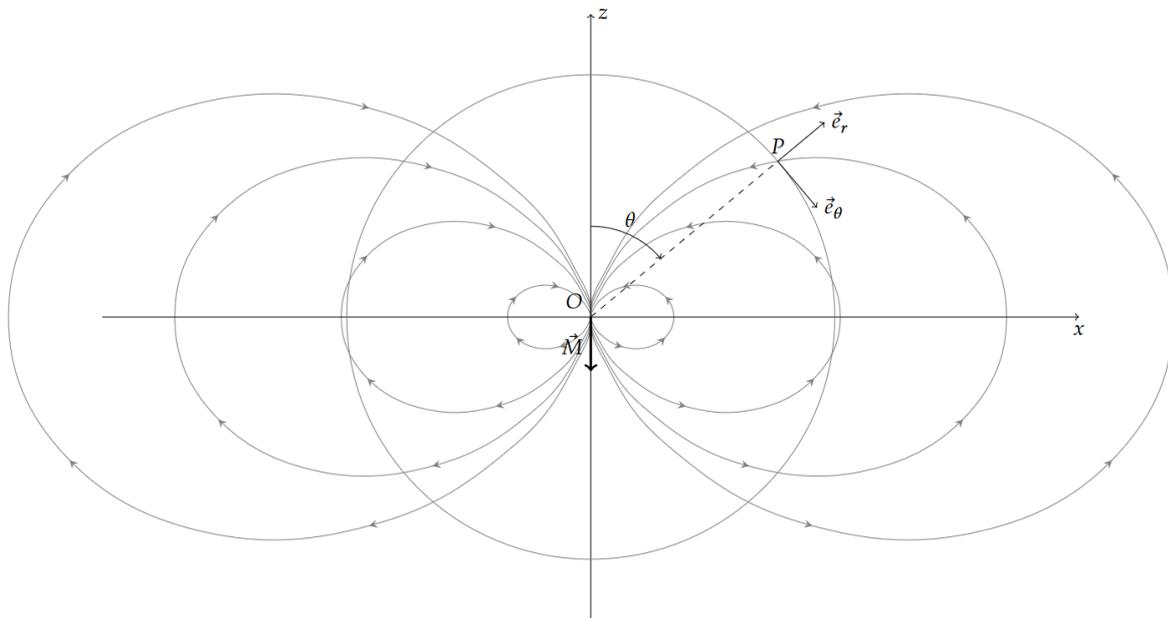
- L'aiguille des boussoles modernes n'est pas aimantée, elle est constituée d'un matériau qui n'a pas de propriété magnétique particulière. Cette aiguille sert uniquement à indiquer la direction du nord magnétique.
- Des aimants permanents de petite dimension sont placés sur une pièce mobile près de l'axe de rotation de la boussole. Cette pièce magnétique a un diamètre de l'ordre du millimètre.
- La direction du moment magnétique de la boussole n'est pas confondu avec celui



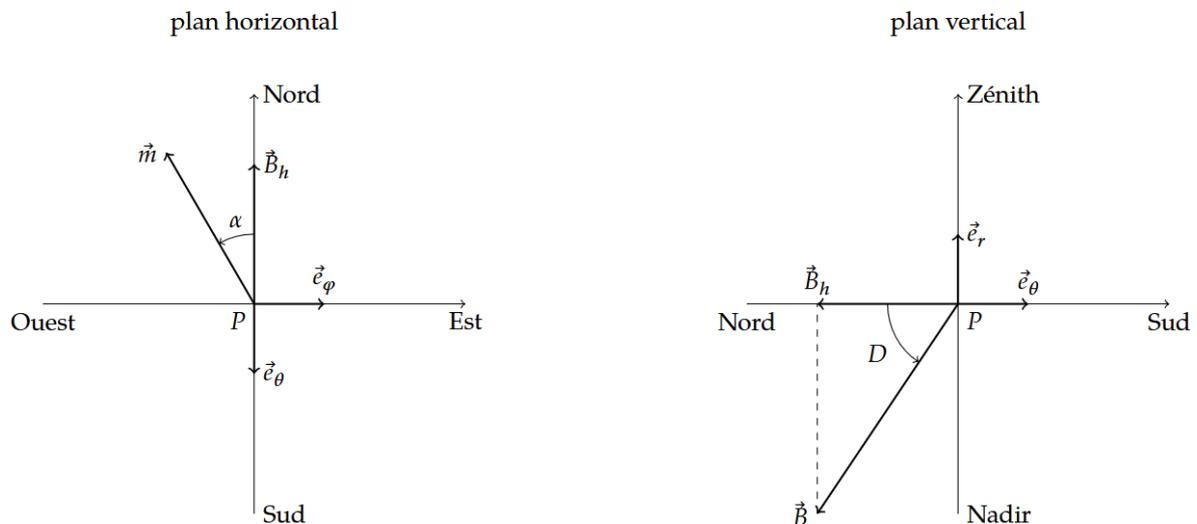
de l'aiguille aimantée : si la boussole est prévue pour être utilisée dans l'hémisphère nord, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le bas. Si la boussole est conçue pour être utilisée en Australie, dans le sud de l'Amérique ou de l'Afrique, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le haut.

- Certaines boussoles indiquent le nord correctement sur toute la surface de la Terre à l'exception des régions polaires : les aimants sont placés sur une pièce qui est en liaison rotule avec le corps de la boussole. Le moment magnétique peut donc avoir une composante importante vers le haut ou vers le bas sans que l'aiguille ne soit affectée par ce mouvement.
- La capsule des boussoles modernes est rempli d'un liquide qui joue deux rôles. D'une part, la poussée d'Archimède qui s'exerce sur les parties mobiles permet de réduire les forces verticales, et donc les frottements solide entre l'équipage mobile et le pivot. D'autre part, les frottements fluides réduisent les oscillations de l'aiguille, les boussoles ont souvent un amortissement proche de la valeur critique, l'aiguille se place alors rapidement et sans osciller dans la direction du nord. (On n'observe pas les oscillations décrites à la question 2 avec une boussole moderne.)
- Les pivots et les pièces magnétiques utilisés font que l'aiguille ne pivote librement que si l'axe de la boussole est proche de la verticale. Si l'écart est de 20° ou plus, les frottements entre l'aiguille et la capsule sont tels que l'aiguille ne bouge pas. Il est impossible, en plaçant l'axe à l'horizontal de mettre en évidence l'inclinaison du champ magnétique terrestre. (La réponse suggérée par l'énoncé à la question 5 n'est pas réalisable.)

1. La carte de champ magnétique dipolaire a l'allure suivante :



En un point P de la surface de la Terre :

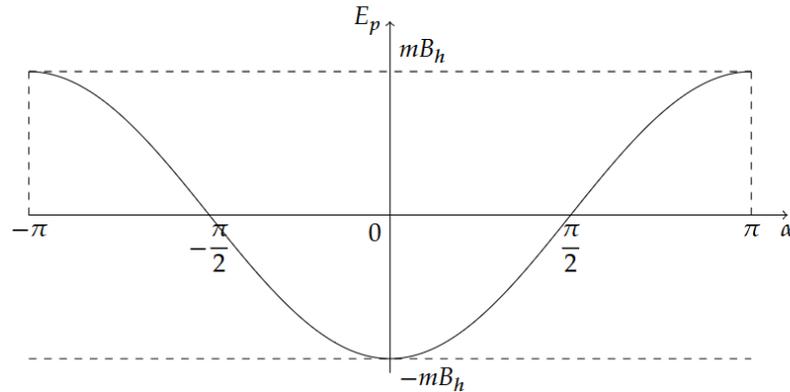


L'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique de la boussole et le champ magnétique terrestre est :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}.$$

En notant \vec{B}_h la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui est dirigée vers le nord : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_h$.

Donc $E_p = -mB_h \cos \alpha$.



La position $\alpha = 0$ correspond à un minimum d'énergie potentielle, il s'agit donc d'une position d'équilibre stable.

L'aiguille indique le nord et cette position est stable.

2. L'énergie cinétique de l'aiguille est $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$ et l'énergie mécanique totale est $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mB_h \cos \alpha$.

La conservation de l'énergie se traduit par $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Donc $I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mB_h \sin \alpha = 0$

Pour de petits mouvements : $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{I} \sin \alpha = 0$

La période d'oscillation est alors : $\tau_{\text{osc}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mB_h}}$.

La période d'oscillation permet de connaître la composante horizontale du champ magnétique : $B_h = \frac{I}{4\pi^2 \tau_{\text{osc}}^2 m}$

3. Le champ magnétique est $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 \vec{M}}{R_T^3}$ avec $\begin{cases} \vec{R} = R_T \vec{e}_r \\ \vec{M} = M_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{cases}$.

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{3 \cos \theta \vec{e}_r - (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)}{R_T^3}$$

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{R_T^3}$$

4. En un point de l'équateur, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{B} = B_E \vec{e}_z = -B_E \vec{e}_\theta$.

$$\text{Donc } \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta = -B_E \vec{e}_\theta. \text{ Donc } M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0}. \quad M_0 < 0 \text{ et } M_0 = -7,9 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Avec $\theta = 0$ au pôle nord et $\theta = \pi$ au pôle sud, le champ magnétique est $\vec{B}_p = -\frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$. Donc $B_p = 2B_E = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

5. L'angle D défini par l'énoncé n'est pas la déclinaison magnétique mais l'inclinaison, généralement notée I .

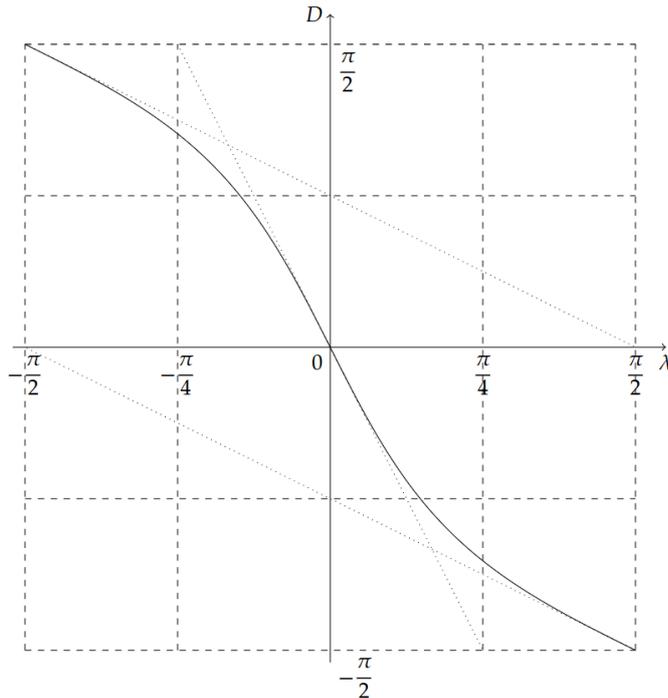
- Dans l'hémisphère nord, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et $\vec{B} \cdot \vec{e}_r < 0$. La composante verticale du champ magnétique est dirigée vers le bas.

Dans l'hémisphère nord, l'inclinaison est négative.

- $\tan D = -\frac{\vec{B} \cdot \vec{e}_r}{\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta}$.

Donc $\tan D = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Or $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc $\tan D = -2 \tan \lambda$

- Le graphique donnant l'inclinaison D en fonction de la latitude est :



- À proximité des pôles, la composante horizontale du champ magnétique terrestre est faible. Le couple qui oriente l'aiguille de la boussole est donc beaucoup plus faible qu'à l'équateur ou aux latitudes moyennes. En outre, les courants électriques dans la haute atmosphère sont plus intenses au voisinage des régions polaires. Les champs magnétiques créés par ces courants peuvent avoir une influence comparable ou supérieure à celle du champ terrestre. L'aiguille de la boussole peut avoir une direction fluctuante et parfois éloignée de celle du pôle nord.
- Pour déterminer dans quel hémisphère on se trouve, on pourrait être tenté de placer l'axe de la boussole horizontalement, dans la direction Est-Ouest. Si le pôle nord de l'aiguille plonge vers le sol, la boussole est dans l'hémisphère nord. Inversement, si le pôle nord se dirige vers le haut, la boussole est dans l'hémisphère sud. Mais cette technique ne fonctionne pas avec les boussoles usuelles. Les frottements entre l'aiguille et la capsule sont trop importants dans cette position.

Il est possible d'utiliser une boussole d'inclinaison, comme celle représentée ci-contre. L'axe de cette boussole doit être placé perpendiculairement au méridien magnétique et l'aiguille s'aligne alors avec le champ magnétique terrestre. Cette boussole permet de déterminer l'angle d'inclinaison, et donc de savoir dans quel hémisphère on se trouve.

Avec une boussole moderne conçue pour fonctionner dans l'hémisphère nord, il suffit de regarder si l'aiguille se déplace librement lorsque la boussole est placée dans la position usuelle, avec son axe vertical. Si c'est le cas, vous êtes dans l'hémisphère nord. Si l'aiguille frotte sur les parois de la capsule, vous êtes dans l'hémisphère sud.

Enfin, il est possible d'attendre que la nuit tombe et d'observer les étoiles. La réponse à la question est alors évidente, mais la boussole ne sert à rien.



I.B Aurores polaires

6. La force de LORENTZ est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$. Cette force ne travaille pas : l'énergie cinétique se conserve. Donc la norme de la vitesse est constante.

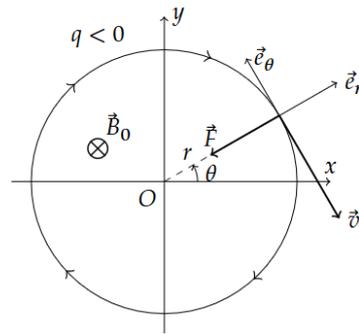
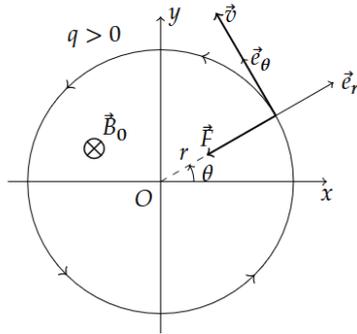
La mouvement est circulaire uniforme.

Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est $\vec{v} = r\omega_c \vec{e}_\theta$ l'accélération est $\vec{a} = -r\omega_c^2 \vec{e}_r$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule chargée est alors : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Donc $m r \omega_c^2 = |q| B_0 r \omega_c^2$ et donc $\omega_c = \frac{|q| B_0}{m}$

Le sens de parcours dépend du signe de la charge q :



7. L'intensité comptée positivement dans le sens trigonométrique, associée à la rotation de la particule chargée est $i = \frac{q}{T}$ où $T = \frac{2\pi r}{v}$ est la période de révolution.

Le moment magnétique associé à la boucle de courant est $\vec{M} = \pi r^2 i \vec{e}_z$. Donc $\vec{M} = \frac{1}{2} r q v \vec{e}_z$.

Et donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} r q v B_0$. Or, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique $q v B_0 = m \frac{v^2}{r}$.

Donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} m v^2$, et donc $\boxed{\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -E_c}$

8. La situation au voisinage du pôle nord est représenté ci-contre.

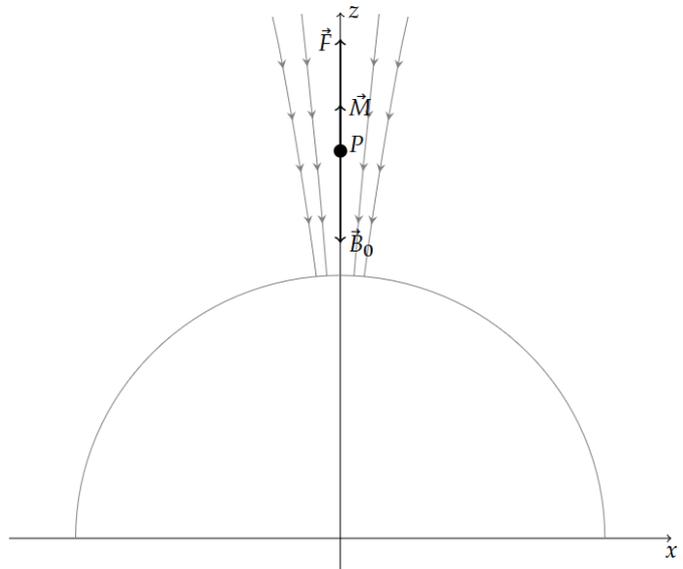
Le champ magnétique terrestre est $\vec{B}_0 = -B_0(z) \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$.

Sur l'axe Oz , la norme du champ magnétique décroît avec l'altitude, donc $\frac{dB_0}{dz} < 0$

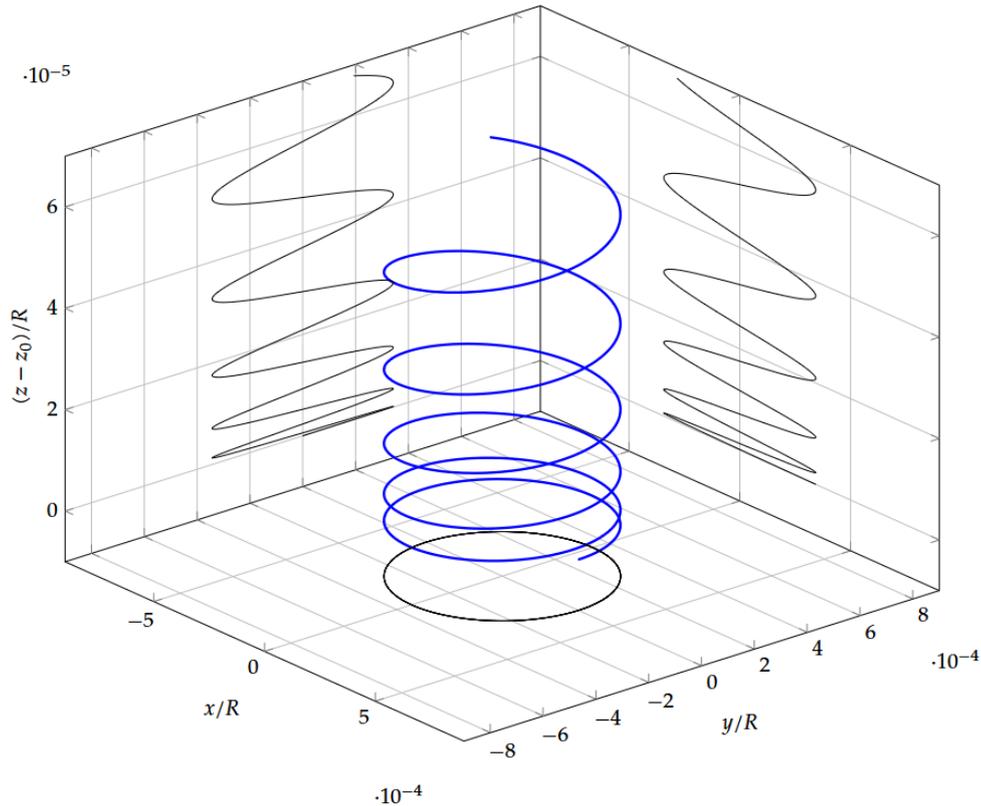
Le mouvement du proton a été décrit à la question 6 : $\vec{M} = M_z \vec{e}_z$ avec $M_z > 0$.

La force subit par le proton est $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$ avec $= -M_z \frac{dB_0}{dz} > 0$. Donc $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ avec $F_z > 0$.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = -B_0(z) \vec{e}_z & \text{avec } B_0 > 0 \\ \vec{M} = M_z \vec{e}_z & \text{avec } M_z > 0 \\ \vec{F} = F_z \vec{e}_z & \text{avec } F_z > 0 \end{cases}$$

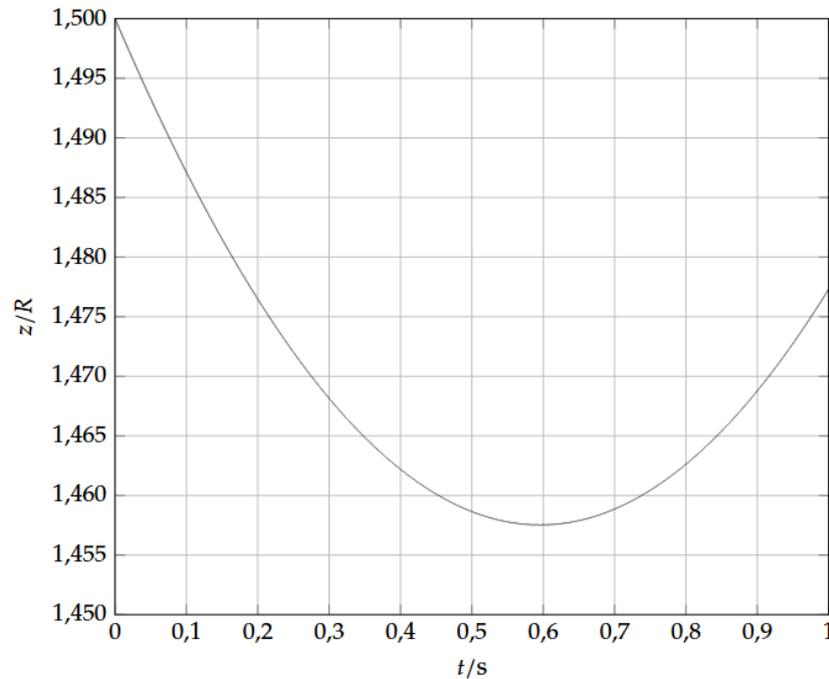


La force de LORENTZ ne travaille pas, la norme de la vitesse est donc constante au cours du mouvement. La trajectoire d'un proton est une hélice dont le pas et le rayon sont variables. La courbe ci-dessous donne l'allure de la trajectoire pour quelques périodes cyclotron.



Le mouvement de rotation est due à la force de LORENTZ, qui est essentiellement dirigée vers l'axe de la trajectoire hélicoïdale qui est une ligne de champ.

Le mouvement de dérive est due à la force moyenne $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$. La figure ci-dessous donne l'allure de l'altitude $z(t)$ d'un proton. La force \vec{F} est dirigée vers le haut (dans le sens des z croissants.)



Si l'on ne considère que la composante verticale du mouvement, le proton est freiné lorsqu'il s'approche de la Terre, il est accéléré lorsqu'il s'en éloigne.

L'équation de MAXWELL-THOMSON s'écrit $\text{div } \vec{B} = 0$.

Donc avec un champ magnétique de la forme $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$, l'équation de MAXWELL-THOMSON implique $\frac{dB_0}{dz} = 0$ et donc $G_m(z) = 0$.

En réalité, le champ magnétique au voisinage de l'axe (Oz) est de la forme $\vec{B} \simeq -B_0(z, r)\vec{e}_z - B_r(r, z)\vec{e}_r$ avec $B_r(r, z) \ll B_0(z)$.
L'équation de MAXWELL-THOMSON implique alors $\frac{\partial B_0}{\partial z} = -\frac{\partial B_r}{\partial r}$. Et alors $G_m(z) \neq 0$.

10. Les équations obtenues aux questions précédentes :

$$\begin{cases} E_c = M(z)B_0(z) & \text{énergie cinétique constante} \\ F_z = -M(z)\frac{dB_0}{dz} & \text{force de dérive} \\ B_0(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi z^3} & \text{champ magnétique sur l'axe (Oz)} \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} F_z = -\frac{E_c}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} \\ \frac{1}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} = -\frac{3}{z} \end{cases}$$

Donc, la force de dérive qui agit sur un proton est $F_z = \frac{2E_c}{z}$.

Au voisinage immédiat de la Terre, les forces qui agissent sur le proton sont la force de dérive et le poids :

$$\begin{cases} F_z = \frac{2E_c}{R_T} & \text{force de dérive} \\ P = mg & \text{poids} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_z = 3,8 \cdot 10^{-23} \text{ N} & \text{force de dérive} \\ P = 1,7 \cdot 10^{-26} \text{ N} & \text{poids} \end{cases}$$

Avec les valeurs précédentes $\frac{P}{F_z} = 4,4 \cdot 10^{-4}$. Le poids est négligeable devant la force dérive.

PROBLEME N° 6 : TERRAFORMATION DE MARS (CCS PC 2024) corrigé M. Loire et M. Legendre

Q23 On applique la loi de Stefan-Boltzmann au Soleil pour trouver

$$\mathcal{P}_{s,e} = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$$

Q24 Par conservation de l'énergie, cette puissance se retrouve sur une sphère de rayon r_m . On en déduit que la puissance surfacique au niveau de Mars est

$$p_{m,i} = \frac{\mathcal{P}_{s,e}}{4\pi r_m^2} = \sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2}$$

Q25 La puissance absorbée est la puissance incidente moins la puissance réfléchie :

$$\mathcal{P}_{m,a} = (1 - \alpha)\mathcal{P}_{m,i}$$

Comme $\mathcal{P}_{m,i} = p_{m,i}\pi R_m^2$ (surface apparente de Mars), il vient

$$\mathcal{P}_{m,a} = (1 - \alpha)\sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{r_m^2} \pi R_m^2$$

Q26 On applique la loi de Stefan-Boltzmann à Mars et on a

$$\mathcal{P}_{m,e} = 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4$$

Q27 A l'équilibre radiatif de {Mars}, la puissance absorbée est égale à la puissance émise : $\mathcal{P}_{m,a} = \mathcal{P}_{m,e}$. On obtient alors, avec les expressions précédentes :

$$T_m = T_s \left(\frac{(1-\alpha)R_s^2}{4r_m^2} \right)^{1/4} = 210K$$

On trouve une valeur très proche de celle donnée dans l'énoncé.

Q28 On applique la loi de Wien au Soleil :

$$\lambda_s = \frac{\beta}{T_s} = 502nm$$

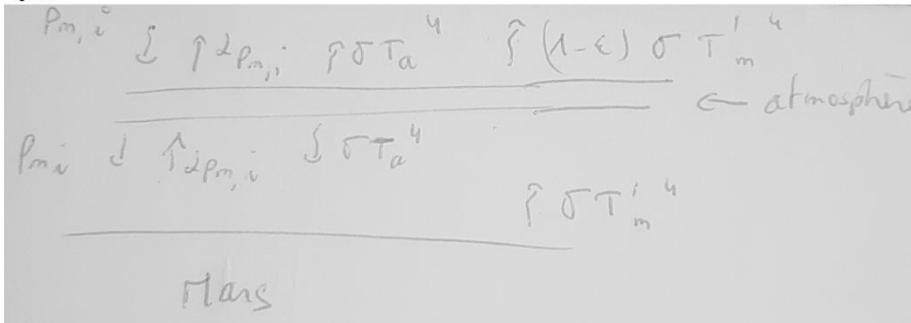
Cela correspond à un rayonnement visible jaune/vert.

On applique la loi de Wien à Mars :

$$\lambda_m = \frac{\beta}{T_m} = 13,8\mu m$$

Cela correspond à un rayonnement infrarouge.

Q29



Q30 On applique la condition d'équilibre radiatif à {Mars}

$$(1-\alpha)p_{m,i}\pi R_m^2 = 4\pi R_m^2\sigma(T_m'^4 - T_a^4)$$

On applique la condition d'équilibre radiatif à {atmosphère} :

$$2\sigma T_a^4 + (1-\epsilon)\sigma T_m'^4 = \sigma T_m^4$$

On a alors $\sigma T_a^4 = \frac{\epsilon}{2}\sigma T_m^4$. On injecte dans la relation précédente avec $p_{m,i} = \frac{P_{s,e}}{4\pi r_m^2}$ et il vient :

$$(1-\alpha)P_{s,e}\frac{1}{4r_m^2} = 4\pi\sigma T_m'^4\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$T_m' = \left(\frac{P_{s,e}(1-\alpha)}{\sigma 8\pi r_m^2 (2-\epsilon)} \right)^{1/4} = \frac{T_m}{(1-\epsilon/2)^{1/4}}$$

Q31 On a alors

$$\epsilon = 2 \left(1 - \left(\frac{T_m}{T_m'} \right)^4 \right) = 1,5$$

Or $\epsilon \in [0; 1]$ donc il est impossible d'atteindre 298 K en jouant seulement sur la composition de l'atmosphère.

Q32 Il faut prendre $\alpha = 0$ et $\epsilon = 1$. On trouve alors

$$T_m' = T_s \left(\frac{R_s^2}{2r_m^2} \right)^{1/4} = 274K$$

Même dans ces conditions, il ferait trop froid (mais on s'approche des conditions idéales pour une vie humaine).