TD CHAP.OND.2 : PROPAGATION D'ONDES DANS UN PLASMA

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Propagation dans l'ionosphère IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

Dans un modèle simple, l'ionosphère (hautes couches de l'atmosphère [80 km, 800 km] ionisées par le rayonnement UV, …) est considérée comme un plasma peu dense, composé de cations supposés fixes et d'électrons libres de densité particulaire $n_e \simeq\ 10^{12}\ \mathrm{m}^{-3}$, de charge $-e$, de masse $m = 9{,}1.10^{-31} kg$. De plus, on suppose que les interactions électrons-électrons et électrons-cations sont négligeables. Ainsi les électrons ne subissent aucune force de frottement dans leur déplacement. On envisage la possibilité de voir se propager dans le plasma une onde plane (pseudo-)progressive monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement à laquelle est attachée le champ $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(j(\omega t - k(\omega) z)\big)\overrightarrow{e_x}$ et se propageant selon les z croissants. Les électrons considérés étant non relativistes, on négligera la partie magnétique de la force de Lorentz devant la partie électrique.

1. Montrer que dans le cas où les électrons sont considérés comme non relativiste, la partie magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la partie électrique.

2. Moyennant certaines hypothèses que l'on explicitera, montrer que la conductivité du plasma peut se mettre sous la forme $\gamma = -j\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$. On explicitera ω_p en fonction des données du problème et on donnera la valeur numérique de f_p.

3. Déterminer la puissance volumique moyenne transférée aux porteurs de charges dans le plasma.

4. Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ et en déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma, où on fera apparaître ω_p.

5. Pour $\omega > \omega_p$, tracer l'allure de la relation de $k(\omega)$ puis exprimer la vitesse de phase v_ϕ et tracer leur allure en fonction de ω. Etudier le cas limite $\omega \gg \omega_p$. Pourquoi parle-t-on de transparence ionosphérique ? Proposer une application à ce phénomène.

6. Qu'advient-il d'une OPPM de pulsation $\omega < \omega_p$ incidente sur l'ionosphère ?

7. Déterminer la puissance transportée par l'onde dans le cas $\omega < \omega_p$ et expliquer pourquoi on pourrait considérer le plasma comme un filtre et préciser sa nature.

Exercice 2. Vecteur de Poynting d'une onde dans un plasma IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Considérons une onde se propageant dans un plasma, caractérisée par un champ électrique :

$$\vec{E}_0 e^{-x/\delta} co\, s(\omega t + \varphi)$$

Exprimer le vecteur de Poynting associé à cette onde ainsi que sa moyenne au cours du temps.

Exercice 3. Propagation dans un plasma de la superposition de deux OemPPH de pulsations voisines IMPORTANT | 2 | 2

On étudie la propagation dans le plasma de deux ondes de même amplitude E_0 et de pulsations proches ω_1 et ω_2, se propageant selon $+\vec{e}_z$ et polarisées selon $\vec{e}_x$, avec la même phase à l'origine que l'on choisira nulle. Ces pulsations temporelles ω_1 et ω_2 sont associées par la relation de dispersion à deux pulsations spatiales : $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$.

On pose $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$ et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0$ puis $k_0 = \frac{k_1+k_2}{2} \simeq k_1 \simeq k_2$ et $\Delta k = k_2 - k_1 \ll k_0$.

1. Donner l'expression du champ électrique réel $\vec{E}(z,t) = E(z,t)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}$ résultant de cette superposition dans le plasma.

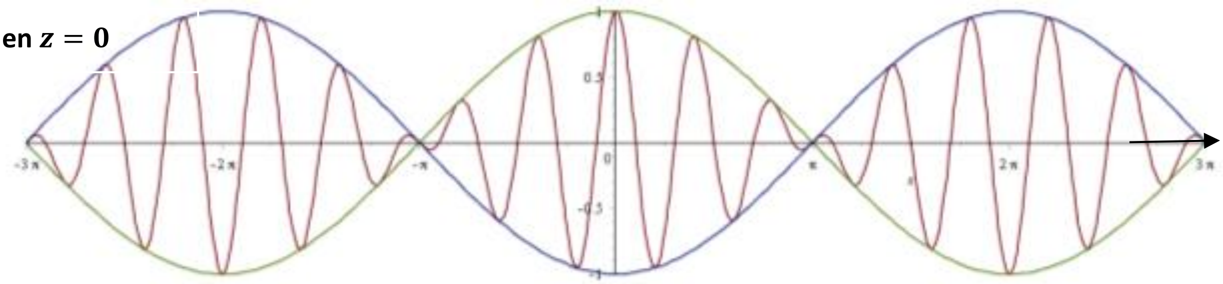
2. On donne l'allure de $E(0,t)$ sur le graphe du haut. Donner son expression mathématique et commenter. On précisera l'expression de la période de l'enveloppe T_b et celle des oscillations rapide T_0.

3. Donner l'expression du champ résultant $E(z,t)$ en z en fonction de $\Delta\omega, \omega_0, \Delta k$ et k_0. Commenter le graphe du bas donnant, à z fixé, l'allure du champ électrique obtenue **dans un milieu dispersif.** Que peut-on dire de la vitesse de propagation de l'enveloppe v_g et des oscillations rapides à l'intérieur v_ϕ?

4. Exprimer v_g en fonction de $\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}$.

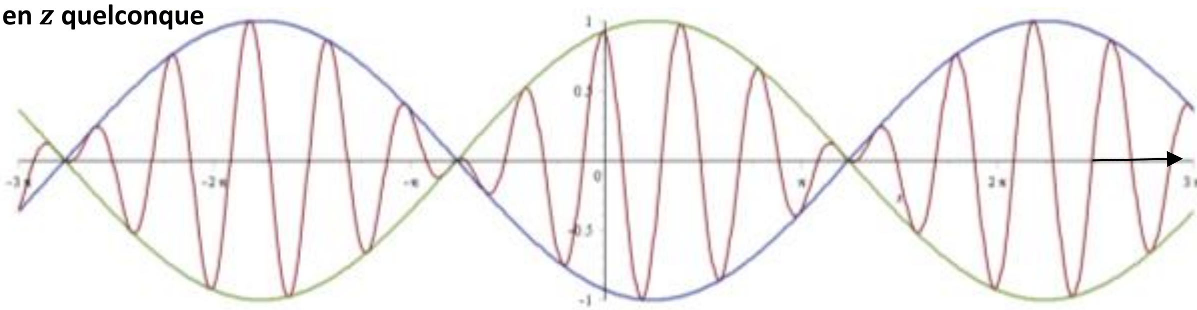
5. Exprimer v_g dans le cas du plasma en fonction des données du problème et tracer son allure en fonction de ω. Trouver une relation simple entre v_φ, v_g et c. Etudier le cas limite $\omega \gg \omega_p$.

$\boldsymbol{E(0,t)}$ **en** $\boldsymbol{z = 0}$



t

$\boldsymbol{E(z,t)}$ **en** $\boldsymbol{z}$ **quelconque**



t

EXERCICES

Exercice 4. Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma IMPORTANT | 2 | 1

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste vu en cours mais on enlève l'hypothèse de milieu restant localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{e}_x$.

1. Montrer que la non neutralité du plasma est lié à la possibilité de l'existence d'ondes longitudinales. Par la suite, on étudiera exclusivement ces ondes et on posera donc $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$.
2. Déterminer le champ magnétique d'une telle onde. On qualifie parfois de telle onde d'électrostatique, justifier cette appellation.
3. Déterminer deux relations entre $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{j}}$ et en déduire l'équation vérifiée par le champ $\underline{\vec{E}}$. Commenter.

Exercice 5. Vaporisation d'une cible par un laser 2 | 1

Dans une expérience de fusion nucléaire par confinement inertiel, une cible reçoit un rayon laser dit Mégajoule de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1$ µm. En absorbant l'énergie de ce rayonnement, la cible se vaporise en un plasma de densité particulaire en électrons n. Expliquer pourquoi n ne peut pas dépasser une valeur maximale n_{max} que l'on calculera.

Exercice 6. Indice du plasma ionosphérique 💡 **2 | ⚒ 1**

On envisage une OPPM de pulsation ω telle que $\omega > \omega_P$ où ω_P est la pulsation du plasma ionosphérique.

Dans une problématique de télécommunication, on cherche à déterminer les conditions telles qu'une telle OPPM émise depuis le sol puisse être totalement réfléchie à l'interface entre l'atmosphère et l'ionosphère ou au contraire puisse traverser le plasma. On donne $\nu_P \approx 1 \times 10^7$ Hz dans l'ionosphère.

1) Donner, en fonction de ω_P/ω, l'expression de l'indice du plasma défini par $n = c/V_\varphi$, où V_φ est la vitesse de phase de l'OPPM dans le plasma. Quelle relation trouve-t-on entre k, n, c et ω ? Faire l'application numérique pour n, à une fréquence de 14 MHz.

2) On suppose que l'interface entre l'air d'indice $n_a = 1$ et le plasma ionosphérique d'indice n est localement plane. Une OPPM de fréquence supérieure à la fréquence plasma, émise depuis le sol arrive en un point O de l'interface air-ionosphère, son vecteur d'onde faisant avec la normale à l'interface un angle d'incidence θ de 30°. En admettant que les lois de Descartes s'appliquent aux vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté, montrer qu'il existe une fréquence $\nu_0 > \nu_P$, avec $\nu_P = \frac{\omega_P}{2\pi}$, en dessous de laquelle l'onde est totalement réfléchie.

Donner l'expression de ν_0 dans le cas d'une incidence normale.

3) La communication par onde hertzienne avec les satellites artificiels utilise les propriétés de transparence du plasma ionosphérique alors qu'au contraire, les communications terrestres en grandes ondes utilisent la réflexion des ondes électromagnétiques sur l'ionosphère.

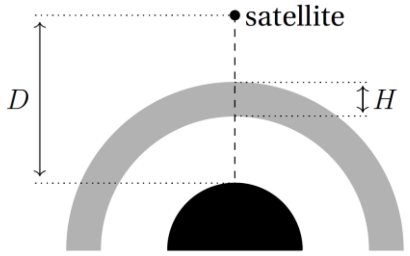
Quelle bande de fréquences vous paraît adaptée à la transmission terrestre des ondes radio? Même question pour la communication avec les satellites orbitant dans ou au-delà de l'ionosphère.

Exercice 7. Correction ionosphérique du GPS IMPORTANT **| 💡 2 | ⚒ 2**

Le système de localisation GPS (*Global Positioning System*) est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de l'ionosphère. L'ionosphère, d'épaisseur H, est un plasma globalement neutre : il contient des électrons de masse m, de charge e et de densité particulaire n, ainsi que des ions de masse M, de charge $+e$ et de densité particulaire n.

On supposera que le plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs ne sont pas en interaction.

Un satellite S, supposé ponctuel, se trouve au-dessus de l'ionosphère, à la verticale d'un point P de la surface de la Terre. On note D la distance SP. On assimile la partie de l'atmosphère autre que l'ionosphère au vide. On note f_P la fréquence plasma de l'atmosphère.



1. On envisage une onde plane progressive monochromatique de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r}))$. Établir la relation de dispersion du plasma, ainsi que l'expression de la fréquence de coupure f_P associée. Pourquoi la nomme-t-on ainsi ? La fréquence f_P fluctue beaucoup dans le temps ; expliquer notamment que la fréquence plasma soit plus haute le jour que la nuit.

2. Le système GPS détermine la position de P par triangulation en mesurant des durées t_i entre le récepteur P et les satellites Sᵢ de la constellation GPS. Ces durées sont alors converties en distances S_iP connaissant la vitesse de propagation. On rappelle l'expression de la vitesse de groupe dans le plasma : $v_g = c\sqrt{1 - f_P^2/f^2}$.

   a) Pourquoi est-ce la vitesse utilisée pour les calculs ?

   b) En quoi la fluctuation de la fréquence plasma est-elle problématique pour déterminer correctement la position de P ?

3. Afin de s'affranchir de ce problème, le satellite émet simultanément à $t = 0$ deux paquets d'ondes très étroits, centrés autour de deux fréquences respectives f_1 et f_2 connues telles que $f_1 > f_2 \gg f_P$. Ils arrivent en respectivement en P aux dates t_1 et t_2. Exprimer en fonction de H, c, f_P, f_1 et f_2 le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$entre les réceptions de deux signaux en P. Simplifier cette expression en utilisant le développement limité $(1-\varepsilon)^k \sim 1 - k\varepsilon$.

4. Etablir l'expression du temps t mis par une onde de fréquence $f \gg f_P$ pour parvenir du satellite jusqu'au point P en fonction de D, H, f, f_P et c.

5. En déduire à l'aide des résultats précédents que $D = ct - d$, où l'on exprimera d en fonction de c , Δt, f, f_1 et f_2.

6. Le terme d est appelé correction ionosphérique, il est obtenu par mesure de Δt en temps réel. Il est de l'ordre du mètre. Commenter cette valeur pour au regard des applications du GPS dont vous avez connaissance.

Exercice 8. Autour des énergies lors de la propagation dans un plasma (J. Kieffer) 💡 **2 |** ⚒ **2**

On considère la propagation d'une OPPM transverse dans un plasma, que l'on décrit en notation complexe par $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}))$. On rappelle la relation de dispersion : $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_P^2)$.

1) Cas où $\omega > \omega_P$

1.a) À partir des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, donner la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma, en faisant intervenir la vitesse de phase v_φ et la direction de propagation $\vec{u}$.

1.b) Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde, ainsi que la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

1.c) Exprimer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie cinétique des électrons (on prendra une densité particulaire n_0 pour les électrons de masse m_e et de charge $-e$) sous l'action de l'onde.

En déduire la densité volumique moyenne d'énergie totale, puis la vitesse de propagation de cette énergie.

2) Cas où $\omega < \omega_P$

2.a) D'après la relation de dispersion, le module d'onde est désormais imaginaire pur. Donner son expression dans le cas où la propagation se fait selon la direction $\vec{u}_z$. Quel signe faut-il choisir pour que l'onde obtenue ait un sens physique? Exprimer le vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$ dans ce cas.

Donner l'expression du champ électrique résultant et commenter sa forme mathématique.

2.b) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à une telle onde.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 9. Onde dans un électrolyte (solution aqueuse ionique) **1 ou 2 | 1**

Dans cet exercice, on cherche à modéliser l'impact d'une faible conductivité de l'eau de mer sur la propagation des ondes électromagnétiques. L'eau de mer est modélisée par un électrolyte (solution contenant des ions responsables du transport du courant) de densité de charge $\rho = 0$ (le milieu est donc localement neutre), de permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et par sa conductivité $\sigma = 6\ \mathrm{S/m}$ (on notera la faible conductivité, liée à la nature des porteurs de charge).

1. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu étudié. On admet que la nature du milieu consiste à remplacer ε_0 par $\varepsilon_r\varepsilon_0$.
2. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique.
3. Déterminer la relation de dispersion du milieu, et la commenter.
4. On considère une onde hertzienne de fréquence $f = 100$ MHz. Déterminer la valeur de la pulsation spatiale k_r. Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y-a-t-il dispersion ?
5. Quelques marines exploitent le domaine VLF (3-30 kHz), voire ELF et SLF (3-300 Hz) pour communiquer avec leurs sous-marins. Expliquer.