TP Transferts thermiques : Mesure d'une conductivité thermique

Objectifs du TP

- Déterminer la conductivité thermique d'un alliage d'aluminium, connaissant celle du cuivre.
- Utiliser un dispositif de mesure de conductivité thermique

Afin de déterminer la conductivité thermique de l'alliage d'aluminium étudié, connaissant celle du cuivre, on dispose de deux barres cylindriques de rayon a et de longueur $L >> a$, l'une en cuivre et l'autre en aluminium, percées de trous régulièrement espacés afin de permettre l'insertion d'une sonde de température.

A l'extrémité des barres, on dispose une résistance chauffante permettant d'augmenter la température dans la barre. On choisira comme origine de l'axe (Ox) des barres le premier trou, avec $x = 0$ pour ce 1er trou. On note T_{ext} la température extérieure et $T\ (x = 0) = T_0$ la température à l'origine une fois le régime permanent établi.

On note λ la conductivité thermique du métal et h le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre et l'air, supposé identique pour les 2 barres.

Attention à ne pas modifier les réglages du rhéostat, le régime permanent est établi.

I) Etude théorique – Régime permanent en tenant compte des pertes convectives latérales

5- A quelle condition peut-on considérer que la longueur de la tige est quasi-infinie ? Vérifiez que cette condition réalisée expérimentalement.

6- Montrez que la température dans la barre vérifie en régime permanent l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_{ext}}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}.$$

7- En utilisant les conditions aux limites, déterminer le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.

II) Détermination expérimentale d'une conductivité thermique

Thermocouple : La mesure de température sera effectuée avec un thermocouple : la différence de potentiel lue au voltmètre est proportionnelle à la différence de température entre les deux extrémités du thermocouple.

Dans le cas d'un thermocouple fer-constantan comme utilisé dans ce TP, le coefficient de proportionnalité est de :

$$\alpha = 0{,}055\ \mathrm{mV.K^{-1}}$$

On a alors : $U = 0{,}055\left(T_{mesure} - T_{ref}\right)$.

8- Vérifier que, lorsque les deux thermocouples sont plongés dans l'eau, la tension U est proche de 0 mV ou du moins très inférieure aux valeurs mesurées avec les barres.

On donne la conductivité du cuivre : $\lambda_{Cu} = 335\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

Proposer un protocole expérimental permettant de déterminer la conductivité λ_{alu} de l'aluminium et en déduire le coefficient de convection h.

Appel professeur (avant mise en place du protocole)

9- Mettre en œuvre le protocole.

10- Comparer le résultat obtenu avec $\lambda_{alu} = 235\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ pour l'aluminium pur (calcul de Z-score (ou écart normalisé).

III) Résolution numérique de l'équation de diffusion thermique

On s'intéresse ici à une barre métallique cylindrique dont la surface latérale est calorifugée. L'extrémité droite de la barre est en contact, supposé parfait, avec l'air de température $Td = 20$°C. Avant le début de l'expérience, toute la barre est à l'équilibre thermique à la température Td.

A l'instant initial, on place l'extrémité gauche de la barre en contact d'une source de chaleur de température $Tg = 40°C$. Ce contact est supposé parfait.

On cherche à déterminer l'évolution de la température au sein de la barre au cours du temps.

On appelle $L = 0{,}5\ \mathrm{m}$ la longueur de la barre et $D = 1.10^{-4}\ \mathrm{m^2s^{-1}}$ le coefficient de diffusion thermique.

A) Etude théorique

11- Faire un schéma de la situation (on appellera (Ox) l'axe dirigeant la barre) et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température dans la barre.

12- Au bout de combien de temps, en ordre de grandeur, peut-on considérer que le régime permanent est atteint au sein de la barre ? Déterminer alors le champ de température en régime permanent dans la barre.

B) Implatation python en régime non stationnaire

■ Modélisation

Nous allons dans la suite déterminer la température $T(x,t)$:

→En tout point de la barre

→A tout instant de l'expérience considérée.

Pour cela, nous allons découper la barre en tronçons de longueur $dx = 1cm$. L'étude sera menée sur une durée de $\Delta t = 45min$, avec un pas temporel de $\mathrm{d}t = 0{,}01\ s$.

La fonction $T(x,t)$ sera donc approximée par un tableau $T[i,j]$ de telle sorte que :

$$T[i,j] = T(\,i \times dx, j \times dt)$$

Chaque colonne du tableau correspond à un instant de l'expérience ($j = 0$ correspondant à l'instant initial). Au sein d'une colonne, on parcourt la barre de gauche ($i = 0$) à droite en incrémentant i.

Le tableau utilisé est de type numpy.array. On aura de plus besoin du module matplotlib.pyplot pour effectuer les représentations graphiques du champ de température.

13- Importer les modules nécessaires à l'étude.

Initialisation

On nommera désormais les variables entières Nt et Nx correspondant respectivement au nombre de lignes du tableau $T[i,j]$ et au nombre de colonnes.

14- Définir Nx et Nt et créer le tableau $T[i,j]$ de bonnes dimensions, rempli au départ avec des 0 dans chaque case.

15- Créer également les listes x et t correspondants respectivement aux valeurs de x pour laquelle la température est évaluée, ainsi qu'aux instants t de calcul.

16- Remplir la première ligne du tableau $T[i,j]$ pour spécifier les conditions initiales de l'expérience.

17- Tracer l'évolution de la température au sein de la barre à l'instant initial.

Itérations

18- Remplir le tableau $T[i,j]$ de manière à imposer, à tout instant, les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre.

*Ceci constitue une **condition de type « Dirichlet »** : la valeur de T est imposée à une ou aux deux des extrémités du domaine d'étude $0 \leq x \leq L$, valeurs éventuellement dépendantes du temps : $T(t,0) = T_0(t)$et/ou $T(t,L) = T_L(t)$; par exemple, en diffusion thermique, extrémités d'une barre en contact avec deux thermostats*

Implantation de l'équation de diffusion

Il s'agit désormais de résoudre l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

19- En utilisant l'approximation de la dérivée, exprimer $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j}$ en fonction de $T[i,j]$ et de la température de cases voisines du tableau dont une d'indice j+1.

20- Soit une fonction f, démontrer que :

$$f''(x) \approx \frac{f(x+dx) + f(x-dx) - 2f(x)}{dx^2}$$

21- En déduire l'approximation de$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ en fonction de $T[i,j]$ et de la température de cases voisines du tableau.

22- En déduire que la résolution de l'équation de diffusion thermique dans la barre se ramène au schéma numérique :

$$T[i,j+1] = T[i,j] + \frac{Ddt}{(dx)^2}(T[i+1,j] + T[i-1,j] - 2T[i,j])$$

On peut montrer qu'un tel schéma numérique converge si $\frac{Ddt}{dx^2} < \frac{1}{2}$. Avec les valeurs de dx et dt choisies, cette condition est respectée pour un matériau de coefficient de diffusivité thermique usuelle $D = 1.10^{-4} m^2.s^{-1}$. On adoptera donc cette valeur de D pour la suite.

23- Implémenter ce schéma numérique pour réaliser le remplissage du tableau T dans son intégralité.

24- Pour différents instants bien choisis, tracer sur un même graphique l'évolution de la température au sein de la barre.