TD.OND.2 : PROPAGATION D'ONDES DANS UN PLASMA - CORRIGE

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Propagation dans l'ionosphère IMPORTANT IMPORTANT | 2 | 2

Exercice 2. Vecteur de Poynting d'une onde dans un plasma IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Exercice 3. Propagation dans un plasma de la superposition de deux OemPPH de pulsations voisines IMPORTANT | 2 | 2

EXERCICES

Exercice 4. Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma IMPORTANT | 2 | 1

1. $\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\underline{\vec{E}} \neq 0$ si l'onde est longitudinale or d'après l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$donc la densité de charge peut être non nulle.

2. En exploitant l'équation de Maxwell-Faraday : $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$. L'onde étant longitudinale, les vecteurs $\vec{k}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont colinéaires, on a donc $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \vec{0} = -i\omega\underline{\vec{B}}$ soit $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$

Le champ magnétique variable est nul.

1. d'après Maxwell-Ampère : $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\vec{j}} + \varepsilon_0 i\omega\underline{\vec{E}}\right) \underbrace{=}_{\underline{\vec{B}}=\vec{0}} \vec{0}$ d'où $\underline{\vec{j}} = -\varepsilon_0 i\omega\underline{\vec{E}}$

De plus, d'après le PFD appliqué aux électrons : $\underline{\vec{j}} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$, soit

$$\underline{\vec{j}} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}} = -\varepsilon_0 i\omega\underline{\vec{E}}$$

D'où

$$\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} = \omega^2 = \omega_p^2$$

Le champ électrique $\vec{E}$ longitudinal oscille nécessairement à la pulsation plasma ω_p

---

Exercice 5. Vaporisation d'une cible par un laser 2 | 1

En exploitant l'expression de la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}$: cette pulsation plasma augmente avec la densité d'électrons, donc au fur et à mesure de la vaporisation de la cible par le laser qui provoque également une ionisation des atomes donc une augmentation de la densité électronique. Au fur et à mesure que n augmente, la pulsation plasma augmente tandis que la pulsation ω du laser reste constante. Or pour $\omega < \omega_p$, l'onde émise par le laser ne parviendra plus à pénétrer dans le métal. Donc à la limite

$$\omega^2 = k^2c^2 = \frac{4\pi^2c^2}{\lambda^2} > \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \Rightarrow n_{max} = \frac{4\pi^2c^2m\varepsilon_0}{e^2\lambda^2} = 1{,}1 \times 10^{27}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Exercice 6. Indice du plasma ionosphérique ***(J. Kieffer)*** 2 | 1

1) Rappelons que la relation de dispersion dans un plasma s'écrit $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_P^2$.
On a alors par définition

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{kc}{\omega} \Rightarrow kc = n\omega$$

D'où en utilisant la relation de dispersion

$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2} = \omega\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}$$

AN : $n(14\,\text{MHz}) \approx 0{,}7$

2) Si on admet que la loi de Descartes s'appliquent, on a

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \Rightarrow \sin i_1 = \frac{1}{2} = n \sin i_2$$

A la limite de réflexion, on a $i_2 = 0$ et donc

$$n_{lim} = \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_P} = \frac{\nu_0}{\nu_P} = \sqrt{4/3}$$

Si $\nu < \nu_0$, on a $n < n_{lim}$ et il n'existe pas d'angle i_2 permettant de vérifier Descartes. Il y a réflexion totale.
Au contraire, si $\nu > \nu_0$, on a $n > n_{lim}$ et il existe un angle i_2 permettant de vérifier Descartes. Il y a réfraction.
La formule générale pour tout θ s'écrit

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{\nu_P^2}{\nu^2}} \Rightarrow \frac{\nu}{\nu_P} = \frac{1}{\cos\theta}$$

Donc dans le cas de l'incidence normale, on retrouve sans surprise que $\nu_0 = \nu_P$.

Exercice 7. Correction ionosphérique du GPS IMPORTANT | 2 | 2

1. voir cours La variation d'éclairement solaire influe sur la densité du plasma

2. Les signaux sont des impulsions quasi monochromatiques qui se propagent à la vitesse de groupe. Comme la fréquence plasma fluctue, il en est de même pour la vitesse de groupe, la distance calculée est donc soumise à des fluctuations

3. $\Delta t = \frac{H}{c}\frac{f_P^2}{2}\left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right)$

4. $t \sim \frac{D}{c} + \frac{H}{c}\frac{f_P^2}{2f^2}$

5. $d = c\Delta t/(f^2/f_2^2 - f^2/f_1^2)$.

Exercice 8. Autour des énergies lors de la propagation dans un plasma (J. Kieffer) 2 | 2

1.a) On a en faisant apparaître les données proposées par l'énoncé z

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(ik(v_\varphi t - \vec{u}\cdot\vec{r}))$$

Et avec Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{v_\varphi}$$

1.b) Le vecteur de Poynting vaut (il faut toujours penser à repasser en réel)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = |E_0|^2 \frac{1}{\mu_0 v_\varphi} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\vec{u}$$

Soit en moyenne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 v_\varphi}\vec{u}$$

Pour la densité d'énergie électromagnétique, on a

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 |E_0^2|}{2} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \frac{|E_0^2|}{2\mu_0 v_\varphi^2} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Soit en moyenne

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0^2|}{4} + \frac{|E_0^2|}{4\mu_0 v_\varphi^2}$$

2) Pour les électrons, on avait le PFD dans le cadre de l'étude du plasma qui s'écrit

$$mi\omega \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e}{im\omega}\underline{\vec{E}}$$

On en déduit la densité volumique d'énergie cinétique (toujours repasser en réel!)

$$e_c = n_0 \times \frac{1}{2} m v^2 = \frac{ne^2}{2m\omega^2}|E_0|^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \Rightarrow \langle e_c \rangle = \frac{ne^2}{4m\omega^2}|E_0|^2 = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

L'énergie totale vaut alors

$$\langle u_{em} \rangle + \langle e_c \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0^2|}{4} + \frac{|E_0^2| c^2}{4\mu_0 c^2 v_\varphi^2} + \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4}\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon_0 |E_0^2|}{4}\left(1 + \frac{\omega_P^2}{\omega^2} + \frac{c^2}{v_\varphi^2}\right)$$

Or $\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}$ d'où

$$\langle u_{tot} \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0^2|}{2}$$

On en déduit la vitesse de propagation de l'énergie avec

$$\vec{\Pi} = \langle u_{tot} \rangle v_{\text{énergie}} \vec{u} \Rightarrow v_{\text{énergie}} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 v_\varphi} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

On retrouve la vitesse de groupe, rassurant non ?

3.a) On a cette fois $k = \pm i k_2$ qui est imaginaire pur et

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(\mp k_2 z) \exp(i(\omega t))$$

Bien entendu, l'onde est évanescente donc elle doit décroître donc $\vec{k} = -ik_2 \vec{e_z}$ et on a

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t))$$

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{ik_2}{\omega}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t))$$

En repassant en réel, on a

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \cos(\omega t)$$

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{ik_2}{\omega}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t))$$

En repassant en réel, on a

$$\vec{E}(M,t) = \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \cos(\omega t)$$

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \frac{k_2}{\omega}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E_0}} \exp(-k_2 z) \sin(\omega t)$$

Le champ $\vec{E}$ et le champ $\vec{B}$ ne se propagent pas, on a une onde évanescente.

3.b)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = |E_0|^2 \exp(-2k_2 z)\frac{k_2}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t)\vec{u} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Ce qui n'est pas très surprenant vu ce qui a été dit avant ...

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 9. Onde dans un électrolyte (solution aqueuse ionique) **1 ou 2 | 1**

3. $k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} - j\omega\sigma\mu_0$: milieu dispersif.

5.6. L'épaisseur de peau caractérise la pénétration des ondes dans l'eau mer, or $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ d'autant plus grande que la fréquence est basse.