# COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

## Colle N°14 – semaine Pronote 21 : 20 au 25 Janvier 2025

## Au programme des exercices

→ **Chapitre OND1 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide**

→ **Chapitre OND2 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans les plasmas**

## Questions de cours

1. ❤️ ❤️ Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$ se propageant dans le vide en vérifiant une équation de propagation de d'Alembert. Etablir la relation entre $\omega$ et $k$, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

2. ❤️ ❤️ Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

3. ❤️ Polarisation d'une onde électromagnétique : polarisation rectiligne, polarisation circulaire.

4. On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$. Exprimer la densité volumique d'énergie et montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique. Dans le cas d'une OemPPH, établir l'expression de la densité volumique d'énergie moyenne.

5. ❤️ Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\ \mathrm{mm}$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\ nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\ \mathrm{mW}$. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$. Calculer les amplitudes $E_{max}$ et $B_{max}$ des champs électrique et magnétique.

6. Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)}\vec{e}_z$. Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ? Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.

7. On considère un plasma peu dense composé de cations supposés fixes et d'électrons libres de densité particulaire $n_e$, de charge $-e$, de masse $m$ et on néglige les interactions des électrons avec les autres particules. Les électrons sont considérés comme étant non relativistes. Définir la notion de plasma et établir l'expression de la conductivité du plasma et définir la pulsation plasma $\omega_p$ du plasma en fonction des grandeurs caractéristiques du système.

8. ❤️ ❤️ On étudie la possibilité de propagation du champ $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(j(\omega t - kx)\big)\,\vec{e_z}$ dans un plasma dilué dont la conductivité électrique complexe vaut $\underline{\gamma}(\omega) = -i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}$. Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ et en déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma, où on fera apparaître la pulsation $\omega_p$.

9. ❤️ ❤️ On considère un plasma dilué vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$. Discuter des possibilités de propagation du champ $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(j(\omega t - kx)\big)\,\vec{e_z}$ en fonction des valeurs de la pulsation $\omega$.

10. ❤️ Vitesse de groupe et vitesse de phase (aucune notion quantitative exigible sur le paquet d'onde). On rappelle la relation de dispersion du plasma dilué : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$; établir les expressions des vitesses de groupe et de phase dans le cas où $\omega > \omega_p$.

11. Phénomène de dispersion (discussion qualitative).

## Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤️❤️ Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$. Etablir la relation entre $\omega$ et $k$, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

Il faut exploiter l'équation de propagation de d'Alembert : $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, et ici $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

**Méthode N°1 : Sans passage aux complexes**

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à $\boldsymbol{x}$, qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert :

or $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0\ cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\ cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$ soit, les grandeurs étant définies positives : $k = \frac{\omega}{c}$

**Méthode N° : Utilisation de la notation complexe**

On a alors $\underline{\vec{E}} = E_0\ \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y}$

Dérivées spatiales : $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik\underline{\vec{E}} = -ikE_0\ \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y}$ $\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2\underline{\vec{E}} = -k^2 E_0\ \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y}$

Dérivées temporelles : $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}} = i\omega E_0\ \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y}$ $\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}} = -\omega^2 E_0\ \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_y}$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\boldsymbol{\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

On trouve

$$-k^2\underline{\vec{E}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^2}} \times \left(-\omega^2\underline{\vec{E}}\right)$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\boldsymbol{\omega = kc} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{\lambda = cT}$$

2. ❤️❤️ Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

**Equations de Maxwell en représentation complexe**

Maxwell-Gauss : $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$

Maxwell-Faraday : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$

Maxwell-Flux : $\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$

Maxwell-Ampère : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

**Relation de structure**, d'après la relation de Maxwell Faraday :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Soit avec la relation de dispersion $\omega = kc$ :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{kc} = \frac{\overrightarrow{u_k} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

Cette relation reste vraie pour les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\overrightarrow{u_k} \wedge \vec{E}}{c}$$

Toute OPP étant une somme d'OPPH de même vecteur $\overrightarrow{u_k}$, cette relation reste vraie pour toute OPP

De même, Maxwell Ampère :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc}\vec{k} \wedge \vec{B} = -c\overrightarrow{u_k} \wedge \vec{B}$$

3. ❤ Polarisation d'une onde électromagnétique : polarisation rectiligne, polarisation circulaire.

Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est celle du champ électrique**.**

Une onde OEM possède une **polarisation rectiligne** si le vecteur champ électrique de l'onde garde au cours du temps une direction constante **:** $\vec{e}_p = cte.$

Nous pouvons choisir par exemple la direction de l'Oem polarisée colinéaire à l'axe $Oy$, l'expression de ce champ est alors de la forme : $\vec{E} = E_y\,\vec{e}_y \quad avec \quad E_y = E_{0y}\ \cos(\omega t - kx + \varphi_y) = Re(\underline{E}_{0y}\ e^{j\,(\omega t - kx)})$

Plus généralement, avec $\vec{E} = \underbrace{E_{0x}\cos(\omega t - kz)}_{E_x}\vec{u}_x + \underbrace{E_{0y}\cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)}_{E_y}\vec{u}_y$, polarisation rectiligne ssi $\Delta\varphi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$,

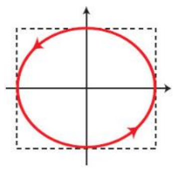
Pour que le champ $\vec{E}$ d'une OemPPH soit **polarisé rectilignement** et donc possède une direction constante au cours du temps, il faut que **ses deux composantes** dans le plan de phase oscillent **en phase ou en opposition de phase,** soit $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pi}$**,**

$$\vec{E} = \left|\begin{matrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{matrix}\right. = \cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} E_{0x} \\ (-1)^p E_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right. = \cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{matrix}\right. = E_0\cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{matrix}\right.$$

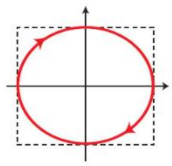
Avec $\alpha$ angle entre l'axe $(Ox)$ et $\vec{E}$

Une onde électromagnétique possède **une polarisation circulaire** si, en tout point M, le champ électrique $\vec{E}$ possède une **norme constante** ; son extrémité décrit alors un cercle.

On parle de **polarisation circulaire gauche** si le cercle est parcouru dans le **sens trigonométrique** autour du vecteur d'onde $\vec{k}$, soit pour un observateur qui verrait arriver l'onde vers lui, et de **polarisation circulaire droite** pour une rotation dans le **sens horaire**



φ=π/2
circulaire gauche



φ=3π/2
circulaire droite

L'onde électromagnétique est **polarisée circulairement** ssi

Les deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde ont **même amplitude**

Ces deux composantes sont en **quadrature de phase, avec** $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}[\pi]}$

**Polarisation droite pour** $\boldsymbol{\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ **et polarisation gauche pour** $\boldsymbol{\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2}[2\pi]}$

4. On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$. Exprimer la densité volumique d'énergie et montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique. Dans le cas d'une OemPPH, établir l'expression de la densité volumique d'énergie moyenne.

Densité volumique d'énergie électromagnétique associée au champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ :

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Pour l'OemPP, les normes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont liés par la relation $E = Bc \;\; soit \;\; \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0}$

Avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, *on a* $\frac{1}{c^2\mu_0} = \varepsilon_0 \;\; soit \;\; \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad d'où$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 B^2 c^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Si on considère de plus une OemPPH, le champ électrique est variable, de la forme

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\ \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$

La densité volumique d'énergie est donc variable dans le temps en un point donné, on peut calculer la **moyenne temporelle de la densité d'énergie** associée à l'onde :

$\langle u_{em}\rangle = \langle\varepsilon_0 E^2\rangle = \varepsilon_0 E_0^2\,\langle\cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)\rangle$

**En moyenne temporelle :**

$$\langle \cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\boldsymbol{\langle u_{em}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}}$$

5. ❤ Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\ \mathrm{mm}$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\ nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\ \mathrm{mW}$. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$. Calculer les amplitudes $E_{max}$ et $B_{max}$ des champs électrique et magnétique.

$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}.\overrightarrow{dS} = \Pi S = \Pi\pi r^2$ soit $P = \langle\mathcal{P}_{em}\rangle = \langle\Pi\rangle S = \langle\Pi\rangle\pi r^2$ d'où $\langle\Pi\rangle = P/\pi r^2$ or

Expression du vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{\mathrm{EB}}{\mu_0}$

Relation de structure (OPP) : $\vec{B} = \frac{\vec{u_k}\wedge\vec{E}}{\mathrm{c}}$ d'où $B = \frac{E}{C}$ soit $\Pi = \frac{\mathrm{E}^2}{c\mu_0}$

Avec $\mathrm{E} = E_{max}\cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$ :

$\Pi = \frac{\mathrm{E}^2}{c\mu_0} = \frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$

$\langle\Pi\rangle = \langle\frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi\right)\rangle = \frac{{E_{max}}^2}{c\mu_0}\langle\cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi\right)\rangle$

soit avec $\langle\cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi\right)\rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle\Pi\rangle = \frac{{E_{max}}^2}{2c\mu_0} = P/\pi r^2$$

$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4{,}9.10^2\ V.m^{-1}$ ; $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1{,}6.10^{-6}\ T.$

6. Considérons l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(kx-\omega t)}\vec{e}_z$ Est-ce une onde plane ? Est-elle progressive ? Quelle est sa polarisation ? Déterminer le champ magnétique associé à cette onde.

7. On considère un plasma peu dense composé de cations supposés fixes et d'électrons libres de densité particulaire $n_e$, de charge $-e$, de masse $m$ et on néglige les interactions des électrons avec les autres particules. Les électrons sont considérés comme étant non relativistes. Définir la notion de plasma et établir l'expression de la conductivité du plasma et définir la pulsation plasma $\omega_p$ du plasma en fonction des grandeurs caractéristiques du système.

***Plasma :*** *gaz composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement* ***ionisés*** *(mélange d'atomes ou de molécules, d'électrons et d'ions positifs issus de la perte d'un ou de plusieurs électrons), l'ensemble étant électriquement neutre. On parle de plasma lorsque le nombre d'électrons libres est du même ordre de grandeur que le nombre de molécules.*

*En considérant les cations fixes,* $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e$

*Déterminons la vitesse des électrons et des ions en régime harmonique en leur appliquant le PFD*

$$m_e\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow im_e\omega\underline{\vec{v}_e} = -e\underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{v}_e} = -\frac{e\underline{\vec{E}}}{i\omega m_e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{j}} = -i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}\underline{\vec{E}}$$

*Relation formellement analogue à la loi d'Ohm locale* $\vec{j} = \gamma\vec{E}$*. On peut alors définir par analogie avec un conducteur ohmique une conductivité électrique complexe du plasma :*

$$\underline{\gamma}(\omega) = -i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}$$

**8.** ❤️❤️ On étudie la possibilité de propagation du champ $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(j(\omega t - kx)\big)\,\overrightarrow{e_z}$ dans un plasma dilué dont la conductivité électrique complexe vaut $\underline{\gamma}(\omega) = -i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}$. Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ et en déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma, où on fera apparaître la pulsation $\omega_p$.

*quatre équations de Maxwell* $\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = 0$, $\mathrm{div}\underline{\vec{B}} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$

*D'autre part, d'après les formules d'analyse vectorielle,* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}}\big) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(\mathrm{div}\underline{\vec{E}}\big) - \vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -\vec{\Delta}\underline{\vec{E}}$

*En combinant les équations de Maxwell :*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}}\big) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{B}})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) \underbrace{=}_{\substack{pseudo\ loi\\ d'Ohm\ locale}} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

*En injectant* $\underline{\vec{E}} = E_0\exp\big(j(\omega t - kx)\big)\,\overrightarrow{e_z}$, *dans l'équation de propagation,* *on obtient la relation de dispersion :*

$$-\underline{k}^2\underline{\vec{E}} = \mu_0\underline{\gamma}i\omega\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0(i\omega)^2\underline{\vec{E}} \underbrace{=}_{\mu_0\varepsilon_0 c^2=1} \left(\mu_0\underline{\gamma}i\omega + \frac{1}{c^2}(i\omega)^2\right)\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\mu_0\underline{\gamma}}{i\omega} + \frac{1}{c^2}\right)(i\omega)^2\underline{\vec{E}}$$

$$-\underline{k}^2\underline{\vec{E}} \underbrace{=}_{\underline{\gamma}=-i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}} \left(-\frac{\mu_0 i\frac{n_e e^2}{\omega m_e}}{i\omega} + \frac{1}{c^2}\right)(i\omega)^2\underline{\vec{E}} = -\left(-\frac{\mu_0 n_e e^2}{\omega^2 m_e} + \frac{1}{c^2}\right)\omega^2\underline{\vec{E}} \underbrace{=}_{\mu_0\varepsilon_0 c^2=1} -\left(-\frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\right)\omega^2\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e\varepsilon_0}\right)$$

*En posant* $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}$, *avec par définition* $\omega_p$ *pulsation plasma :*

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

**9.** ❤️❤️ On considère un plasma dilué vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}$. Discuter des possibilités de propagation du champ $\underline{\vec{E}} = E_0\exp\big(j(\omega t - kx)\big)\,\overrightarrow{e_z}$ en fonction des valeurs de la pulsation $\omega$.

*→* $\boldsymbol{\omega > \omega_p}$ *:* $k^2 > 0$, *k est réel et l'onde pourra se propager.*

*→* $\boldsymbol{\omega < \omega_p}$ *:* $k^2 < 0$, *k est imaginaire pur ce qui n'est pas compatible avec la propagation d'une onde ; on obtient une* ***onde évanescente.***

*Le plasma se comporte comme un* ***filtre passe haut*** *pour les OEMPPH (filtre d'ordre infini), de* ***pulsation de coupure*** *la* ***pulsation plasma*** $\boldsymbol{\omega = \omega_p} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}}$ *qui correspond ainsi à la valeur minimale en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager dans le plasma .*

***Pour*** $\boldsymbol{\omega > \omega_p}$, $\underline{k}^2$ *est un réel positif,* $\underline{k}$ *est alors réel pur :*

$$k = k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

*Il s'agit d'une onde progressive se propageant à la vitesse de phase :*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

***Pour*** $\boldsymbol{\omega < \omega_p}$, $\underline{k}^2$ *est un réel négatif,* $\underline{k}$ *est alors imaginaire pur :*

$$\underline{k} = ik_i = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

*On définit alors* $|k_i| = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}$ *soit* $\underline{k} = ik_i = \pm\frac{i}{\delta}$

$$d'où \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\exp\big(i(\omega t - ik_i x)\big) = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{k_i x}e^{i\omega t}$$

*Soit*

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}e^{k_i x}\cos(\omega t + \varphi) = \overrightarrow{E_0}e^{\pm x/\delta}\cos(\omega t + \varphi)$$

*Il n'y a plus de propagation (absence de couplage espace et temps) mais selon le signe une amplification menant à une solution divergente soit à une solution physiquement non acceptable, le plasma n'étant pas un milieu amplificateur fournissant de l'énergie à l'onde, ou une atténuation. Finalement :*

$$\underline{k} = ik_i = -i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -\frac{i}{\delta} \qquad d'où \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\exp\left(i\left(\omega t + \frac{i}{\delta}x\right)\right) = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{-\frac{x}{\delta}}e^{i\omega t}$$

$\delta = \frac{1}{|k_i|} = \sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}$ *distance caractéristique associée à ce phénomène d'atténuation, appelée* ***profondeur de pénétration ou épaisseur de peau*** *(au bout d'une distance de quelques $\delta$, l'amplitude de l'onde devient négligeable).*

**10.** ❤️ Vitesse de groupe et vitesse de phase (aucune notion quantitative exigible sur le paquet d'onde). On rappelle la relation de dispersion du plasma dilué : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} > 0$; établir les expressions des vitesses de groupe et de phase dans le cas où $\omega > \omega_p$.

*Les vitesses de groupe et de phases sont définies pour des ondes progressives (non définies dans le cas de l'onde évanescente notamment). La vitesse de groupe est définie pour un paquet d'onde, qui peut être modélisé par une onde de pulsation $\omega_0$ centrale se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega_0)$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe $v_g$.*

***Vitesse de phase*** *correspondant à la vitesse d'une OPPH quelconque de pulsation $\omega$ :*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k}(\omega))}$$

*Elle n'a pas de réalité physique, et ne correspond pas à un transport d'énergie.*

***Vitesse de groupe*** *de l'onde globale correspondant à la vitesse de l'onde enveloppe pour un paquet d'onde :*

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_r}\right)_{\omega_0} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dRe}(\underline{k}(\omega_0))}\right)_{\omega_0}$$

*On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie. La vitesse de groupe reste dans ce cas inférieure à la vitesse de la lumière :* $\boldsymbol{v_g(\omega) \leq c}$ *afin de respecter la théorie de la relativité d'Einstein*

*En différentiant la relation de dispersion :*

$c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \implies 2c^2kdk = 2\omega d\omega$ *soit* $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$. *Finalement :*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

*Relation de Klein-Gordon :* $\boldsymbol{v_g v_\varphi = c^2}$

*Pour $\omega > \omega_p$, on en déduit les propriétés suivantes :* $\boldsymbol{v_\varphi > c}$ **et** $\boldsymbol{v_g < c}$

**11.** Phénomène de dispersion (discussion qualitative).