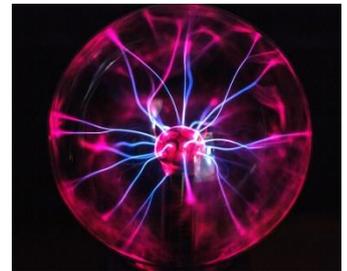


CHAPITRE OND.2 : PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE DANS UN PLASMA



Plan du cours

I)	Caractéristiques d'un plasma dilué.....	2
A)	Définition et modèle.....	2
B)	Mouvement des charges et conductivité d'un plasma	4
C)	Conséquences directement associées.....	5
II)	propagation d'une OEMPPH transverse dans un plasma dilué	6
A)	Equation de propagation dans un plasma.....	6
B)	Relation de dispersion.....	6
C)	Etude du cas propagatif – domaine de transparence	8
D)	Etude du cas non propagatif : onde évanescence	9
III)	Paquet d'onde - Vitesse de phase et vitesse de groupe.....	12
A)	Superposition de deux ondes OPPM de pulsations voisines :.....	Erreur ! Signet non défini.
B)	Le modèle du paquet d'onde	Erreur ! Signet non défini.
C)	Evolution du paquet d'onde : vitesse de groupe et vitesse de phase	Erreur ! Signet non défini.
D)	La propagation du paquet d'onde dans un milieu	Erreur ! Signet non défini.

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 : Electromagnétisme

L'étude sur les ondes sont l'occasion d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant, par exemple, l'effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase, de fréquence de coupure ou encore d'onde évanescence.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5 Propagation et rayonnement (partie).	
Onde plane transverse électrique monochromatique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Pulsation de coupure. Ondes évanescences.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Décrire le phénomène de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Distinguer qualitativement les ondes évanescences et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.
Relation de dispersion.	Décrire le phénomène de dispersion.
Vitesse de phase, vitesse de groupe.	Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Citer une interprétation de la vitesse de groupe en s'appuyant sur l'analyse qualitative d'un exemple.

Dans les exemples des chapitres précédents, les différents phénomènes de propagation étaient tous régis par la même équation d'onde de D'Alembert, qui ne permet toutefois pas de décrire les phénomènes d'atténuation ou de déformation du signal observés dans de nombreux domaines

Nous allons donc à présent étudier des cas plus réalistes où l'onde subit des déformations à cause du milieu en envisageant leur propagation dans des milieux matériels, avec en particulier deux exemples : la propagation d'ondes électromagnétiques dans **les plasmas et les métaux**.

Ceci conduira à une forme d'équation d'onde linéaire à coefficients constants différente de l'équation de d'Alembert avec la présence de termes dissipatifs, ce qui autorise l'utilisation des ondes monochromatiques mais génère une relation de dispersion différente de la relation $k = \omega/c$. C'est cette modification qui va induire deux nouveaux phénomènes : la **dispersion et l'absorption**.

Dans un milieu non absorbant mais dispersif, les différentes composantes de Fourier d'un signal de propagent avec des vitesses de phases différentes. La situation est à priori complexe mais se simplifie dans le cas du paquet d'ondes si le milieu est peu dispersif, ce qui nous amènera à définir une nouvelle vitesse, **la vitesse de groupe**.

Notons que si l'on parle dans ce cours de la propagation des ondes électromagnétiques, la méthode s'applique à l'étude d'autres ondes (thermiques, acoustiques, électriques...) répondant à une équation de propagation linéaire lorsqu'elle diffère de celle de d'Alembert.

I) CARACTERISTIQUES D'UN PLASMA DILUE

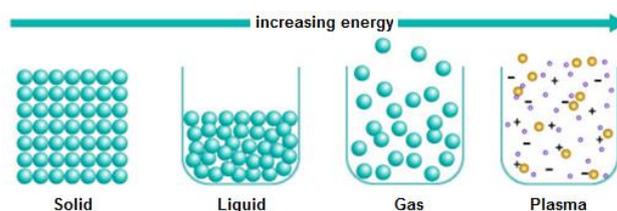
A) Définition et modèle

1) Notion de plasma

a) Définition

La matière telle qu'on la connaît sur Terre peut exister essentiellement sous les trois états : les états solide, liquide et gazeux. Il existe cependant un quatrième état de la matière, appelé plasma, obtenu lorsque la matière est portée par exemple à très haute température (comme dans les étoiles), ou bombardée de rayonnements intenses (couche supérieure de l'atmosphère, appelée ionosphère).

Un plasma est un milieu composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés mais qui reste globalement électriquement neutre. Ainsi, un plasma d'hydrogène est composé d'atomes d'hydrogène, de protons (les noyaux d'hydrogène) et d'électrons libres, en proportions différentes selon la nature du plasma (plasma peu ou au contraire complètement ionisé).



■ Plasma

Gaz composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement **ionisés**, soit d'un mélange d'atomes ou de molécules, d'électrons et d'ions positifs issus de la perte d'un ou de plusieurs électrons, l'ensemble étant électriquement neutre.

Remarque : on parle de plasma lorsque le nombre d'électrons libres est du même ordre de grandeur que le nombre de molécules.

■ Propriété électrique d'un plasma

Au repos, un plasma est globalement et **localement électriquement neutre** : $\forall M, \rho(M, t) = 0$.

■ Exemples et applications

Les **exemples** de plasmas dans la nature sont nombreux ; on peut notamment citer :

- Les tubes à néon et le phénomène de foudre (décharges électriques)
- La magnétosphère (qui fait barrière aux vents solaires) et l'ionosphère terrestres.
- Le cœur des étoiles, constitué de plasma chaud et très dense.
- mais aussi, la queue des comètes, l'espace interstellaire, l'héliosphère, l'espace intergalactique, l'atmosphère de très nombreux astres (planètes et étoiles), etc.

Paradoxalement, c'est cet état qui est, à l'échelle de l'Univers, le plus courant puisque les astrophysiciens estiment que 99% de la matière est à l'état de plasma dans l'Univers.

Les **applications** de la physique des plasmas sont très diverses et en plein développement, dans des domaines aussi variés que :

- La fusion thermonucléaire : en réalisant un plasma de très forte densité et à très haute température, les physiciens espèrent amorcer des réactions de fusion nucléaire et créer ainsi un générateur d'énergie considérable.
- L'électronique : l'utilisation de plasmas froids permet de réaliser des circuits électroniques intégrés. La télévision de l'avenir possédera certainement un écran à plasma.
- Traitement des matériaux : les plasmas permettent de détruire, transformer, analyser, souder, créer...la matière. Par exemple, des fibres plastiques peuvent être traitées par plasma pour devenir imperméables.

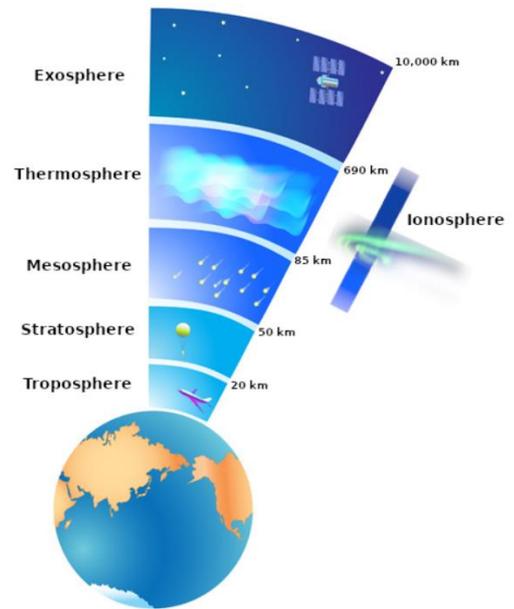
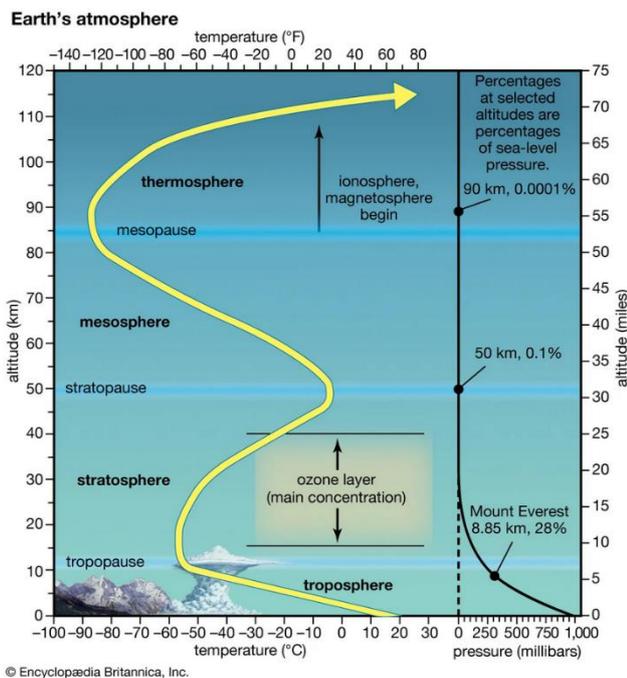
b) Obtention d'un plasma

La création d'un plasma nécessite un **apport important d'énergie**.

Un **plasma** peut être obtenu :

- en chauffant un milieu gazeux à une température suffisamment élevée (par exemple au cœur des flammes)
- en le soumettant à un champ électrique suffisamment intense, par exemple par bombardement avec un faisceau laser très intense, par décharge électrique dans un gaz soumis à une très forte différence de potentiel (dans des tubes à décharges)
- ou encore en le soumettant à un bombardement intense de particules.

L'ionosphère est une portion de l'atmosphère située entre environ 60 et 1 000 km d'altitude, et recouvre donc une partie de la mésosphère, toute la thermosphère et une partie de l'exosphère.



Layers of the Earth's atmosphere. The Ionosphere ranges from the Mesosphere to the Exosphere and is where the aurora Australis and Borealis occur. This region of the atmosphere can change the apparent location of radio sources when it's "poorly behaved". Source : <https://astro3d.org.au>

La pression dans l'ionosphère étant inférieure à 2 Pa, l'air y est donc peu dense, et sous forme de plasma en raison de l'ionisation des molécules d'air par des particules et par les rayonnements essentiellement UV et X venant du soleil. Ce plasma est faiblement ionisé dans sa couche basse (le rapport entre la densité d'électrons libres et la densité totale est petit devant 1), et fortement ionisé dans sa couche supérieure. Ainsi, la densité électronique y est de l'ordre de 10^{10} à 10^{12} m^{-3} (à comparer aux densités 10^{28} m^{-3} des électrons libres du cuivre ou 10^{18} m^{-3} des porteurs de charges dans les semi-conducteurs).

2) Hypothèses du modèle

Dans le cadre du programme, nous nous limiterons aux **plasmas dilués**, c'est-à-dire aux plasmas **peu denses** comme dans l'ionosphère.

■ Plasma dilué

Plasma globalement neutre, dont la **densité est suffisamment faible** pour que les collisions entre les particules de plasma soient négligées.

Hypothèses :

Soit un plasma constitué de n_e électrons (charge $-e$, masse m_e) par unité de volume et n_i ions positifs (charge $+Ze$, masse m_i) par unité de volume.

- Les densités de charge sont supposées uniformes à l'équilibre.
- Le poids est négligé devant la force électromagnétique.
- Les ions étant beaucoup plus massifs que les électrons ($m_i/m_e \approx 2000$), nous négligerons le mouvement des ions devant celui des électrons et donc leur contribution à la densité de courant totale.
- Le **plasma étant dilué**, les collisions entre particules de plasma sont négligées ; on ne tient donc pas compte d'une force de frottement fluide comme dans le modèle de Drüde (Cf. Chapitre EM2).
- Les électrons sont supposés non relativistes, et on supposera l'absence de champ magnétique imposé par l'extérieur. La contribution de la partie magnétique de la force de Lorentz est alors négligée devant sa partie électrique.

En effet, le champ magnétique est de l'ordre de grandeur de celui donné par la relation de structure soit $B \sim E/c$.

On peut alors comparer les deux termes de la force de Lorentz pour une particule soumise au champ électromagnétique d'une onde. Ainsi, la contribution magnétique de la force de Lorentz vaut :

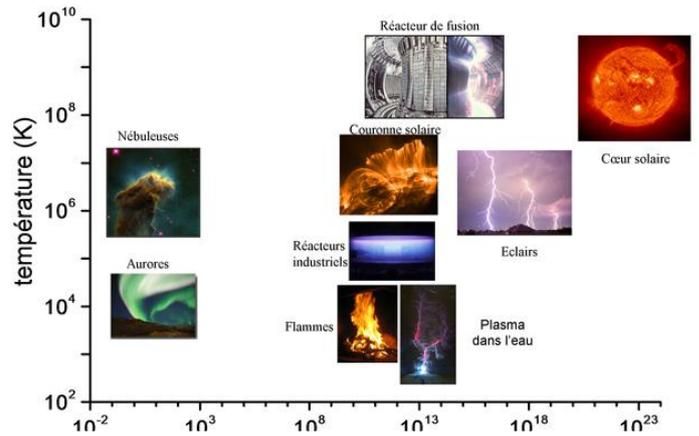
- Conformément au programme, nous nous intéresserons dans ce chapitre au comportement d'une OemPPH (onde électromagnétique progressive plane harmonique) de pulsation ω , transverse, produite par une source extérieure, et arrivant depuis le vide sur un **plasma dilué**. Son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

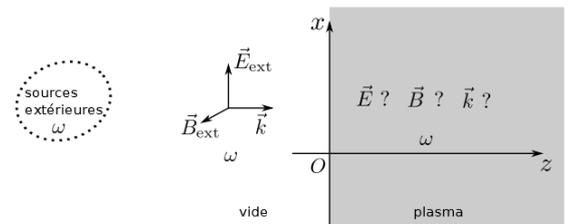
Où $\underline{\vec{E}_0} \perp \vec{k}$: onde transverse, avec la pulsation ω et la direction et le sens de propagation connus (on connaît la pulsation ω de l'émetteur de l'onde, ainsi que sa position).

Le but de l'étude qui va suivre est alors de déterminer k ainsi que les propriétés associées.

Ce champ $\underline{\vec{E}}$ est associé à un champ : $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$



Source : laboratoire de physique des plasmas de l'X ; <https://www.lpp.polytechnique.fr>



B) Mouvement des charges et conductivité d'un plasma

Nous allons chercher à établir le vecteur densité de courant \vec{j} afin d'en déduire la conductivité du milieu.

Afin de déterminer la conductivité du plasma, on revient à la définition du vecteur densité de courant électrique généré par le mouvement des porteurs de charges :

$$\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e + n_i(+Ze)\vec{v}_i$$

Déterminons la vitesse des électrons et des ions en régime harmonique en leur appliquant le PFD

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow im_e\omega\vec{v}_e = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}}{i\omega m_e}$$

De même, $\vec{v}_i = +\frac{Ze\vec{E}}{i\omega m_i}$

Comme le plasma est globalement et localement neutre : $Zn_i = n_e$,

$$\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e + n_i(+Ze)\vec{v}_i = n_e(-e)\vec{v}_e + n_e(e)\vec{v}_i = n_e e \left(\frac{1}{m_e} + \frac{Z}{m_i} \right) \frac{e\vec{E}}{i\omega} \underset{m_i/m_e \approx 2000}{\approx} \frac{n_e e^2 \vec{E}}{m_e i\omega} n_e = (-e)\vec{v}_e$$

$$\boxed{\vec{j} = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \vec{E}}$$

On remarque que la densité de courant créée par l'OemPPH est proportionnelle au champ électrique de l'OemPPH, ce qui est formellement analogue à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

On peut alors définir par analogie avec un conducteur ohmique une conductivité électrique complexe du plasma :

$$\underline{\gamma}(\omega) = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}$$

Conductivité électrique complexe d'un plasma dilué

$$\underline{\gamma}(\omega) = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}$$

Elle dépend de la pulsation ω de l'onde et c'est un **imaginaire pure**

C) Conséquences directement associées

■ Densité volumique de charge dans le plasma

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, on a

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} \underset{\substack{\text{onde} \\ \text{transverse}}}{=} 0$$

On a donc $\rho = 0$: le plasma reste localement neutre en présence de l'onde électromagnétique.

■ Etude énergétique

Nous allons calculer la puissance cédée par le champ électrique à la matière.

Rappel méthodologique : tout calcul de puissance résultant d'un produit de grandeur oblige à revenir en notation réelle avant de faire le calcul.

Le fait que la conductivité soit imaginaire pure indique que le vecteur densité de courant électrique \vec{j} et le champ électrique \vec{E} sont en **quadrature**.

En un point donné quelconque pris comme origine pour pouvoir écrire $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$,

$$\vec{j} = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \vec{E}_0 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \vec{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Or la puissance volumique cédée par le champ EM aux porteurs de charges vaut

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0^2 \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\langle p \rangle = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0^2 \langle \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

On peut retrouver très simplement $\langle p \rangle$ en par le calcul en complexe $\langle p \rangle = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{E}^*\right)$

En moyenne dans le temps, l'onde électromagnétique ne cède pas d'énergie au plasma. Ceci est cohérent avec l'hypothèse des collisions négligées entre électrons (viscosité négligée) et entre les électrons et les ions (friction négligée donc résistivité négligée).

Néanmoins, le plasma reçoit de l'énergie de la part de l'OEM la moitié du temps et la restitue au champ de l'OEM l'autre moitié du temps.

Dans un **milieu de conductivité imaginaire pure**, la puissance transmise par l'onde électromagnétique aux charges mobiles est nulle en moyenne. Il n'y a pas d'effet Joule dans le plasma tel qu'il est modélisé ici.

II) PROPAGATION D'UNE OEMPPH TRANSVERSE DANS UN PLASMA DILUE

A) Equation de propagation dans un plasma

1) Obtention de l'équation de propagation

Regardons comment l'onde va se propager dans le plasma et comment les particules chargées du plasma vont se mettre en mouvement sous l'action du champ électromagnétique.

Exprimons les équations de Maxwell en prenant en compte les différentes hypothèses du milieu de propagation afin d'en déduire l'équation de propagation du champ électrique.

$$\text{quatre équations de Maxwell } \operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{D'autre part, d'après les formules d'analyse vectorielle, } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

En combinant les équations de Maxwell :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \operatorname{rot}(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \stackrel{\substack{\text{pseudo loi} \\ \text{d'Ohm locale}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert et dépend de la conductivité électrique γ du milieu.

Dans le vide, on a $\gamma = 0$, et on retrouve alors l'équation de d'Alembert.

B) Relation de dispersion

1) Obtention de la relation de dispersion

Nous allons établir la relation de dispersion dans le plasma en exploitant l'équation de propagation. Elle pourra être retrouvée en exploitant directement les équations de Maxwell avec la notation complexe.

Avec $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, on obtient la relation de dispersion

$$-\underline{k}^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma i \omega \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 (i\omega)^2 \vec{E} \stackrel{\substack{\text{pseudo loi} \\ \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}}{=} \left(\mu_0 \gamma i \omega + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \right) \vec{E} = \left(\frac{\mu_0 \gamma}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \vec{E}$$

$$-\underline{k}^2 \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\omega \\ \gamma = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}}{=} \left(-\frac{\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = - \left(-\frac{\mu_0 n_e e^2}{\omega^2 m_e} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\omega \\ \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}}{=} - \left(-\frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \underline{\vec{E}}$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0} \right)$$

On pose $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$, ce qui permet d'écrire la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Directement avec les équations de Maxwell à l'aide de la notation complexe :

$$(M.F.) : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$(M.A.) : -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 i\omega \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\omega \\ \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}}{=} \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} i\omega \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\omega \\ \vec{j} = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \underline{\vec{E}}}}{=} -\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} i\omega \underline{\vec{E}} = \left(-\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} + \frac{1}{c^2} i\omega \right) \underline{\vec{E}}$$

Effectuons le produit vectoriel de l'équation de Maxwell-Faraday par $i\vec{k}$:

$$i\vec{k} \wedge (-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = i\vec{k} \wedge (-i\omega \underline{\vec{B}}) \Leftrightarrow \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \vec{k} \wedge (\omega \underline{\vec{B}})$$

Avec la formule du double produit vectoriel :

On a pour tous vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ soit ici :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \cdot \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\omega \\ \text{onde transverse}}}{=} -(\vec{k} \cdot \vec{k}) \cdot \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$$

Dans l'équation issue de Maxwell-Faraday :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -k^2 \underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{ik^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

Dans Maxwell-Ampère :

$$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \left(-\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} + \frac{1}{c^2} i\omega \right) \underline{\vec{E}} = \frac{ik^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

Le champ $\underline{\vec{E}}$ étant non nul, on a donc :

$$-\mu_0 \frac{n_e e^2}{\omega m_e} + \frac{1}{c^2} \omega = \frac{k^2}{\omega} \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{n_e e^2}{m_e} \stackrel{\substack{\omega \\ \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}}{=} \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} = \frac{\omega^2 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}{c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

En posant $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$

Relation de dispersion dans un plasma dilué

Le module d'onde k d'une OemPP se propageant dans un plasma dilué est lié à la pulsation ω de l'onde par la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Où $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ est la **pulsation plasma** s'exprimant en rad.s^{-1} .

→ $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$, k est réel et l'onde pourra se propager.

→ $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$, k est imaginaire pur ce qui n'est pas compatible avec la propagation d'une onde ; on obtient une **onde évanescence**.

Le plasma se comporte comme un **filtre passe haut** pour les OEMPPH (filtre d'ordre infini), de **pulsation de coupure** la **pulsation plasma** $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$ qui correspond ainsi à la valeur minimale en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager dans le plasma .

Retenons que dans l'ionosphère, avec $n_e \sim 10^{10}$ à 10^{11} m^{-3} , on trouve une fréquence plasma f_p de l'ordre de 1 à 10 MHz.

Les communications entre un satellite et le sol se font à des fréquences $f \sim 100 \text{ MHz}$, la TV par satellite à $f \sim 10 \text{ GHz}$ et le système GPS à deux fréquences voisines proches de 11 GHz

Elles sont toutes supérieures à la fréquence plasma f_p et peuvent donc toutes se propager dans l'ionosphère.

C) Etude du cas propagatif – domaine de transparence

1) Caractère dispersif du plasma

Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans le vide, ou dans les milieux pouvant être assimilés au vide comme l'air, la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$ des OemPPH était une constante indépendante de la pulsation de l'onde considérée : il s'agit donc de milieux non dispersifs.

■ Milieu dispersif

Milieu dans lequel la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k_r(\omega)}$ d'une OePPM de pulsation ω dépend de ω .

Sinon, pour $v_\phi = cte$, le milieu est dit non dispersif.

Dans le plasma étudié dans ce chapitre, on a établi la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

Nous allons déterminer \underline{k} dans le cas où $\omega > \omega_p$ et en déduire l'expression de la vitesse de phase.

Pour $\omega > \omega_p$, \underline{k}^2 est un réel positif, \underline{k} est alors réel pur.

$$k = k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Il s'agit d'une onde progressive se propageant à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$v_\phi = v_\phi(\omega)$ **dépend de la pulsation, le plasma dans sa zone de transparence est dispersif.**

La vitesse de phase diminue lorsque la pulsation augmente, avec pour $\omega \rightarrow +\infty$, $v_\phi \rightarrow c$ et pour $\omega \rightarrow \omega_p$, $v_\phi \rightarrow +\infty$

Remarques :

- $v_\phi > c$, ce qui peut sembler contraire à la théorie de la relativité d'Einstein qui stipule qu'il ne peut y avoir de vitesse supérieure à celle de la lumière c . En réalité, cela est possible car la vitesse de phase v_ϕ est celle d'une OemPPH qui est un modèle qui ne correspond pas à un objet réel, les ondes réelles étant des superpositions d'OemPPH pour lesquelles nous définirons une autre vitesse.
- Pour $\omega \gg \omega_p$, nous avons vu que $v_\phi \rightarrow c$: les variations du champ électrique sont trop rapides pour être suivies par les électrons, et l'onde traverse alors le plasma sans interagir avec eux, soit comme en traversant du vide.

■ Indice optique

Par définition, l'indice optique est $n = \frac{c}{v_\phi}$

Indice optique d'un plasma dilué : $n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

Contrairement aux milieux transparents étudiés dans le cours d'optique, l'indice optique des plasmas dilués est inférieur à 1 ; il s'agit d'un milieu dispersif.

2) Structure d'onde progressive

Dans la suite, on se place dans le cas simplifié d'un champ électrique de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}(\omega)x)}$.

Nous avons vu que dans le cas où $\omega > \omega_p$, \underline{k}^2 est un réel positif, \underline{k} est alors réel pur, avec $k = k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$.

On conserve la solution positive $k = k_r > 0$ qui correspond à une onde se propageant selon $+\vec{e}_x$, soit selon les x croissants :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_r x)} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r x + \varphi)$$

L'onde a la même forme qu'une OEMPPH dans le vide ; le vecteur d'onde étant réel, il y a propagation sans absorption, on dit que le plasma est transparent.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday (M.F.) : $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ soit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{v_\varphi}$$

On constate qu'une OEMPPH dans le plasma possède une relation de structure similaire à celle de l'OEMPPH dans le vide mais attention, la dispersion fait que cette relation n'est valable que pour un OPPH de pulsation donnée et la superposition d'OEMPPH se déformera lors de sa propagation dans le plasma.

Les OEMPPH peuvent donc se propager dans le plasma à condition que leurs fréquences soient supérieures à la fréquence plasma f_p , de l'ordre de quelques MHz pour l'ionosphère ($\lambda_{p, \text{vide}} \approx 10^2 \text{ m}$)

3) Etude énergétique

Le vecteur de Poynting s'exprime selon

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \cdot \cos^2(\omega t - k(\omega)x + \varphi)$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) = \frac{k E_0^2}{2\mu_0 \omega} \vec{e}_x = \frac{\vec{k} E_0^2}{2\mu_0 \omega} \neq \vec{0}$$

Ou encore directement :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}^*}{\omega} \right)}{2\mu_0} \right) = \frac{\vec{k}}{2\mu_0 \omega} E_0^2$$

L'onde EM transporte de l'énergie dans le domaine spectral de transparence du plasma. On pourrait par ailleurs montrer que la vitesse de propagation de l'énergie n'est pas la vitesse de phase.

D) Etude du cas non propagatif : onde évanescente

1) Structure d'onde évanescente

Dans le cas où $\omega < \omega_p$, nous allons déterminer l'expression de \underline{k} puis des champs électriques et magnétiques dans le cas simplifié d'une onde de champ de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k \cdot x))$$

Pour $\omega < \omega_p$, \underline{k}^2 est un réel négatif, \underline{k} est alors imaginaire pur.

$$\underline{k} = ik_i = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

On définit alors $|k_i| = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ soit $\underline{k} = ik_i = \pm \frac{i}{\delta}$

Remarque : dans le cas général, on a $\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$

Solution positive :

$$\underline{k} = ik_i = +i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = +\frac{i}{\delta} \quad \text{d'où} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - ik_i x)) = \underline{\vec{E}}_0 e^{k_i x} e^{i\omega t}$$

Soit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i x} \cos(\omega t + \varphi) = \vec{E}_0 e^{x/\delta} \cos(\omega t + \varphi)$$

Il n'y a plus de propagation (absence de couplage espace et temps) mais une amplification menant à une solution divergente soit à une solution physiquement non acceptable, le plasma n'étant pas un milieu amplificateur fournissant de l'énergie à l'onde.

Solution négative :

$$\underline{k} = ik_i = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -\frac{i}{\delta} \quad \text{d'où} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left(i\left(\omega t + \frac{i}{\delta}x\right)\right) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

Soit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi)$$

Il n'y a toujours pas de propagation (absence de couplage espace et temps avec $k_r = 0$: l'onde obtenue **ne se propage pas**, elle sera dite stationnaire).

On voit en revanche apparaître un terme $e^{-x/\delta}$ d'atténuation dans l'espace correspondant à un phénomène d'absorption de l'onde. Au bout d'une distance de quelques δ , l'amplitude de l'onde devient négligeable : on dit que **l'onde est évanescence**.

$\delta = \frac{1}{|k_i|} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ représente la distance caractéristique associée à ce phénomène d'atténuation, également appelée **profondeur de pénétration ou épaisseur de peau**.

Le champ magnétique s'exprime alors, à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday, selon

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{-i\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} e^{j\omega t} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t + \varphi - \pi/2)} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

4) Aspect énergétique

Nous allons exprimer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne au cours du temps

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi) \wedge \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \sin(\omega t + \varphi)}{\mu_0} = \\ &= \frac{\vec{E}_0 \wedge \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0}{\delta \omega}}{\mu_0} e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi) e^{-x/\delta} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0)}{\mu_0 \delta \omega} e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi) \frac{e^{-x/\delta} \sin(\omega t + \varphi)}{1/2 e^{-2x/\delta} \sin(2\omega t + 2\varphi)}$$

$$\frac{E_0^2 \vec{e}_x}{\mu_0 \delta \omega}$$

Car $\vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) = E_0^2 \vec{e}_x - \underbrace{(\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x)}_0 \vec{E}_0 = E_0^2 \vec{e}_x$
0 car $\vec{E}_0 \perp \vec{e}_x$

Les champs électrique et magnétique sont en quadrature temporelle donc $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$ (Différent du vide où E et B sont en phase)

On peut retrouver très simplement $\langle \vec{\pi} \rangle$ par la formule complexe des moyennes $\langle \vec{\pi} \rangle = \mathcal{R}e \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)$

Cette onde évanescente ne transporte ni ne dissipe aucune énergie (en moyenne) ; $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$.

L'interaction d'une OPPH arrivant sur ce type de milieu met donc en mouvement les particules du plasma qui vont alors générer une onde réfléchiée mais sans aucune perte ni transmission.

En conclusion :

→ $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$, k est réel et l'onde pourra se propager : **domaine de transparence** du plasma.

→ $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$, k est imaginaire pur ce qui n'est pas compatible avec la propagation d'une onde ; on obtient une **onde évanescente**, il y a **réflexion** de l'onde, **domaine réactif du plasma**.

Le plasma se comporte comme un **filtre passe haut** pour les OEMPPH (filtre d'ordre infini) de pulsation de coupure la pulsation plasma ω_p

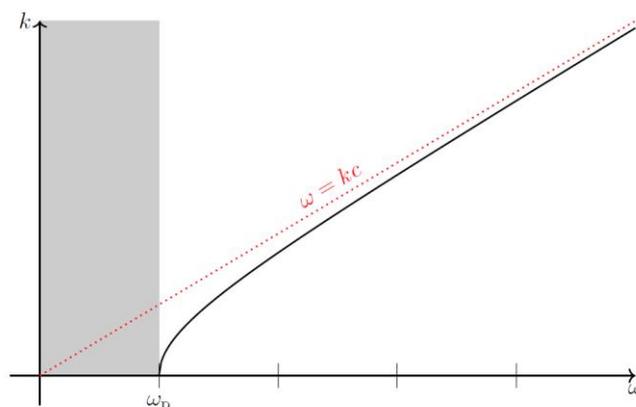
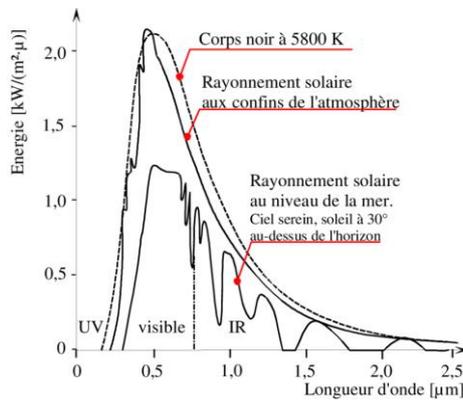
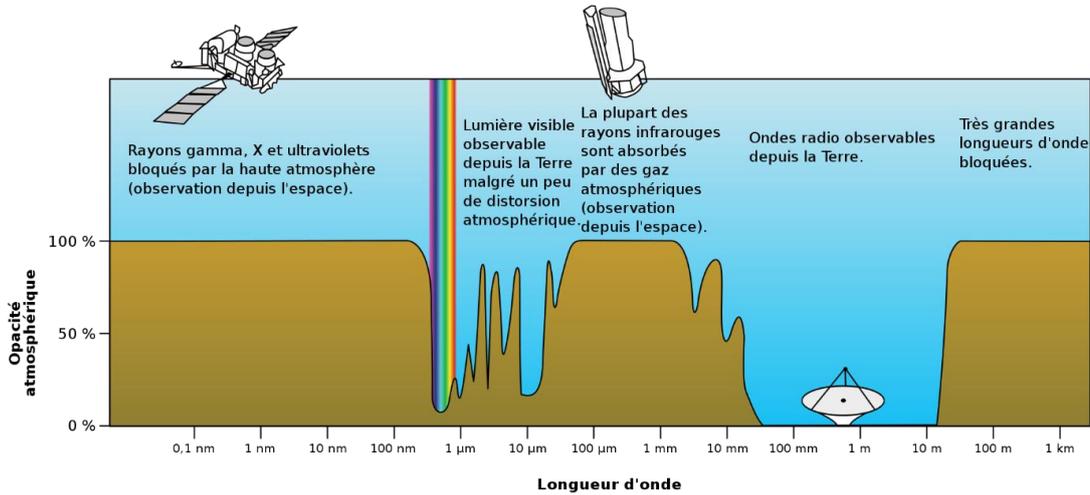
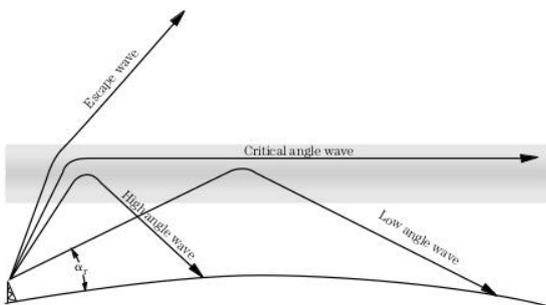


Fig. 2 – Relation de dispersion dans l'ionosphère. Au-dessous de la pulsation plasma ω_p (dans la zone grisée), le vecteur d'onde est imaginaire pur et l'onde est exponentiellement amortie : elle ne se propage donc plus, l'onde est qualifiée d'évanescence. Lorsque la pulsation vaut quelques ω_p , la relation de dispersion est approximativement linéaire, comme indiqué par la ligne pointillée rouge. (d'après M. Champion)

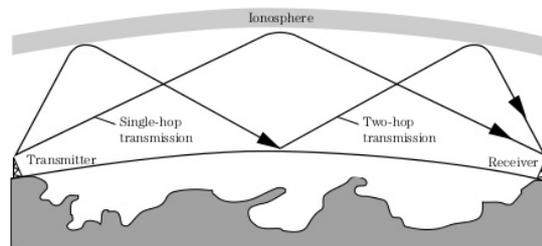
La fréquence plasma f_p de l'ionosphère est de l'ordre de 1 à 10 MHz



C'est en utilisant ce phénomène qu'ont pu être réalisées les premières transmissions hertziennes transatlantiques le 12 décembre 1901 par G. Marconi. La couche d'atmosphère sous l'ionosphère joue le rôle de guide d'onde et permet de transmettre au-delà de l'horizon.

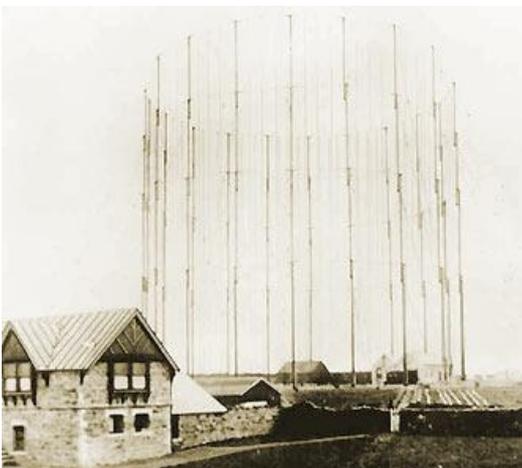


2-32 Sky-wave propagation as a function of antenna radiation angle.



2-33 Single-skip and multihop-skip communications.

La station émettrice (photo de gauche ci-dessous) se trouvait à Poldhu (Cornouailles anglaise) et la station réceptrice (photo de droite ci-dessous) à Cap Breton (Canada) :



III) PROPAGATION DE SUPERPOSITIONS D'OPPH – MILIEUX DISPERSIFS

A) Exemples introductifs

1) Propagation d'un signal comportant deux pulsations voisines

Considérons deux OPPH de pulsations voisines ω_1 et ω_2 très proches et de même amplitude se propageant dans un milieu dispersif. On note k_1 et k_2 les vecteurs d'ondes correspondants.

L'onde résultante s'écrit alors $g(x, t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$ et on pose

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ et $\delta k = k_2 - k_1$, tels que $|\delta\omega| \ll \omega_0, |\delta k| \ll k_0$.

On a alors $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, k_1 = k_0 - \frac{\delta k}{2}, \omega_2 = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$ et $k_2 = k_0 + \frac{\delta k}{2}$

On peut réécrire l'onde résultante sous la forme suivante

$$\psi(x, t) = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}_{\text{terme d'onde enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\omega_0 t - k_0 x + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)}_{\text{terme ondulatoire (onde moyenne)}}$$

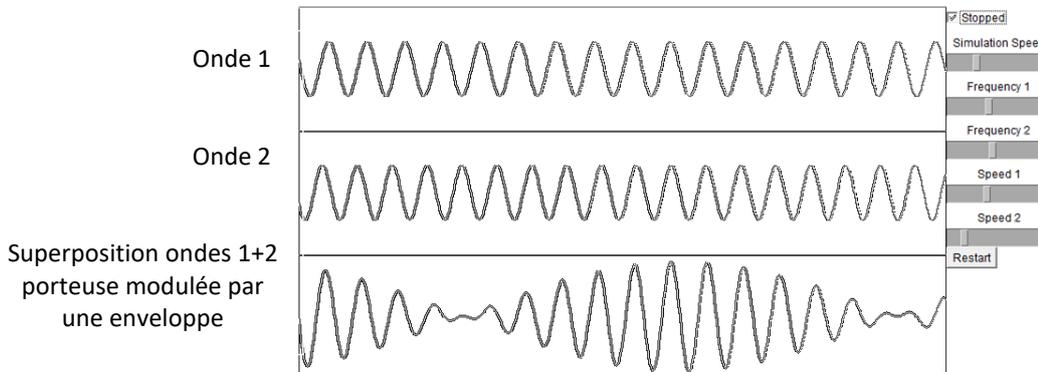
On observe des **battements spatiaux** constitués :

D'une **onde « moyenne »**, appelée **onde porteuse**, de module du vecteur d'onde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

Cette onde porteuse est (ou modulée) par une **onde enveloppe** de vecteur d'onde $\delta k = 2\pi/\delta\lambda \ll k_0$ et donc de période spatiale $\delta\lambda \gg \lambda_0$.

L'animation suivante fait apparaître le signal résultant et la propagation de la superposition de deux ondes de fréquences très voisines. On voit la modulation d'amplitude d'une OPH moyenne (**la porteuse**) par une onde de pulsation plus faible :

l'enveloppe. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondedisp.html>



Cette dernière animation présente un peu différemment ces mêmes phénomènes et les suivantes illustrent une grande variété de situation que vous pourrez visualiser à profit : <http://www.falstad.com/dispersion/>

La réécriture de la forme d'onde permet de faire apparaître naturellement deux vitesses caractéristiques différentes :

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{\delta k}{\delta\omega}x\right) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{k_0}{\omega_0}x\right) + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

L'onde moyenne se propage à une vitesse $v_\varphi = \omega_0/k_0$ correspondant à la **vitesse de phase de l'OPPH de pulsation ω_0** .

L'onde enveloppe se propage quant à elle à la vitesse $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$ correspondant à la **vitesse de groupe de l'onde globale**

Cette animation permet de visualiser la propagation du signal résultant, deux vitesses se dégageant de l'observation ; la vitesse de phase (vitesse du point jaune de phase donnée) et celle de groupe (vitesse du point bleu qui traduit la vitesse « d'ensemble ») : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/vitgroupe.html>

Comme ces deux vitesses ne sont en général pas égales, les crêtes de l'onde moyenne ne se propagent pas à la même vitesse que les crêtes de l'onde « enveloppe », ce qui explique que l'onde globale ne se propage pas en bloc au cours du temps et que l'on observe un « mouvement » à l'intérieur des fuseaux.

2) Le modèle du paquet d'onde

a) L'OPPH, un outil théorique efficace mais irréal

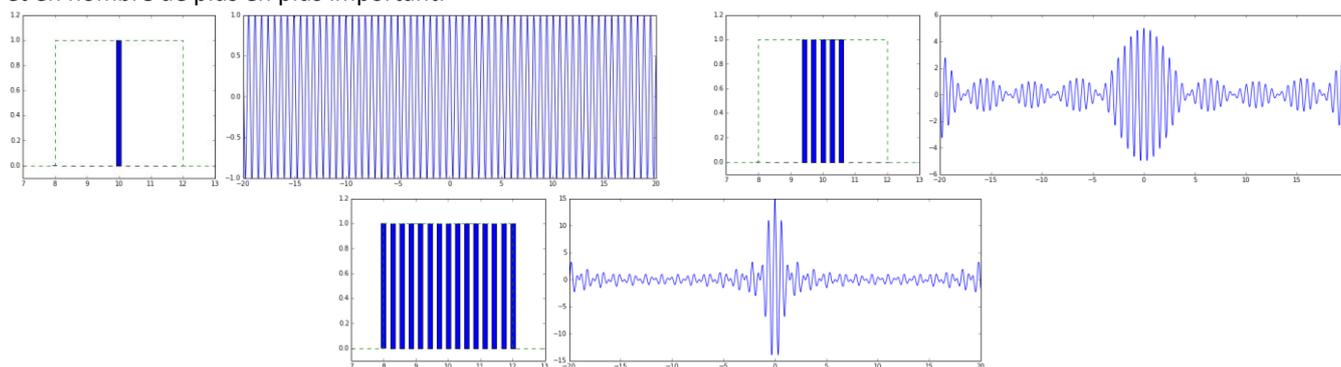
L'illustration précédente permet de définir les deux vitesses fondamentales à l'étude des ondes mais la superposition d'OPPH utilisée, comme les deux OPPH qui la constituent, restent des objets qui n'ont pas de réalité physique. En effet, elles ont une durée infinie et emplissent tout l'espace ; l'énergie associée serait donc infinie puisqu'elle est spatialement illimitée.

Un signal physique émis par une source et qui se propage possède en réalité une extension spatiale et une extension temporelle finies (une **onde réelle est nécessairement localisée et limitée dans le temps et dans l'espace**). Ces conditions ne sont pas réalisées par une OPPH qui n'est donc qu'un outil d'analyse des phénomènes de propagation mais ne saurait décrire à elle seule un phénomène physique observable.

Nous allons introduire à partir de la superposition d'OPPH un objet modèle, le **paquet d'ondes**, plus à même de modéliser les ondes émises par les sources réelles. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

b) Superposition de plusieurs OPPM de pulsations voisines

Considérons les signaux temporels et les spectres associés à une superposition de plusieurs OPPM de pulsations proches et en nombre de plus en plus important.



On voit que plus le nombre d'OPPM est important, plus l'onde devient localisée et ressemble à un "paquet d'onde". Ceci est bien illustré sur l'animation suivante qui permet de choisir la largeur spectrale d'un paquet d'onde : <https://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/paquetOndeMatiere.html>

c) Paquet d'ondes : une onde localisée

Nous venons de voir que la somme de 2 OPPM de fréquences voisines présente une forme bien particulière : on est tenté de dire qu'elle est "plus" localisée au voisinage des fuseaux modulant son amplitude. En poursuivant cette démarche et en superposant un nombre de plus en plus important d'OPPM, l'extension de l'enveloppe du signal diminue et se localise de façon de plus en plus étroite dans le temps et l'espace. Un observateur voit passer des « paquets » d'onde de durée d'autant plus faible que l'étendue en fréquences des OPPM le composant est importante.

A la limite, une onde physique réelle suffisamment régulière, à la fois localisée dans l'espace et le temps, pourra être modélisée par la **superposition d'un nombre infini d'OPPM**, à répartition continue de fréquences, et d'amplitudes variables suivant la fréquence : c'est ce qu'on appelle un **paquet d'ondes** (théorie de Fourier).

Onde plane réelle de **durée et de taille finies** (extensions temporelle et spatiale finies) : constituée d'une **superposition continue** d'OPPH de pulsations voisines :

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) \exp(j(\omega t - \underline{k}(\omega)x)) d\omega$$

Avec $\underline{a}(\omega)$ **amplitude spectrale** de l'OPPH de pulsation ω : $|\underline{a}(\omega)|$ « poids » de cette composante fréquentielle dans le signal, qui caractérise donc la composition spectrale du paquet ;

et $k(\omega)$ relation de dispersion propre au milieu de propagation.

■ Paquet d'ondes

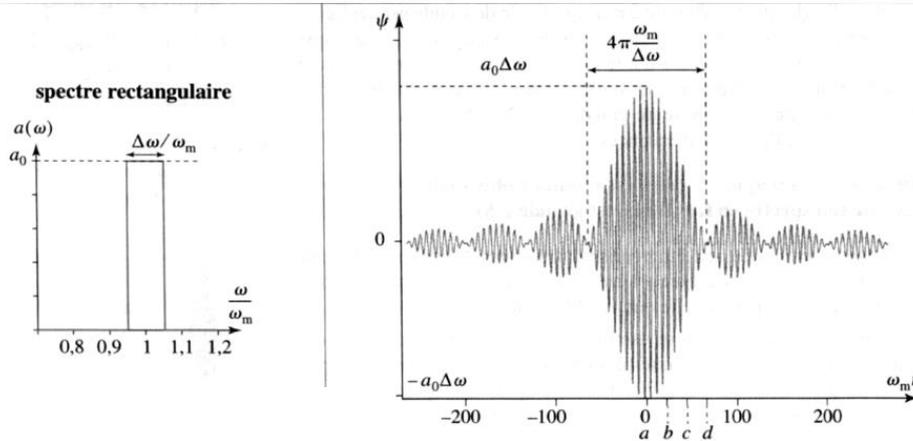
On appelle paquet d'onde la superposition d'un nombre fini ou infini d'OPPH de pulsations proches d'une pulsation moyenne ω_0 .

La fonction amplitude $\underline{a}(\omega)$ prend des valeurs notables seulement sur un intervalle de pulsations $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$ très limité $\delta\omega \ll \omega_0$ correspondant à l'étendue spectrale (étendue spectrale étroite ou fine) :

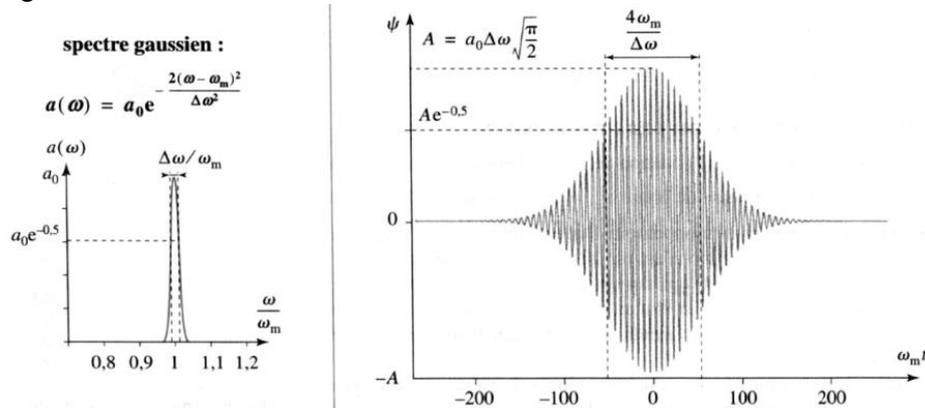
$$\underline{\psi}(x, t) \approx \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{a}(\omega) \exp(j(\omega t - k(\omega)x)) d\omega$$

Les deux exemples suivants illustrent la notion de paquet d'onde ; ils possèdent tous deux un spectre assez étroit centré sur une pulsation centrale ω_m et une allure temporelle en $x = 0$ qui indique que le signal s'approche de l'origine de l'espace en $x = 0$ depuis la gauche, y passe à l'instant $t = 0$ puis s'en éloigne.

Paquet d'onde d'enveloppe rectangulaire



■ Paquet d'onde gaussien



d) Extension d'un paquet d'ondes : relation durée/largeur spectrale

La théorie de Fourier permet de montrer que la largeur spectrale $\Delta\omega$ d'un paquet d'ondes est reliée à la largeur temporelle Δt de celui-ci par la relation très importante

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$$

Δt est la largeur temporelle (c'est un ordre de grandeur de la durée durant laquelle le signal prend des valeurs conséquentes, elle peut notamment être définie à mi-hauteur).

De même que le paquet d'ondes possède une extension temporelle finie, il possède également une extension spatiale finie. On montre qu'un paquet d'ondes de durée de l'ordre de Δt possède une extension spatiale de l'ordre de $\Delta x \sim v_g \Delta t$.

Il en résulte que la largeur spectrale (ou largeur fréquentielle de son spectre) est d'autant plus grande que le signal est bref.

Inversement, un signal sinusoïdal parfait ($\Delta\omega \sim 0$) devra donc être infiniment long dans le temps $\Delta t \sim \infty$ et infiniment étendu dans l'espace $\Delta x \sim \infty$.

Ceci est bien illustré sur l'animation suivante qui permet de choisir la largeur spectrale d'un paquet d'onde : <https://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/paquetOndeMatiere.html>

3) Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif et non absorbant

Dans un paquet, chaque OPPH se propage à la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k(\omega)}$, mais celles-ci ne sont pas observables seules de manière indépendante ; on observe en général l'évolution du paquet d'onde $\underline{\psi}(x, t)$ résultant de leur superposition.

On considère un paquet d'onde dont on suppose que $\underline{A}(\omega)$ prend des valeurs notables sur l'intervalle $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$, centré en ω_0 et de largeur $\Delta\omega$ (cf. figure).

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - k(\omega)x)} d\omega$$

Si $\Delta\omega \ll \omega_0$ et si le milieu est peu dispersif,

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$$

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{a}(\omega) e^{j\left(\omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0) \left(\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x \right) \right)} d\omega$$

$$\underline{\psi}(x, t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{a}(\omega) e^{j\left[(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x \right) \right]} d\omega$$

$$\underline{\psi}(x, t) = e^{j\omega_0 \left(t - \frac{k_0 x}{\omega_0} \right)} \cdot G \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x \right) = e^{j\omega_0 \left(t - \frac{k_0 x}{\omega_0} \right)} G \left(t - \frac{x}{v_g} \right)$$

$G \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} x \right)$ correspond à l'**enveloppe du paquet d'onde**. Cette enveloppe se propage ici dans le sens des x croissants à la vitesse $v_g = \frac{1}{\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_0}$, qui est la **vitesse de groupe**.

Dans un milieu faiblement dispersif et non absorbant, le paquet d'onde se comporte comme une OPPH de pulsation moyenne ω_0 , la porteuse, se propageant à la **vitesse de phase** $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$, et dont l'amplitude est modulée par **une enveloppe se propageant sans déformation** à la **vitesse de groupe** : $v_G = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_0}$.

4) Retour sur la propagation dans un plasma

Considérons la propagation dans un plasma dilué, donc dans le cas où $\omega > \omega_p$. Nous avons alors établi la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$, correspondant dans le cas où $\omega > \omega_p$ à un réel : $\underline{k} = k = k_r$.

En différenciant la relation de dispersion :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow 2c^2 k dk = 2\omega d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

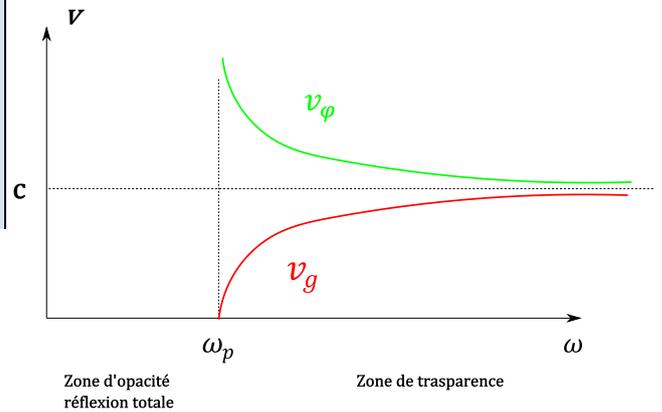
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Relation de Klein-Gordon : $v_g v_\varphi = c^2$

Pour $\omega > \omega_p$, on en déduit les propriétés suivantes :

$$v_\varphi > c \text{ et } v_g < c$$



La vitesse de phase est toujours supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide et peut même tendre vers l'infini, sans contradiction avec le principe de relativité car la vitesse de phase est la vitesse d'une OPPH sans réalité physique elle ne représente ni la vitesse de propagation de l'énergie, ni celle de l'information). Seule la superposition (infinie) d'OPPH possède un sens physique, et cette superposition se déplace à la vitesse de groupe qui reste bien inférieure à c .

Sur l'animation ([cliquer ici](#)) :

→ On constate à l'approche de la pulsation de coupure $\omega \rightarrow \omega_p$ que la vitesse de phase diverge $v_\varphi \rightarrow \infty$ et que la vitesse de groupe tend vers zéro $v_g \rightarrow 0$. Le vecteur d'onde tend à s'annuler donc la longueur d'onde devient très grande

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{p+}} v_\varphi \rightarrow \infty \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \omega_{p+}} v_g \rightarrow 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_{p+}} k \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_{p+}} \lambda \rightarrow \infty$$

→ À l'autre extrémité du spectre, lorsque $\omega \gg \omega_p$, le milieu devient non dispersif et se comporte comme le vide :

$$v_\varphi \sim v_g \sim c \text{ pour } \omega \gg \omega_p$$

On peut montrer que la vitesse de groupe dans un plasma dilué s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie.

B) Généralisation - vitesse de phase, vitesse de groupe

On admet la généralisation des résultats établis sur les exemples précédents au cas d'un milieu dispersif quelconque (éventuellement absorbant). Nous allons définir dans le cas général les vitesse de phase et de groupe

1) Vecteur d'onde complexe

Considérons la propagation d'une OPPH associée à un signal quelconque selon les x croissants ; elle est dans le cas général caractérisée par un vecteur d'onde complexe :

$$\underline{\psi}(x, t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

Pour les milieux dispersifs absorbants, nous verrons que le vecteur d'onde peut s'écrire dans le cas général sous la forme complexe suivante :

$$\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega), \quad \text{avec } k_r \text{ et } k_i \text{ réels}$$

L'OPPH s'écrit alors :

$$\underline{\psi}(x, t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - k_r x - j k_i x + \varphi_0)} = \psi_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x + \varphi_0)}$$

$$\underline{\psi}(x, t) = \underbrace{\psi_0 e^{k_i x}}_{\text{terme d'amplitude}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - k_r x + \varphi_0)}_{\text{terme ondulatoire}}$$

■ Définition

■ Vecteur d'onde complexe

Le vecteur d'onde peut s'écrire dans le cas général sous la forme complexe suivante :

$$\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega), \quad \text{avec } k_r \text{ et } k_i \text{ réels}$$

L'OPPH s'écrit alors en représentation réelle :

$$\psi(x, t) = \underbrace{\psi_0 e^{k_i x}}_{\text{terme d'amplitude}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - k_r x + \varphi_0)}_{\text{terme ondulatoire}}$$

■ Terme ondulatoire et vitesse de phase

Le terme $\cos(\omega t - k_r x + \varphi_0)$ est de structure identique à celle d'une véritable OPPH se propageant selon \vec{e}_x si $k_r > 0$ (ou $-\vec{e}_x$ si $k_r < 0$). On peut alors définir la vitesse de phase associée à ce terme ondulatoire comme ;

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k_r|} = \frac{\omega}{|\text{Re}(\underline{k})|}$$

Cette vitesse est celle de propagation d'un plan équiphase, d'équation $\omega t - k_r x + \varphi_0 = \text{cste}$, qui se trouve à l'instant t en $x = \frac{\omega}{k_r} t + \frac{\varphi_0 + \text{cste}}{k_r}$, et qui se déplace au cours du temps à la vitesse $\frac{\omega}{k_r}$: c'est la **vitesse de phase** de l'onde.

■ Terme d'amplitude : k_i et distance δ d'atténuation

Le terme en $e^{k_i x}$ traduit, suivant le signe de k_i , une atténuation ou plus rarement une amplification de l'onde dans l'espace. La situation la plus courante est celle d'une **atténuation** ($k_i < 0$ pour une propagation dans le sens direct), on parle de milieu **atténuateur**. Cette atténuation spatiale est alors caractérisée par une distance caractéristique δ :

$$\delta = \frac{1}{|k_i|} = \frac{1}{|\text{Im}(\underline{k})|} \quad \Leftrightarrow \quad k_i = -\frac{1}{\delta}$$

La partie imaginaire k_i de \underline{k} traduit l'**atténuation spatiale** (ou plus rarement l'amplification) de l'onde au cours de sa propagation dans le milieu.

On obtient finalement une forme d'onde

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi_0) = \psi_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi_0\right)$$

L'origine la plus courante de l'atténuation est le caractère **absorbant** du milieu traversé du fait de la présence en son sein **d'éléments dissipatifs de l'énergie** (frottements en mécanique, résistances dans un fil électrique...).

Remarques :

- Il existe des **milieux actifs**, comme dans les **lasers**, dans lesquels l'onde se trouve amplifiée entre l'entrée et la sortie du milieu (donc $k_i > 0$). L'amplitude ne diverge toutefois pas exponentiellement et indéfiniment car des phénomènes non linéaires apparaissent aux amplitudes élevées, entraînant leur saturation et rendant inopérant notre méthode de recherche de solution pseudo OPPH, réservée, rappelons-le aux EDP linéaires.
- L'amplitude d'une onde peut également diminuer pour des raisons purement géométriques de « dilution » dans l'espace. Ceci apparaît notamment en 2 ou 3 dimensions
- Cette formule explique simplement la diminution de l'intensité lumineuse avec l'épaisseur traversée d'un milieu transparent (l'eau est bleue car elle absorbe préférentiellement le rouge).

2) Définition générale des vitesse de groupe et de phase

■ Vitesse de groupe et vitesse de phase

Un paquet d'onde possède deux vitesses caractéristiques : il correspond à une onde de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega_0)$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe v_g .

Vitesse de phase $\omega/k(\omega)$, correspondant à la vitesse d'une OPPH quelconque de pulsation ω :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}(\omega))}$$

Elle n'a pas de réalité physique, et ne correspond pas à un transport d'énergie.

Vitesse de groupe de l'onde globale correspondant à la vitesse de l'onde enveloppe :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0} = \left(\frac{d\omega}{d\text{Re}(\underline{k}(\omega_0))} \right)_{\omega_0}$$

On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie. La vitesse de groupe reste dans ce cas inférieure à la vitesse de la lumière : $v_g(\omega) \leq c$ afin de respecter la théorie de la relativité d'Einstein

Cette **vitesse de groupe** (vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet) a une grande importance pratique, car elle correspond également à la **vitesse de propagation de l'information**.

Par exemple, dans une transmission par modulation d'amplitude, l'information est contenue dans les variations d'amplitude de l'onde, donc dans l'enveloppe du paquet d'onde (qui a dans ce cas une durée très élevée). Dans le cas d'une transmission numérique, l'information est contenue dans une série de bits correspondant chacune à une impulsion courte donc à un paquet d'onde de durée très brève.

■ Indice n d'un milieu

Pour un milieu vérifiant une relation de dispersion donnée pour les OPPH électromagnétiques, par définition, l'indice n du milieu est alors :

$$\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \quad n_r(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)}$$

C) Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif

Comme nous venons de le voir, la propagation dans un milieu dispersif se fait à des vitesses qui dépendent des fréquences des ondes qui s'y propagent. Si un signal possède plusieurs fréquences, il sera donc déformé au cours de sa propagation par ce type de milieu.

On considère dans ce paragraphe un milieu non absorbant (ni actif) : $k_i = 0$ mais dispersif : $k = k_r(\omega)$. Il s'agit par exemple de la propagation d'une onde dans un plasma peu dense pour $\omega > \omega_p$.

■ Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif

Sur l'animation suivante, on observe une propagation en bloc du paquet d'ondes, sans aucune déformation.
<http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

Comme la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, toutes les composantes d'OPPH du paquet d'ondes se propagent à la même vitesse, le paquet d'ondes ne se déforme donc pas (pas de dispersion).

Mise en équation : milieu non dispersif tel que $v_\varphi = \omega/k = \text{constante}$, alors $\omega = v_\varphi k$ et $d\omega = v_\varphi dk \Rightarrow$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Le paquet d'onde se déplace à une vitesse de groupe égale à l'unique vitesse de phase.

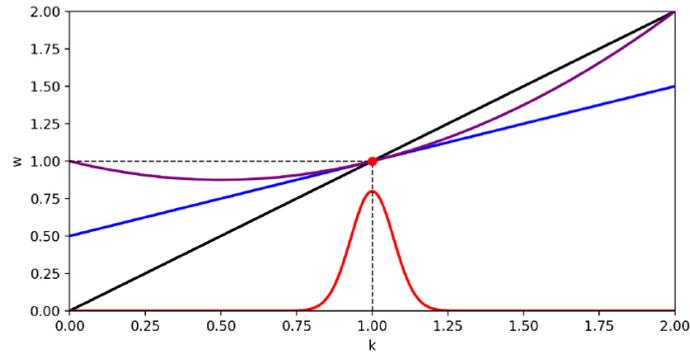
Propagation dans un milieu non dispersif (et non dissipatif) : sans déformation du signal, qui se propage donc en bloc. Les vitesses de groupe et de phase sont égales

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

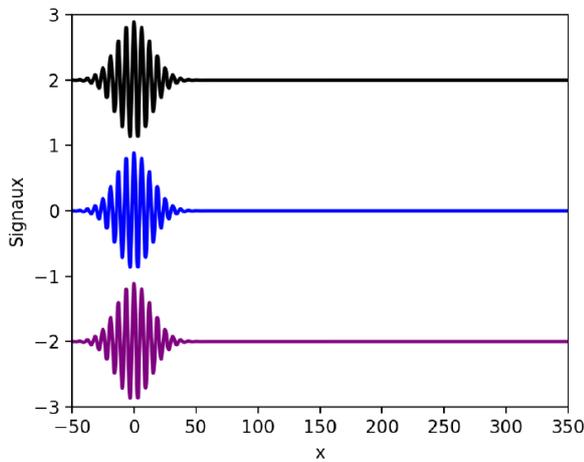
■ Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif – étalement du paquet d'ondes

Si la **vitesse de phase dépend de la pulsation** ω , chaque OPPM se propage à sa propre vitesse **constituant le paquet d'onde se propage à sa propre vitesse ; modifiant le spectre associé à la superposition**. Une onde physique réelle composée d'OPPM va ainsi se déformer au cours de sa propagation, correspondant à la **dispersion du paquet d'onde**, tandis que le maximum du paquet d'onde se déplace toujours à la vitesse de groupe.

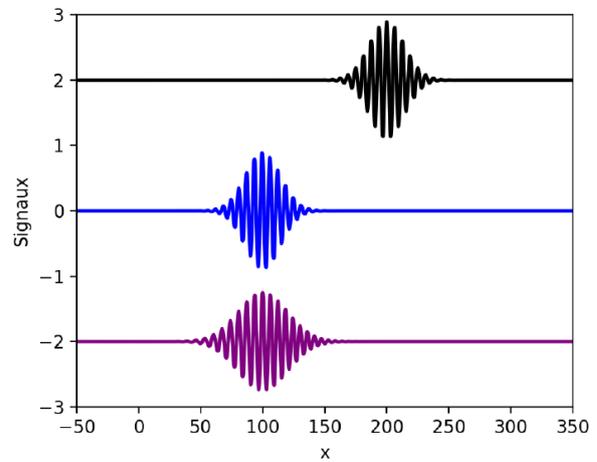
À titre d'exemple, plusieurs courbes issues d'une simulation sous python sont présentées ci-dessous (*M. Champion*).



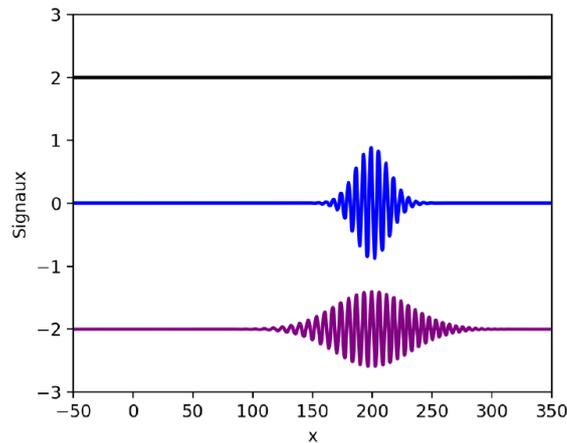
(a) Tracé de trois relations de dispersion : en noir un milieu non dispersif et en bleu et violet deux relations plus ou moins dispersives. La courbe rouge représente l'enveloppe initiale du paquet d'onde centrée en $k = 1$ (unités arbitraires). Pour les courbes bleue et violettes, la valeur de $\frac{d\omega}{dk}$ est la même en $k = 1$, elles ont donc la même vitesse de groupe et le maximum de leur paquet d'onde se propagera à la même vitesse. On peut noter que la vitesse de groupe du milieu en noir est plus élevée (pente donc valeur de $\frac{d\omega}{dk}$ en $k = 1$ plus élevée). La relation de dispersion violette a des variations plus rapides que la bleue, le milieu associé est plus dispersif.



(b) Tracé des trois paquets d'onde au temps initial : ils sont identiques.



(c) Le paquet d'onde noir va plus vite que les deux autres qui ont la même vitesse de groupe.



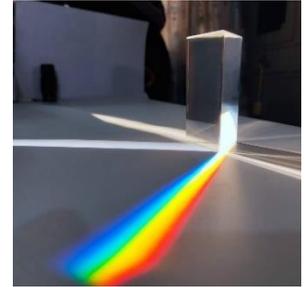
(d) Après un temps long, le paquet d'onde violet est très déformé car il parcourt un milieu très dispersif.

Figure - Illustration de la déformation d'un paquet d'onde dû à la dispersion. La courbe (a) représente les relations de dispersions utilisées lors de la simulation. Les courbes suivantes représentent l'évolution à trois instants différents du même paquet d'onde (en unités arbitraires) dans trois milieux décrits par les relations de dispersion de la figure (a).

Remarques :

- Dans les télécommunications, on recherche des milieux les moins dispersifs possibles (cas des fibres optiques), car en effet, l'étalement des signaux par dispersion oblige à éloigner en temps les divers paquets d'information pour éviter un effet de brouillage par recouvrement. Ainsi, plus la dispersion est élevée, plus le débit d'informations est limité, et ce d'autant plus que les distances de propagation considérées sont importantes.
- On interprète généralement la dispersion de lumière par les gouttelettes d'eau (arc-en-ciel) ou par le verre des prismes en exploitant la variation de l'indice optique avec la longueur d'onde lumineuse, en parlant de milieux plus ou moins dispersifs. Il s'agit du même phénomène de dispersion que celui défini dans ce cours, **l'indice optique** dans un milieu étant par définition :

$$n = \frac{c}{v_{\varphi}(\omega)}$$



Soit pour un milieu dispersif, avec $\omega = f\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) = g(\lambda)$, on obtient bien un indice $n(\lambda)$ dépendant de la longueur d'onde du signal considéré.

■ Causes du caractère dispersif : peuvent être dues

- Soit au milieu de propagation lui-même. Les caractéristiques du milieu font que les ondes qui s'y propagent ne vérifient plus l'équation de d'Alembert (cas du plasma). On parle parfois de **dispersion intrinsèque** (car lié à des caractéristiques intrinsèques du milieu). C'est une dispersion de cette nature qui est mise en œuvre dans le prisme en verre traversé de lumière.
- Soit aux conditions aux limites qui peuvent engendrer également la dispersion des ondes. Dans ce cas, l'équation d'onde peut encore être une équation de d'Alembert. On parle souvent de **dispersion intermodale**.