TD CHAPITRE OND.3 : PROPAGATION D'ONDE ET EFFET DE PEAU

▪ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Conductivité complexe IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble $\vec{v}$ et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$.

1 - Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu.

2 - A l'aide des données fournies, évaluer l'ordre de grandeur du temps de relaxation τ.

3 - Simplifier cette expression pour $\omega\tau << 1$ et $\omega\tau >> 1$; montrer dans ce 2ème cas que $\underline{\gamma} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$ où l'on précisera l'expression de ω_p.

Données : $\gamma_0 \sim 10^7$ S.m^{-1}, $e^2/m \sim 10^{-8}$ $\mathrm{C^2.kg^{-1}}$ et $n_e \sim 10^{28}$ m^{-3}.

Exercice 2. Electroneutralité d'un conducteur ohmique en régime lentement variable 2 | 1

On étudie en général l'évolution de la densité volumique de charges après s'être placé dans le cadre où $f \ll 1/\tau$. la conductivité $\underline{\gamma}(\omega)$ du métal est approchée par sa valeur statique : $\underline{\gamma}(\omega) \simeq \gamma(\omega = 0) = \gamma_0$ et on exploite la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$. En exploitant l'équation locale de conservation de la charge, étudier l'évolution de la densité volumique de charge au cours du temps.

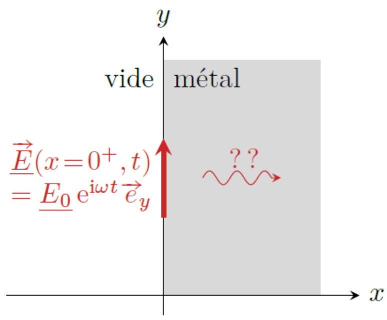
Exercice 3. Equation de propagation des champs électrique et magnétique IMPORTANT | 1 | 2

Etablir l'équation de propagation des champs électrique et magnétique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable.

Exercice 4. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique en régime lentement variable IMPORTANT | 2 | 2

Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable, et nous allons rechercher pour le champ électrique une solution sous la forme harmonique suivante

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0} e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{e}_y$$



en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. On cherche à quelle(s) condition(s) sur k la forme ci-dessus peut décrire la propagation dans le métal.

1- Quelle est la direction de propagation de cette onde ? sa polarisation ?

2- Établir la relation de dispersion associée.

3- Déterminer l'expression du vecteur d'onde $\underline{k}$ par deux méthodes de résolution de l'équation de dispersion.

4- Écrire la forme des champs sachant que l'on cherche des solutions bornées.

5- Etablir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

Exercice 5. Bilan énergétique de la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal 1 ou 2 | 2

Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

1- Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé.

2- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu.

3- Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée.

4- Etablir l'expression de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée).

5- Déterminer l'énergie dissipée dans une tranche de surface S comprise entre x et $x + dx$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 6. Onde thermique 2 | 2

On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note λ la conductivité thermique du sol, ρ sa masse volumique, c sa capacité thermique massique et D sa diffusivité thermique telle que $\boldsymbol{D} = \frac{\lambda}{\rho \boldsymbol{c}}$

On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$, à une date t, sous la forme $T(x,t) = T_0 + a(x)\cos\big(\omega t + \varphi(x)\big)$, à laquelle on associe $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0 = a(x)\cos\big(\omega t + \varphi(x)\big)$.

1- Etablir l'expression de la grandeur complexe associée $\underline{\theta}(x,t)$ ainsi que l'équation vérifiée par $\underline{a}(x)$ en exploitant l'équation de la diffusion thermique.

2- Résoudre cette équation, et établir l'expression de $T(x,t)$.

Exercice 7. Epaisseur de peau thermique 2 | 1

Données caractéristiques du sol (très utiles pour les plantations, les canalisations d'eau, les implantations de caves à vin) : $\rho = 3.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$; $c = 515\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$; $\lambda = 1\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$

1) Exprimer et calculer l'épaisseur de peau thermique associée à une amplitude de **variation journalière de température** de l'atmosphère de $15°C$, autour de la température moyenne de $2{,}5°C$ en hiver.

2) Déterminer la profondeur à laquelle il faut alors descendre dans le sol pour que l'amplitude ne soit plus que de 1°C, et effectuer l'application numérique. Commenter le résultat obtenu.

3) Déterminer l'expression de l'épaisseur de peau thermique associée à une amplitude de **variation annuelle de température** de $40°C$ autour de $10°C$, puis la profondeur à laquelle il faut alors descendre dans le sol pour que l'amplitude ne soit plus que de 1°C ; effectuer les applications numériques.

EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 8. Blocage d'appel (oral banque PT) IMPORTANT | 1 | 2

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3 - Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?

4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 9. Transparence ultra-violette des métaux (d'après Banque PT) 2 | 1

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin, $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$.

1- Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

2 - Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.

3 - Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}\vec{r})}$

4 - Établir la relation de dispersion.

5 - En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée. Commenter.

Données :

dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5.10^7$ S.m^{-1} et $\tau = 10^{-14}$ s ;

perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$H.m^{-1} ;

double produit vectoriel : pour tous vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

Exercice 10. Propriétés optiques du métal or (Concours CCS MP 2021) 2 | 2

On souhaite modéliser les propriétés optiques de l'or à l'état métallique à l'aide du modèle de Drude. Pour ce faire, on considère que le métal est composé d'un ensemble d'ions supposés fixes, qui constituent le réseau cristallin, et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer sur des distances très largement supérieures aux distances interatomiques. Chaque électron porte la charge $-e$ et possède une masse notée m_e.

En l'absence d'excitation électromagnétique extérieure, l'état du métal est stationnaire et qualifié d'état de repos. Il est désigné par les grandeurs physiques suivantes, indicées par 0, indépendantes du temps. Les champs électrique et magnétique au repos, en un point M, sont identiquement nuls : $\vec{E}_0(M) = \vec{0}$ et $\vec{B}_0(M) = \vec{0}$. Les électrons sont animés d'un mouvement d'agitation thermique, mais la vitesse moyenne des électrons qui se situent au voisinage d'un point M est nulle : $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$. Au repos, le métal est électriquement neutre à l'échelle locale : le nombre moyen d'électrons par unité de volume est égal au nombre moyen d'ions par unité de volume. On note n_{e0} le nombre moyen d'électrons par unité de volume dans l'état de repos du métal, supposé uniforme.

La propagation d'une onde électromagnétique vient perturber localement l'état de repos du métal. On suppose que cette perturbation est d'amplitude suffisamment faible pour que les différentes grandeurs physiques puissent s'écrire comme la somme de la valeur de cette grandeur au repos, indicée par 0 et d'une valeur perturbée, indicée par le chiffre 1. Ainsi, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de vitesse des électrons et le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(M,t) &= \vec{E}_0(M) + \vec{E}_1(M,t) = \vec{0} + \vec{E}_1(M,t)\,,\\
\vec{B}(M,t) &= \vec{B}_0(M) + \vec{B}_1(M,t) = \vec{0} + \vec{B}_1(M,t)\,,\\
\vec{v}(M,t) &= \vec{v}_0(M) + \vec{v}_1(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)\,,\\
n_e(M,t) &= n_{e0} + n_{e1}(M,t)\,.
\end{aligned}$$

Les grandeurs $\vec{E}_1(M,t)$, $\vec{B}_1(M,t)$, $\vec{v}_1(M,t)$ et $n_{e1}(M,t)$ sont associées à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu. Leurs amplitudes respectives sont supposées suffisamment faibles pour qu'on se limite à un traitement linéaire : tous les calculs se limiteront à des termes qui s'expriment au premier ordre vis-à-vis des amplitudes indicées par le chiffre 1. Ci-dessous est présenté un exemple de linéarisation au premier ordre du produit de deux grandeurs $a(M,t)b(M,t)$ où le terme du second ordre est finalement négligé :

$$\begin{aligned}
a(M,t)b(M,t) &= (a_0 + a_1(M,t))(b_0 + b_1(M,t))\\
&= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_0 b_1(M,t) + b_0 a_1(M,t)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{a_1(M,t) b_1(M,t)}_{\text{ordre 2 négligeable}}\\
&\simeq a_0 b_0 + a_0 b_1(M,t) + b_0 a_1(M,t)\,.
\end{aligned}$$

III.A – Mouvement des électrons libres

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement des électrons libres. Le gaz d'électrons libres est assimilé à un fluide. On note respectivement m_e et $-e$ la masse et la charge électrique d'un électron. On suppose qu'en plus de la force d'interaction avec le champ électromagnétique de l'onde, les électrons sont soumis à une force dissipative qui modélise leurs interactions avec le réseau cristallin : $-\dfrac{m_e}{\tau}\vec{v}_1(M,t)$. Le mouvement des électrons est supposé non relativiste ($\|\vec{v}_1\| \ll c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide). Dans l'approximation linéaire, l'équation du mouvement des électrons se met sous la forme approchée

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M,t) = -e\vec{E}_1(M,t) - \frac{m_e}{\tau}\vec{v}_1(M,t)\,. \tag{III.1}$$

Q 24. Expliquer pourquoi, compte tenu des hypothèses retenues, la composante magnétique de la force exercée par l'onde électromagnétique sur les électrons n'apparaît pas dans l'équation du mouvement (III.1).

Q 25. Exprimer, dans l'approximation linéaire, la densité volumique de courant électrique $\vec{j}_1(M,t)$ dans le métal en fonction, entre autres, de la vitesse moyenne des électrons $\vec{v}_1(M,t)$, puis établir l'équation différentielle liant $\vec{j}_1(M,t)$ et $\vec{E}_1(M,t)$.

III.B – Relation de dispersion

On suppose que le métal est soumis à une onde électromagnétique, harmonique de pulsation ω, dont le champ électrique s'écrit ainsi en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}_1(M,t) = \tilde{E}_1 \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \underline{n}\frac{\omega}{c}x)\right)\vec{e}_y\,, \tag{III.2}$$

où $\underline{n} \in \mathbb{C}$ est appelé *indice complexe* du métal. L'espace est rapporté à la base orthonormée cartésienne $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

Q 26. Justifier que l'onde électromagnétique considérée peut être qualifiée de plane, progressive, transverse et que son état de polarisation est rectiligne.

Q 27. Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le milieu considéré, en faisant intervenir $n_{e1}(M,t)$, $\vec{j}_1(M,t)$, $\vec{E}_1(M,t)$ et $\vec{B}_1(M,t)$.

Q 28. Montrer que les caractéristiques de l'onde électromagnétique imposent $n_{e1}(M,t) = 0$.

Q 29. Établir l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique $\vec{E}_1(M,t)$ dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma définie par la relation $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_{e0}e^2}{m_e\varepsilon_0}}$.

Q 30. Établir que le champ électrique (III.2) est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente à condition que :

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \mathrm{i}\dfrac{\omega}{\tau}} . \tag{III.3}$$

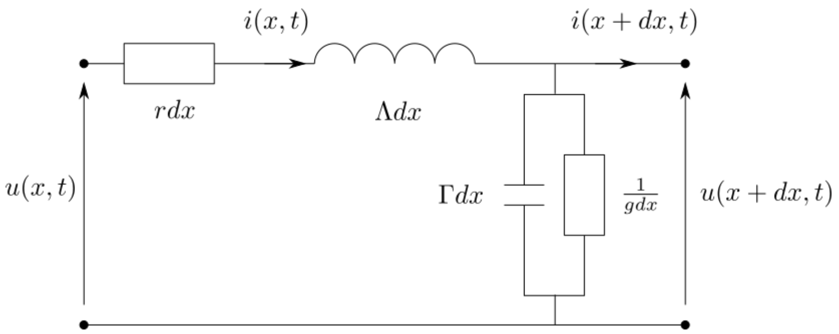
Q 31. Déterminer les expressions des constantes diélectriques ε_1 et ε_2 (qui sont des grandeurs réelles) telles que $\underline{n}^2 = \varepsilon_1 - \mathrm{i}\varepsilon_2$. Exprimer ε_1 et ε_2 en fonction de ω, ω_p et τ.

Q 32. En déduire les expressions asymptotiques des constantes diélectriques ε_1 et ε_2 dans la limite où $\omega\tau \gg 1$, et comparer ε_1 et ε_2 dans cette limite.

Exercice 11. Propagation dans un câble coaxial-équation du télégraphiste 2 | 2

On veut étudier la propagation d'une onde dans un câble coaxial, constitué de deux conducteurs concentriques de rayons respectifs a et b, séparés par un isolant. Ici comme on étudiera la propagation dans l'isolant et non dans le vide, il faudra prendre en compte les effets de milieu et remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$ dans les équations de Maxwell.

On modélise tout d'abord ce câble par une inductance linéique $\lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ainsi que par une capacité linéique $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$. On ajoute également une résistance linéique r et une conductance linéique g comme indiqué sur le schéma électrique équivalent suivant.



1 - Indiquer l'origine physique des deux termes résistifs. Pour quelles raisons y a-t-il des pertes sur une ligne électrique ? Que peut-on prévoir sur l'amplitude du signal le long du câble dans le sens de la propagation ?

2 - Montrer que l'équation de propagation de la tension $u(x,t)$ dans un tel câble s'écrit sous la forme suivante dite des « **télégraphistes** »

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial u}{\partial t} + Bu$$

en précisant l'expression des constantes v, A et B, commenter.

3 - Mettre cette équation sous la forme canonique suivante qui fait mieux apparaitre les termes de type « d'Alembert » ainsi que les termes liés aux élément dissipatifs du câble. On exprimera les différentes constantes c_0, τ et ω_0.

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{termes de d'Alembert}} \underbrace{+ \frac{1}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u}_{\text{termes de pertes}} = 0$$

On souhaite étudier la propagation d'ondes progressives de la forme : $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - \underline{k}(\omega)x)}$.

4- Établir la relation de dispersion dans le câble coaxial avec pertes.

5- Montrer que si $\omega \gg \omega_0$ et $\tau \to \infty$, il n'y a ni atténuation, ni dispersion

6- Montrer que si $\omega \gg \omega_0$ et $\omega\tau \gg 1$; il n'y a pas de dispersion mais de l'atténuation avec $\delta \approx 2c_0\tau$

7- Montrer que si $\omega > \omega_0$ et $\tau \to \infty$, il n'y a pas atténuation mais qu'il y a de la dispersion. Calculer la vitesse de phase. Commentaire.

8- Montrer que si $\omega < \omega_0$ et $\tau \to \infty$, il y atténuation et stationnarité. Représenter cette onde ainsi que son évolution au cours du temps.

9- Mettre à présent l'équation de propagation sous la forme :

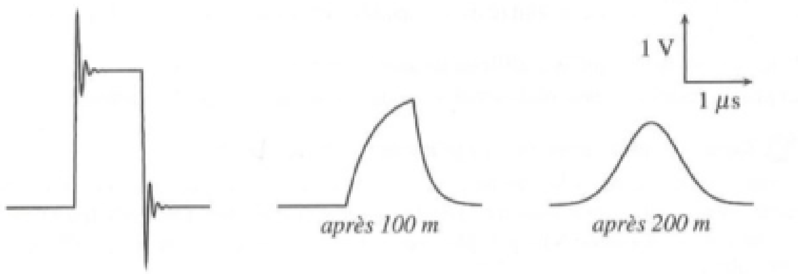
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (g\Lambda + r\Gamma)\frac{\partial u}{\partial t} - gru = 0$$

10- Retrouver en exploitant cette forme l'équation de dispersion de cette onde.

11- Déterminer le système d'équations (sans chercher à le résoudre !) que doivent vérifier la partie réelle partie réelle k' et la partie imaginaire k'' du vecteur d'onde $\underline{k}$.

12- Comment doit-on choisir les paramètres de la ligne de telle sorte que la vitesse de phase v_φ et la distance d'amortissement δ soient indépendants de ω ? Quel peut être l'intérêt de ce choix ?

13- On alimente le câble à l'aide d'un bref signal de durée 1µs et d'amplitude 2V. On obtient les signaux suivants après 100 m et 200 m de propagation. Respecte-t-on les conditions de la question précédentes ? Justifier

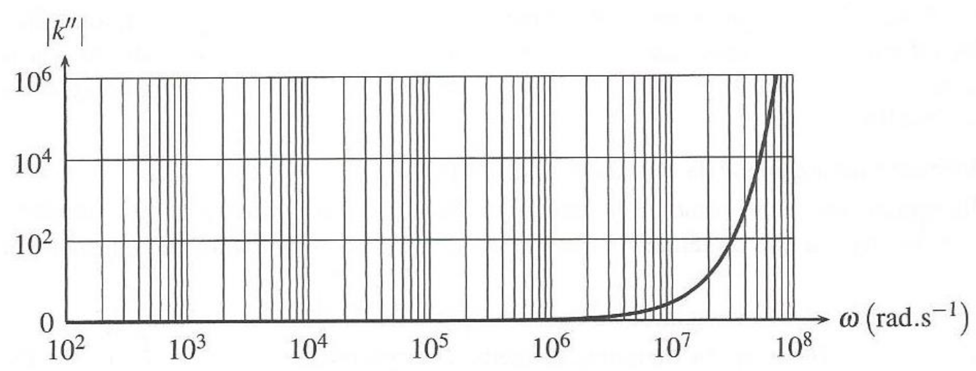


On relève alors les valeurs suivantes des amplitudes du signal

Distance parcourue (m)	0	100	200	300	400
Amplitude U du signal (V)	2	1,6	1,2	1,0	0,74

14- Montrer que la décroissance du signal est bien exponentielle et déterminer la valeur de la distance caractéristique d'amortissement δ ainsi que l'absorption du câble en dB/km.

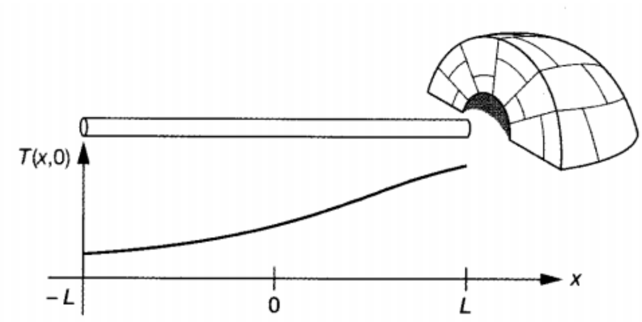
15- L'équation de dispersion permet de tracer le graphe ci-après de k'' en fonction de la fréquence. Expliquer, en se basant sur ce graphe, comment se déforme le signal lors de sa propagation ; on insistera sur la forme du signal et son amplitude.



EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 12. Grandeurs caractéristiques 1 ou 2 | 2

L'extrémité d'une barre de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c, de masse volumique ρ et de longueur $2L$ a été placée dans un four pendant quelque temps. Lorsqu'on l'en sort, le profil de température dans la barre est inhomogène.



a. En considérant la longueur L comme une grandeur caractéristique de l'aspect spatial du problème, former à l'aide de la diffusivité thermique $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ et de L, une grandeur caractéristique τ homogène à une durée.

b. Calculer la diffusivité thermique du bois et de l'acier et en déduire, pour deux barres de même longueur réalisées dans ces matériaux, le rapport des durées caractéristiques. Commenter.

Acier : $\lambda = 40\, W.K^{-1}.m^{-1}$ $c = 500\, J.kg^{-1}.K^{-1}$ $\rho = 7800\, kg.m^{-3}$

Bois : $\lambda = 0{,}2\, W.K^{-1}.m^{-1}$ $c = 1500\, J.kg^{-1}.K^{-1}$ $\rho = 800\, kg.m^{-3}$

c. On propose la forme suivante pour l'expression de la température en fonction de l'abscisse $x \in [-L, +L]$ et du temps :

$$T(x,t) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp\left(-\frac{t}{a}\right)$$

Que représentent T_0 et θ_0 ? Quelle est la dimension de a ?

d. Vérifier que l'expression est solution de l'équation de la diffusion thermique à condition que a vérifie une relation faisant intervenir la longueur L et la diffusivité thermique D.

Exercice 13. Propagation d'ondes acoustiqus 2 | 2

La prise en compte de la viscosité de l'air dans l'équation des ondes acoustiques s'y propageant vérifie l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\eta}{\mu c^2}\frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}$$

Données : $\mu = 1{,}3$ kg·m^{-3} masse volumique de l'air dans les CNTP au repos, $\eta = 10^{-5}$ Pa·s sa viscosité et $c = 340$ m·s^{-1} la célérité du son en l'absence de viscosité.

1. Déterminer la relation de dispersion associée à cette équation d'onde.

2. En déduire l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω.

3. Dans la gamme des fréquences audibles, $\frac{\eta}{\mu c^2}\omega$ reste numériquement inférieur à 10^{-5}. Simplifier alors l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω puis calculer la vitesse de phase v_φ.

4. Caractériser la propagation dans un tel milieu. Faire apparaitre une distance caractéristique et commenter sa valeur.

Exercice 14. Propagation dans un diélectrique – modèle de l'électron élastiquement lié

Un diélectrique correspond à un milieu ne contenant pas de charges libres (isolant électrique, comme le verre notamment), pour lequel on peut remplacer dans les équations de Maxwell notamment ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité diélectrique relative du milieu, qui peut potentiellement dépendre de la fréquence et être complexe.

1- Quelle est la structure d'une OemPPH dans ces conditions ?

2- Quelle est son équation de propagation? En déduire la relation de dispersion.

3- On définit l'indice d'un milieu par $n_r = \frac{c}{v_\varphi}$. Quelle est la valeur de l'indice d'un diélectrique ?

On modélise à présent à modéliser un matériau diélectrique avec les hypothèses suivantes :

Le matériau est considéré comme étant constitué d'atomes. Chaque atome possède un ou plusieurs électrons sur sa couche de valence susceptible(s) de subir l'influence du champ extérieur.

On note N la densité totale de tels électrons. Les hypothèses du mouvement des électrons sont :

- on note $\vec{r}$ la position de l'électron par rapport au centre de l'atome.
- Chaque électron est lié élastiquement au noyau de l'atome ; on considère qu'il existe une constante de rappel élastique K ramenant l'électron sur sa position d'équilibre en 0 ; l'électron subit une force $-K\vec{r}$.
- Chaque électron subit de plus une force de frottement $-f\vec{v}$. Cette force traduit les pertes énergétiques dues à l'émission d'ondes EM par l'électron.

On s'intéresse dans la suite à une onde électromagnétique $\vec{E_i} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ arrivant sur un atome du matériau diélectrique et mettant en mouvement un électron de cet atome. Sous l'effet du champ électrique, on suppose que l'électron (non relativiste) va également osciller à la pulsation ω.

4- Montrer que l'effet du champ magnétique est négligeable.

5- Ecrire le PFD pour l'électron. En déduire que sa position $\vec{r}$ est reliée au champ électrique $\vec{E}$.

L'électron étant une entité chargé son mouvement correspond à des mouvements de charges *i.e.* à une densité volumique de courant électrique $\vec{j}_p$.

6- Comment sont reliés $\vec{j}_p$ et $\vec{r}$? En déduire une relation entre $\vec{j}_p$ et $\vec{E}$.

On admettra pour la suite que le courant $\vec{j}_p$ doit être pris en compte dans l'équation de Maxwell-Ampère (bien que ce ne soit pas un courant libre...). On parle de courant de polarisation.

6.a) En déduire la forme pris par l'équation de Maxwell Ampère.

6.b) Comment s'écrit ici la permittivité diélectrique relative ε_r du milieu ?

6.c) En écrivant $\varepsilon_r = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$, tracer l'évolution des parties réelle et imaginaire de ε_r en fonction de la pulsation.

6.d) Comment sont reliés l'indice n du milieu et ε_r ? On écrira n sous la forme $n = n_1 - in_2$. A quoi correspondent n_1 et n_2 ? Comment sont-ils reliés à ε_1 et ε_2 ? En déduire que le milieu est absorbant dans une certaine gamme de fréquences seulement.
