

CHAP.OND3 : ONDES ET EFFET DE PEAU – PROPAGATION D’ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES CONDUCTEURS OHMIQUES ; ONDES THERMIQUES

Plan du cours

| | |
|--|----|
| I) Conductivité d’un métal en régime variable..... | 1 |
| A) Conducteur ohmique – rappels sur le modèle de Drüde..... | 1 |
| B) Conductivité en régime variable dans un conducteur ohmique..... | 2 |
| C) Electroneutralité du conducteur..... | 3 |
| II) Propagation dans un conducteur ohmique en régime lentement variable..... | 4 |
| A) Cadre des régimes lentement variables | 4 |
| B) Relation de dispersion en régime lentement variable..... | 5 |
| C) Propagation avec effet de peau..... | 9 |
| D) Interprétation énergétique..... | 11 |
| III) Ondes thermiques | 14 |
| A) Situation modèle..... | 14 |
| B) Evolution de la température dans le sol | 15 |

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 : Electromagnétisme

Si le modèle de l’onde plane est présenté dans le cadre de l’espace vide, les études des ondes électromagnétiques dans un plasma ainsi que dans un milieu ohmique permettent d’illustrer l’importance des couplages entre les champs, les charges et les courants. Elles sont également l’occasion d’enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant, par exemple, l’effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase, de fréquence de coupure ou encore d’onde évanescente.

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|--|--|
| 4.5. Propagation et rayonnement | |
| Propagation d’une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau. | Établir et interpréter l’expression de la longueur caractéristique d’atténuation de l’onde électromagnétique dans un milieu ohmique. |

I) CONDUCTIVITE D’UN METAL EN REGIME VARIABLE

A) Conducteur ohmique – rappels sur le modèle de Drüde

Un milieu est dit conducteur si, sous l’action d’un champ électrique, un courant de conduction se met en place .

Dans le modèle de Drude de la conduction électrique dans les métaux, on considère la vitesse d’ensemble des électrons soumis à une force électromagnétique de Lorentz \vec{v} qui est la **vitesse moyenne des porteurs de charge**, et les collisions des porteurs de charge sont pris en compte par le biais d’une force de « frottement » de type fluide avec $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$.

Nous avons alors établi l’expression de la conductivité γ_0 des matériaux ohmiques en régime continu, définie par la loi d’Ohm locale.

■ Conducteur ohmique et loi d'Ohm locale en régime continu

$$\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$$

\vec{j} : vecteur densité de courant en $C.m^{-2}.s^{-1}$

γ_0 : conductivité $\Omega^{-1}.m^{-1}$

avec $\gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$ où n_e est la densité particulaire d'électrons libres (en m^{-3}) et τ un temps caractéristique dit temps de relaxation pouvant être interprété comme la durée moyenne entre deux collisions successives d'un électron sur les cations du réseau.

Pour le cuivre : $\gamma_0 = 5,7.10^7 S.m^{-1}$, $\tau \sim 10^{-14} s$ et $n_e \sim 6.10^{28} m^{-3}$.

B) Conductivité en régime variable dans un conducteur ohmique

■ Cadre de l'étude

Comme dans les plasmas, les conducteurs ohmiques étudiés sont des métaux comprenant des ions supposés fixes et des électrons de conduction de masse m_e et de densité particulaire n_e libres de se déplacer dans le métal.

Dans ces conducteurs ohmiques, un champ électromagnétique agit sur les électrons de conduction et les met en mouvement, ce qui crée une densité volumique de courant. Cependant, contrairement au modèle de plasma dilué, les métaux auxquels nous allons nous intéresser correspondent à des milieux denses. Il faut alors bien tenir compte des collisions entre les électrons et les ions du réseau par le biais d'une force de « frottement » de la forme $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

Lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau métallique, il faut a priori tenir compte du champ magnétique dans l'expression de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Comparaison des composantes électrique et magnétique de la force de Lorentz en supposant comme dans le vide $B \sim E/c$:

$$\|\vec{F}_{elec}\| / \|\vec{F}_{mag}\| \sim E/vB \sim c/v \gg 1$$

Pour des électrons non relativistes, $v \ll c$ et la force magnétique est négligeable devant la force électrique :

$$\vec{F} \approx -e\vec{E}$$

■ Conductivité complexe

Exercice 1. Conductivité complexe

On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble \vec{v} et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

- 1 - Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu.
- 2 - A l'aide des données fournies, évaluer l'ordre de grandeur du temps de relaxation τ .
- 3 - Simplifier cette expression pour $\omega\tau \ll 1$ et $\omega\tau \gg 1$; montrer dans ce 2^{ème} cas que $\underline{\gamma} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$ où l'on précisera l'expression de ω_p .

Données : $\gamma_0 \sim 10^7 S.m^{-1}$, $e^2/m \sim 10^{-8} C^2.kg^{-1}$ et $n_e \sim 10^{28} m^{-3}$.

On a donc $\gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$ soit $\tau = \frac{m\gamma_0}{n_e e^2} \sim 10^{-13} s$. ($\tau \approx 10^{-14} s$ pour le cuivre).

Loi d'Ohm locale généralisée et conductivité complexe

Lorsque le champ électrique varie sinusoïdalement, le modèle de Drüde est généralisé en introduisant une conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$:

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

On a alors

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

C) Electroneutralité du conducteur

Le passage du champ électrique dans le conducteur met en mouvement les charges électriques présentes ; nous allons étudier l'évolution de la densité volumique de charges électriques dans ce contexte.

Considérons donc un conducteur ohmique vérifiant la loi de Joule locale :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

Equation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \underline{\vec{j}} = 0$$

En notation complexe : $i\omega\rho + \text{div } \underline{\vec{j}} = 0$

Loi d'Ohm locale :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad i\omega\rho + \text{div } \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{ou} \quad i\omega\rho + \underline{\gamma} \text{div } \underline{\vec{E}} = 0$$

Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit dans l'équation de conservation de la charge :

$$i\omega\rho + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad \text{soit} \quad \left(i\omega + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \right) \rho = 0$$

$$\left(i\omega(1 + i\omega\tau) + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \right) \rho = 0 = \left((i\omega)^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\tau} \right) \rho$$

En revenant aux notations réelles, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\tau} \rho = 0$$

En utilisant les ordres de grandeur caractéristiques des métaux, on trouve un discriminant du polynôme caractéristique associé $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4 \frac{\gamma_0}{\tau\epsilon_0} \approx -4 \frac{\gamma_0}{\tau\epsilon_0} < 0$.

Les solutions du polynôme caractéristique sont donc

$$r_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta}$$

Correspondant à une solution en régime pseudopériodique soit un régime sinusoïdal amorti pour $\rho(t)$. Le temps caractéristique de décroissance de l'exponentielle sera de 2τ , avec une pseudo-pulsation de $\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$.

Ainsi, pour des durées de quelques τ , la densité de charges électriques tend vers zéro après passage d'un champ électrique excitateur. Pour des champs de période T telle que $T \gg \tau$ soit $f \ll \frac{1}{\tau}$ cette densité de charge ponctuelle pourra être négligée.

Lors du passage d'un champ électrique de fréquence excitatrice inférieure à 10^{13} Hz, un conducteur ohmique peut être considéré comme **électriquement neutre**. On se placera alors dans le cadre de l'approximation :

$$\forall t, \rho = 0$$

II) PROPAGATION DANS UN CONDUCTEUR OHMIQUE EN REGIME LENTEMENT VARIABLE

A) Cadre des régimes lentement variables

1) Hypothèses et premières conséquences

■ Simplification de l'équation de Maxwell-Gauss dans le cadre des régimes lentement variables

Exercice 2. Electroneutralité d'un conducteur ohmique en régime lentement variable

On étudie en général l'évolution de la densité volumique de charges après s'être placé dans le cadre où $f \ll 1/\tau$. la conductivité $\underline{\gamma}(\omega)$ du métal est approchée par sa valeur statique : $\underline{\gamma}(\omega) \simeq \gamma(\omega = 0) = \gamma_0$ et on exploite la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$. En exploitant l'équation locale de conservation de la charge, étudier l'évolution de la densité volumique de charge au cours du temps.

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. Or avec $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, on en déduit, d'après l'équation de Maxwell Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

En intégrant :

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau'}$$

Avec $\tau' = \epsilon_0/\gamma_0 \sim 10^{-18}$ s nommé **temps caractéristique de Maxwell**.

Aux fréquences $f \ll 1/\tau$ auxquelles on travaille, on a toujours $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la **relaxation de la densité volumique** de charge dans le conducteur est toujours **infiniment plus rapide** que la variation qui pourrait être imposée par la variation temporelle du champ source.

À ces « basses fréquences » ($f \ll 1/\tau$), les électrons ne peuvent pas se concentrer localement pour former des amas chargés dans la masse du métal car le phénomène de conduction les disperse quasi-instantanément vers les surfaces du matériau (ce phénomène explique que les métaux se chargent en surface, ce processus est l'analogie de la décharge d'un condensateur dans une résistance, de temps caractéristique RC analogue à ϵ_0/γ_0)

En présence d'une OEM de fréquence $f \ll 1/\tau \sim 10^{14}$ Hz, la densité volumique de charge ρ est uniformément et constamment nulle :

$$\rho(M, t) = 0$$

Equation de Maxwell Gauss simplifiée :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (MG)$$

■ Simplification de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre des régimes lentement variables

Nous avons vu que dans les conducteurs ohmiques, dans le cadre de l'ARQS magnétique, les courants de déplacement restent très inférieurs aux courants ohmiques de conduction

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} = \frac{\gamma_0 \|\vec{E}\|}{\epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega \tau'} \gg 1$$

On peut donc négliger les courants de déplacement dans l'équation de Maxwell Ampère devant les courants de conduction de type ohmique

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E} \quad (MA)$$

■ Cadre général des régimes lentement variables

Jusqu'à des fréquences de l'ordre de $\frac{1}{\tau} \sim 10^{13}$ à 10^{14} Hz, correspondant aux fréquences optiques (domaine visible), on utilisera les approximations suivantes, constituant le **cadre des régimes lentement variables** dans lequel on se place pour la suite de notre étude.

- La conductivité $\underline{\gamma}(\omega)$ du métal est approchée par sa valeur statique : $\underline{\gamma}(\omega) \simeq \underline{\gamma}(\omega = 0) = \gamma_0$. On peut alors décrire la conduction dans un métal en présence d'une OEM par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$;
- Le métal est supposé électriquement neutre en tout point et en tout instant : $\forall t, \rho = 0$.
- On est dans le cadre de l'**ARQS magnétique**, $\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} \gg 1$.

Le comportement d'un métal vis-à-vis des ultra-violets, des rayons X ou des rayons gamma ne pourra pas être décrit par le modèle envisagé dans ce cours.

2) Equations de Maxwell simplifiées et conséquences associées

■ Equations de Maxwell simplifiées pour les conducteurs ohmiques en régime lentement variable

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E} \end{aligned}$$

■ Conséquences

En notation complexe :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} &= 0 & \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} &= \omega \underline{\vec{B}} & i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} &= -\mu_0 \gamma_0 \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

A partir des équations de MG et MT :

- ▷ Les OemPP dans les conducteurs ohmiques en régime lentement variable sont **transverses**.
- ▷ On retrouve la même relation de structure que dans le vide en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

B) Relation de dispersion en régime lentement variable

3) Propagation d'une onde électromagnétique

Exercice 3. Equation de propagation des champs électrique et magnétique

Etablir l'équation de propagation des champs électrique et magnétique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{MG} \equiv -\underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.F.} \equiv \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= -\overrightarrow{\Delta} \vec{E} \\ \overrightarrow{\Delta} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) \equiv \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{M.A.} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le champ magnétique vérifie la même équation de propagation

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable vérifie les équations de propagations suivantes :

Equations de diffusion dans un conducteur ohmique en régime lentement variable

Dans un conducteur ohmique de conductivité statique γ_0 dans le cadre des régimes lentement variables, les champs électrique et magnétique vérifient les équations de diffusion

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ces équations ne sont pas des équation de d'Alembert mais des **équations de diffusion** de la même forme que celle obtenue lors de l'étude de la diffusion thermique.

Il était prévisible que l'onde électromagnétique ne vérifie pas l'équation de d'Alembert. En effet, l'équation de d'Alembert décrit des phénomènes de propagation sans atténuation, tandis que dans un conducteur ohmique l'énergie de l'onde est progressivement absorbée et dissipée par effet Joule.

Si l'équation de propagation n'est pas la même, certaines propriétés des ondes dans le vide se retrouvent également dans les conducteurs, en particulier le caractère transverse de ces ondes car les équations de Maxwell en divergence s'écrivent de la même façon dans le vide ou dans les conducteurs (plasmas ou conducteurs ohmiques).

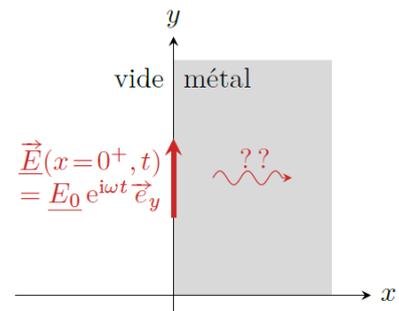
4) Relation de dispersion

Exercice 4. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique en régime lentement variable

Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable, et nous allons rechercher pour le champ électrique une solution sous la forme harmonique suivante

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. On cherche à quelle(s) condition(s) sur k la forme ci-dessus peut décrire la propagation dans le métal.



- 1- Quelle est la direction de propagation de cette onde ? sa polarisation ?
- 2- Établir la relation de dispersion associée.
- 3- Déterminer l'expression du vecteur d'onde \underline{k} par deux méthodes de résolution de l'équation de dispersion.
- 4- Écrire la forme des champs sachant que l'on cherche des solutions bornées.
- 5- Etablir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

1- Polarisation rectiligne selon (Oy), propagation selon (Ox) dans le sens direct

2- La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$(-ik)^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \vec{E}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

3- Cherchons la solution exacte du vecteur d'onde \underline{k} sous la forme générale $\underline{k} = k_r + k_i$ en commençant par rechercher k_r et k_i .

Méthode 1 de résolution :

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

Soit

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Méthode 2 de résolution

$$\underline{k}^2 = (k_r + ik_i)^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

$$k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

On en déduit $|k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega$ soit en notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$,

$$|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

4- On recherche le champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, la forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation est a priori une combinaison linéaire :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})}$$

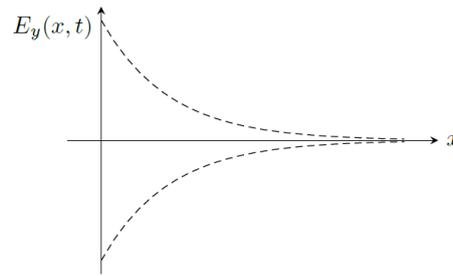
Si $\underline{A}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe \oplus est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-i)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

Allure qualitative :



Relation de structure sous forme complexe à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \frac{(1-j)}{\delta \omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 \cdot e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi - \frac{\pi}{4})$$

Densité de courant dans le conducteur :

D'après la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} = \underline{\gamma} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta})} \vec{e}_y = \underline{\gamma} \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

5- On a $k_r = -k_i = \frac{1}{\delta}$, et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ or par définition, la vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \delta \omega = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = f(\omega)$$

Milieu dispersif avec une vitesse de phase qui augmente avec ω , contrairement au cas des plasmas dilués.

Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk_r}$ or $k_r = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$ soit $k_r^2 = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}$ ou encore $\omega = \frac{2k_r^2}{\mu_0 \gamma_0}$ d'où

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{4k_r}{\mu_0 \gamma_0} = \frac{4}{\mu_0 \gamma_0} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = 2v_\varphi$$

Relation de dispersion dans un métal :

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

L'équation de dispersion est complexe, de solution générale de la forme $\underline{k} = k_r + ik_i$.

Sa partie réelle rend compte de la **propagation** et sa partie imaginaire de **l'absorption**.

Démarches classiques !!

On remplace i par $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

On remplace $-i$ par $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$

On remplace $e^{i\pi/4}$ par $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: $e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

En définissant la grandeur δ homogène à une longueur, et appelée **épaisseur de peau** :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

On a $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta}$, soit

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

C) Propagation avec effet de peau

1) Expression des champs

Pour une onde incidente de la forme $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$, on obtient des solutions de la forme, pour les milieux absorbants :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\substack{\text{att\u00e9nuation} \\ \text{par effet Joule}}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\substack{\text{terme de propagation}}} \vec{e}_y$$

L'onde n'est pas une onde progressive, car son amplitude diminue au cours de la propagation sur une distance caract\u00e9ristique δ . Elle est appel\u00e9e **onde plane pseudo-progressive harmonique**, par analogie avec les r\u00e9gimes pseudo-p\u00e9riodiques des oscillateurs.

Remarque : il s'agit l\u00e0 du cas le plus fr\u00e9quent d'un milieu absorbant ; il existe des milieux actifs amplificateurs comme les cavit\u00e9s laser qui vont pr\u00e9senter un terme d'amplification \u00e0 la place du terme d'att\u00e9nuation :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{+x/\delta}}_{\substack{\text{amplification} \\ \text{par un milieu actif}}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\substack{\text{terme de propagation}}} \vec{e}_y$$

■ Epaisseur de peau

Elle correspond \u00e0 la longueur

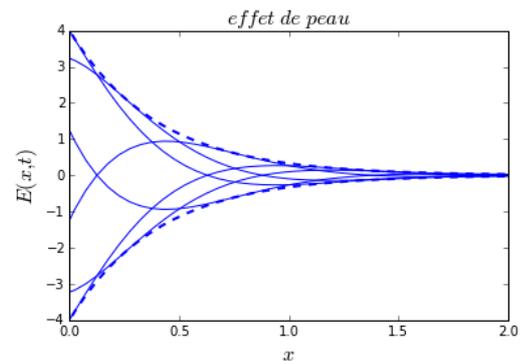
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

est la **longueur caract\u00e9ristique d'amortissement** d'une pseudo-OPPH au sein du conducteur : pour $x \gg \delta$ l'onde est totalement absorb\u00e9e et le champ est quasiment nul.

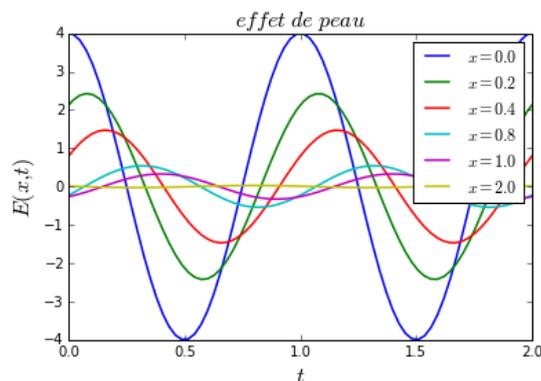
L'\u00e9paisseur de peau est **d'autant plus faible que les fr\u00e9quences sont \u00e9lev\u00e9es** et que les conducteurs sont de **bons conducteurs** avec une conductivit\u00e9 \u00e9lev\u00e9e.

Remarque : Attention !! il ne s'agit pas d'une onde \u00e9vanescence ! si on retrouve la notion d'\u00e9paisseur de peau, elle n'a pas le caract\u00e8re stationnaire de l'onde \u00e9vanescence et pr\u00e9sente un terme de propagation (forme d'onde progressive).

La composante du champ \u00e9lectrique \u00e9volue spatialement dans le m\u00e9tal entre les deux exponentielles $\pm E(x=0, t) e^{-x/\delta}$ en pointill\u00e9s sur le graphe ci-dessous.



Illustrons graphiquement les effets de retard temporel en diff\u00e9rents points au cours du temps



2) Caractère dispersif du milieu

■ Vitesse de groupe et vitesse de phase

On a $k_r = -k_i = \frac{1}{\delta'}$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$.

Vitesse de phase v_φ : par définition

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = f(\omega)$$

Milieu dispersif avec une vitesse de phase : un paquet d'onde se propageant à travers un conducteur ohmique est déformé. Par ailleurs, la vitesse de phase augmente avec ω , contrairement au cas des plasmas dilués.

Remarque : seule la partie réelle de \underline{k} intervient, la partie imaginaire correspondant au terme d'atténuation et ne jouant donc pas de rôle dans la propagation et en particulier sa vitesse.

Vitesse de groupe v_g :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = 2v_\varphi$$

■ Indice complexe d'un milieu

Pour un milieu absorbant vérifiant une relation de dispersion donnée pour les OemPPH, par définition, l'indice \underline{n} du milieu est :

$$\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega) k_{vide} = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad \underline{n}(\omega) = n_r(\omega) - i n_i(\omega)$$

$n_r(\omega)$ indice de réfraction et $n_i(\omega)$ indice d'absorption.

$$n_r(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)}$$

Il s'agit de comparer le comportement de l'onde dans un milieu d'indice \underline{n} à celui de l'onde dans le vide.

La propagation est liée à la partie réelle et l'absorption à la partie imaginaire ; ainsi, $n_r(\omega)$ représente l'indice de réfraction et $n_i(\omega)$ l'indice d'absorption, avec

$$k_r(\omega) = n_r(\omega) \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_i(\omega) = n_i(\omega) \frac{\omega}{c}$$

■ Indice optique d'un milieu ohmique en régime lentement variable

$$n_r(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}} = \sqrt{\frac{c^2 \mu_0 \gamma_0}{2\omega}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\omega \varepsilon_0}}$$

On retrouve qu'il s'agit là d'un milieu dispersif.

3) Généralisation de l'effet de peau

Lorsqu'une onde électromagnétique incidente arrive sur un conducteur ohmique, nous avons montré que les champs et donc les courants électriques sont non nuls uniquement sur une fine couche de l'ordre de δ , l'épaisseur de peau, située à la surface du conducteur.

Ce résultat, établi pour une onde électromagnétique, est bien plus général et se retrouve dès qu'un courant variable parcourt le conducteur.

Lorsqu'un conducteur ohmique est parcouru par un courant alternatif, celui-ci est localisé uniquement à la surface du conducteur, sur une épaisseur d'autant plus faible que la fréquence du courant est élevée.

■ **Ordre de grandeur de l'épaisseur de peau dans le cuivre**

| | | | | | |
|--------------|----------------------|--------------------------|--------------------------|----------------|-------------------------------|
| f (Hz) | $\rightarrow 0$ | 50 | 10^3 (1 kHz) | 10^6 (1 MHz) | 10^9 (1 GHz) |
| δ (m) | $\rightarrow \infty$ | $9.10^{-3} \approx 1$ cm | $2.10^{-3} \approx 1$ mm | 6.10^{-5} | $2.10^{-6} \approx 1$ μ m |

On en conclut que les ondes électromagnétiques pénètrent peu dans les métaux, d'autant moins que le métal est conducteur et que la fréquence est élevée ($\lambda = 2\pi/k_r = 2\pi\delta$).

En revanche, aux fréquences du réseau électrique (50 Hz), les champs électriques et magnétiques sont présents sur l'ensemble du métal des fils électriques (qui dépasse rarement le cm), de manière quasi-uniforme.

Enfin, une onde de téléphonie mobile (GHz) est totalement absorbée par un feuillet de cuivre de quelques microns

Exemple d'application : Cage de Faraday : structure en métal (pleine ou simplement grillagée) qui arrête les ondes OEM et protège les systèmes délicats des perturbations extérieures, mais aussi des tentatives d'espionnage. Il s'agit parfois à l'inverse d'une cage de Faraday non voulue empêchant la transmission des ondes EM.

D) Interprétation énergétique

1) Puissance rayonnée

Exercice 5. Bilan énergétique

Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

- 1- Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé.
- 2- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu.
- 3- Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée.
- 4- Etablir l'expression de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée).
- 5- Déterminer l'énergie dissipée dans une tranche de surface S comprise entre x et $x + dx$. Commenter le résultat obtenu.

Exprimons le vecteur de Poynting dans le cas d'une onde polarisée selon \vec{e}_y , de la forme

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)} = \frac{(1-i)}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0} \vec{e}_y e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \wedge \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle$$

$$\begin{aligned} & \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle \\ &= \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Rightarrow \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$

A partir de la loi d'Ohm locale, on trouve que

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} = \underline{\gamma} E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y$$

Dans le cadre des régimes lentement variables : $\underline{\gamma} = \gamma_0$

$$\vec{j} = \gamma_0 E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y$$

Soit

$$\vec{j} = \gamma_0 E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Les deux vecteurs sont en phase et le vecteur densité de courant présente le même terme d'atténuation (effet de peau)

Puissance volumique cédée par l'onde à la matière (absorbée par le milieu) : $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$

dans un conducteur ohmique en régime lentement variable, avec la valeur de \vec{E} :

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma_0 E^2 = \gamma_0 \left[E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \right]^2$$

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 \langle E^2 \rangle.$$

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \rangle = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta}$$

Considérons une tranche d'épaisseur dx compris entre x et $x+dx$, de surface S , de volume $d\tau = S dx$

Puissance moyenne absorbée : $\delta \mathcal{P}_{abs} = \langle p_v \rangle d\tau = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle S dx = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} S dx = \delta \mathcal{P}_{Joule}$

Cette puissance a été cédée par l'onde : la puissance électromagnétique pénétrant dans le système est plus élevée que celle qui en sort, du fait du terme de décroissance.

Avec $\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$, terme de transfert (entrée en x - sortie en $x+dx$) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}_{transfert} &= S[\langle \Pi \rangle(x) - \langle \Pi \rangle(x+dx)] = -S \frac{\partial \langle \Pi \rangle(x)}{\partial x} dx = -S \left(-\frac{2}{\delta}\right) \langle \Pi \rangle(x) dx = S \frac{2}{\delta} \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2x/\delta} dx \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta^2} e^{-2x/\delta} \underbrace{S dx}_{d\tau} \stackrel{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}{=} \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} d\tau = \delta \mathcal{P}_{abs} \end{aligned}$$

En moyenne, l'intégralité de l'énergie cédée par l'onde est absorbée par le milieu et dissipée par effet Joule ; c'est là l'origine de la décroissance observée. On retrouve le bilan d'énergie en régime stationnaire.

Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

■ Expression du vecteur de Poynting moyen

A l'aide de la relation de structure issue de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

D'où

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Et on trouve alors

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$

Remarque : on peut également obtenir ce résultat à l'aide de la représentation complexe (obtention directe de la valeur moyenne, mais pas la valeur instantanée !!).

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

Le vecteur de Poynting représente la puissance rayonnée par le champ électromagnétique, et comporte un terme de décroissance dans l'espace : $e^{-2x/\delta}$.

L'onde transporte de moins en moins d'énergie au fur et à mesure de sa progression dans le métal ; la puissance magnétique transportée par l'onde s'atténue sur une distance $\delta/2$ et est nulle à l'infini, et négligeable au bout de quelques δ .

2) Energie dissipée par effet Joule

■ Densité de courant dans le conducteur ohmique

A partir de la loi d'Ohm locale, on trouve que

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma_0 E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

Le vecteur densité volumique de courant \vec{j} ne prend de valeurs appréciables que dans une couche d'épaisseur e de quelques fois l'épaisseur de peau δ à la surface du conducteur. Il s'agit là de l'une des manifestations de l'effet de peau. Lorsque l'épaisseur de peau est petite devant les autres dimensions caractéristiques du conducteur, le courant est modélisé par des courants surfaciques.

Dans le cas des régimes lentement variables, la conductivité étant réelle, \vec{j} et \vec{E} son en phase.

Exemple d'application : Utilisation de fil multibrin plutôt qu'un câble épais dont le cœur ne servirait à rien (haute fréquence ou câbles haute tension).

Le courant reste localisé sur une épaisseur caractéristique δ à proximité de la surface (effet de peau), il est inutile d'utiliser des fils de trop grande épaisseur.

■ Puissance volumique cédée par le champ EM à la matière

En exploitant la valeur de \vec{E} trouvée précédemment :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2\frac{x}{\delta}} > 0$$

Cette puissance volumique absorbée par le milieu et donc cédée par l'onde électromagnétique à la matière est ensuite dissipée par effet Joule. Elle explique la diminution d'énergie de l'onde lors de sa propagation (et donc l'effet de peau), ce qui peut être vérifié.

■ Bilan d'énergie sur une tranche de surface S comprise entre x et $x + dx$

Puissance moyenne absorbée : $\delta \mathcal{P}_{abs} = \langle p_v \rangle d\tau = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle S dx = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2\frac{x}{\delta}} S dx = \delta \mathcal{P}_{Joule}$

Cette puissance a été cédée par l'onde.

Le fait que $\langle \vec{\Pi} \rangle$ décroisse exponentiellement avec x nous indique en effet que l'énergie « pénétrant » à l'abscisse x est plus importante que l'énergie « sortant » à l'abscisse $x + dx$, tandis que l'énergie moyenne du champ électromagnétique est constante entre x et $x + dx$.

Expression du terme de transfert (Entrées – sorties) :

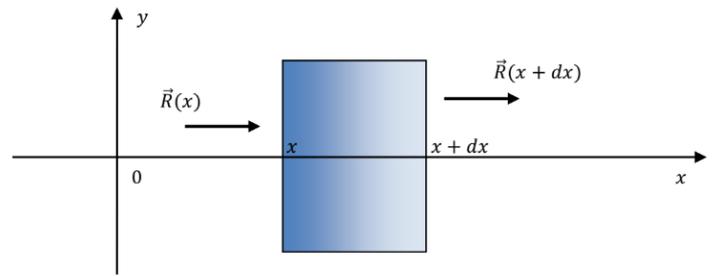
$$\text{Avec } \langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$

Terme de transfert (entrée en x – sortie en $x + dx$) :

$$\delta\mathcal{P}_{\text{transfert}} = S[\langle \Pi \rangle(x) - \langle \Pi \rangle(x + dx)] = -S \frac{\partial \langle \Pi \rangle(x)}{\partial x} dx = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta^2} e^{-2x/\delta} \underbrace{S dx}_{\substack{= \\ \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}} = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} d\tau$$

$$S[\langle \Pi \rangle(x) - \langle \Pi \rangle(x + dx)] = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle S dx$$

$$\delta\mathcal{P}_{\text{transfert}} = \delta\mathcal{P}_{\text{abs}}$$



La décroissance exponentielle de l'amplitude du champ électromagnétique au fur et à mesure de sa progression dans le métal s'explique donc par le transfert d'énergie de l'onde à la matière puis à sa conversion d'énergie électromagnétique en énergie thermique ; c'est l'**effet Joule**.

III) ONDES THERMIQUES

A) Situation modèle

On part ici d'un exemple pratique pour dégager une idée plus générale. Supposons que nous voulions connaître les répercussions dans un matériau donné (le sol par exemple) des fluctuations de température atmosphérique.

■ Exemples :

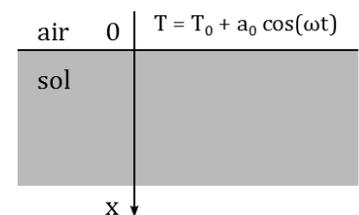
- À quelle profondeur doit-on creuser la cave pour que le vin se conserve correctement ?
- À quelle profondeur faut-il enterrer les canalisations d'eau pour que l'eau ne gèle pas la nuit ?

Partons alors du modèle simple suivant : l'espace est divisé en deux par un plan infini, à l'abscisse $x = 0$.

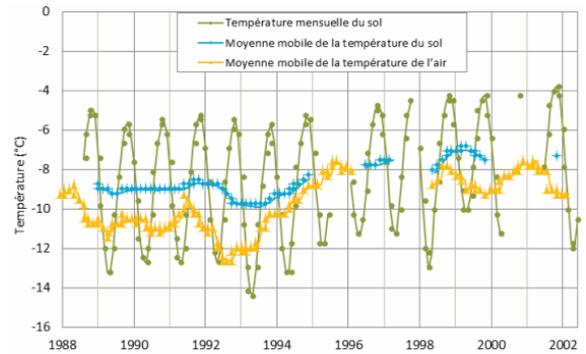
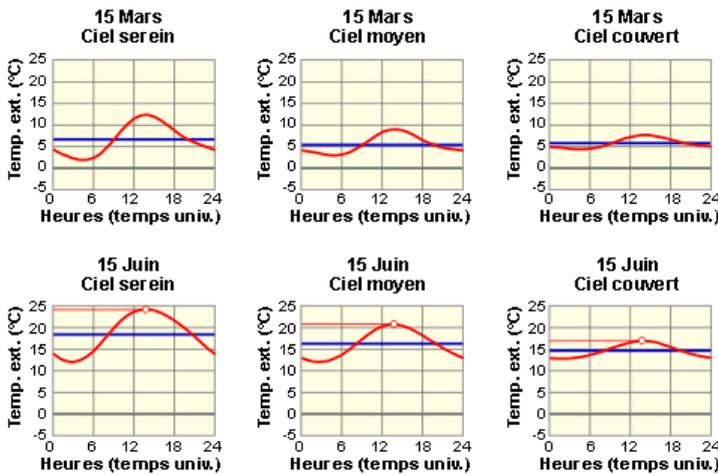
L'atmosphère occupe tout le demi-espace $x < 0$ et le sol, supposé homogène, tout le demi-espace $x > 0$. On bâtit ainsi un **problème unidimensionnel**.

Les fluctuations de températures dans l'atmosphère sont elles-mêmes modélisées suivant une loi sinusoïdale de la forme :

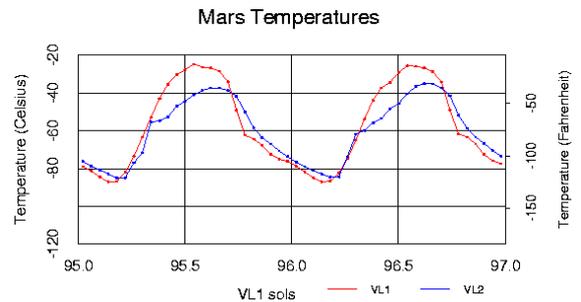
$$T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$



Ce type d'évolution modélise assez bien les variations journalière (jour-nuit) ou annuelle de la température à la surface du sol. La température « oscille » donc entre une température maximale $T_0 + a_0$ et une température minimale $T_0 - a_0$, avec une période qui peut être la journée ou l'année, T_0 étant alors la température moyenne sur la journée ou l'année,



Évolution annuelle de la température, dans le nord canadien.



Évolution journalière de la température à Louvain (Belgique) ci-dessous et sur Mars ci-contre

On note

- λ la conductivité thermique du sol
- ρ la masse volumique du sol
- c la capacité thermique massique du sol
- D la diffusivité thermique du sol $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

On s'intéresse à la réponse à la profondeur x , à une date t : $T(x, t)$ avec x positif.

B) Evolution de la température dans le sol

1) Mise en équation

Pour $x \geq 0$, $T(x, t)$ vérifie l'équation de diffusion thermique (EDT) en l'absence de source interne :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$$

La linéarité de cette équation nous amène à estimer qu'après un régime transitoire, la température dans le sol variera selon un régime de type sinusoïdal forcé, la température sinusoïdale de l'atmosphère jouant le rôle d'excitation sinusoïdale.

Selon les résultats vus en mécanique, la température du sol en régime sinusoïdal forcé variera avec une période temporelle égale à la période de variation de la température dans l'air, donc avec la pulsation ω .

On cherche alors une solution pour $T(x \geq, t)$ de la forme :

$$T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$$

Avec $\varphi(x)$ déphasage de la température à la profondeur x par rapport à la température en surface.

Le terme $T(x, t) - T_0 = \theta(x, t) = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ correspond alors à la fluctuation de la température autour de la température moyenne T_0 .

Cette température doit par ailleurs satisfaire à deux conditions aux limites :

en $x = 0$: continuité de la température à l'interface sol-air :

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t) \quad \mathbf{CL(0)}$$

en $x \rightarrow +\infty$: les variations temporelles de températures ne sont plus sensibles, la température est constante, égale à la température moyenne T_0 :

$$(T(+\infty, t))_{sol} = T_0 \quad \mathbf{CL}(\infty)$$

2) Recherche de la solution $T(x, t)$

Exercice 6. Onde thermique

On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$.

On note λ la conductivité thermique du sol, ρ sa masse volumique, c sa capacité thermique massique et D sa diffusivité thermique telle que $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$, à une date t , sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$.

- 1- Etablir l'expression de la grandeur complexe associée $\underline{\theta}(x, t)$ ainsi que l'équation vérifiée par $\underline{a}(x)$ en exploitant l'équation de la diffusion thermique.
- 2- Résoudre cette équation, et établir l'expression de $T(x, t)$.

La dépendance sinusoïdale temporelle nous amène à travailler en représentation complexe pour résoudre l'équation de la diffusion.

A $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, qui par linéarité vérifie également l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = a(x) \exp(i\omega t) \exp(i\varphi(x))$$

Soit en introduisant l'amplitude complexe : $\underline{\theta}(x, t) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$

où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} \exp(i\omega t) = 0$$

et, en simplifiant le terme oscillant (non nul), on obtient finalement

$$i\omega \underline{a}(x) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} = 0$$

Ou, sous forme plus habituelle,

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation différentielle d'ordre 2 en $\underline{a}(x)$, linéaire, à coefficients constants, sans second membre, les coefficients étant cependant complexes.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D}$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Démarche classique !! On pose δ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

c'est-à-dire $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

$$[r] = \left[\sqrt{\frac{\omega}{D}} \right] = L^{-1} \quad [\delta] = L$$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta}x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i\frac{x}{\delta}\right)$$

Le premier terme donne une amplitude qui décroît quand on descend dans le sol, c'est cohérent avec la seconde condition aux limites donnée.

Le second terme est quant à lui à exclure, l'amplitude augmenterait avec x : \underline{B} est nécessairement nul. **CL(∞)**

On retient donc une solution :

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right)$$

Ce qui donne, pour la température en fonction de x et t :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) \exp(i\omega t)$$

On peut encore écrire

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température **CL(0)**

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{T}(0, t) - T_0 = a_0 \exp(i\omega t)$$

Or

$$\underline{T}(0, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{0}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{0}{\delta}\right)\right) = T_0 + \underline{A} \exp(i\omega t)$$

d'où

$$\underline{A} \exp(i\omega t) = a_0 \exp(i\omega t)$$

$$\underline{A} = a_0$$

On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

La dépendance sinusoïdale temporelle nous amène à travailler en représentation complexe pour résoudre l'équation de la diffusion.

A $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, qui par linéarité vérifie également l'équation de la diffusion thermique. On a alors :

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x)))$$

Soit en introduisant l'amplitude complexe :

$$\underline{\theta} = \underline{a}(x) \exp(i\omega t) \quad \text{où} \quad \underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$$

En exploitant l'équation de diffusion $(\frac{\partial \theta}{\partial t})_x - D (\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2})_t = 0$:

$$i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} \exp(i\omega t) = 0$$

soit

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation différentielle d'ordre 2 en $\underline{a}(x)$, linéaire, à coefficients constants, sans second membre, les coefficients étant cependant complexes.

$$\text{Équation caractéristique : } r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0 \quad \text{soit} \quad r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{On définit } \delta \text{ tel que } r = \pm \frac{1+i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta} x\right) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i \frac{x}{\delta}\right)$$

Le second terme \underline{B} est nécessairement nul pour ne pas avoir de solution divergente.

$$\text{On retient donc une solution : } \underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\text{Soit } \underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température

CL(0)

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{T}(0, t) - T_0 = a_0 \exp(i \omega t) = \underline{A} \exp(i \omega t)$$

Solution physiquement acceptable de l'équation de propagation de la forme :

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

Il s'agit d'un **effet de peau** de la même forme que dans un conducteur ohmique parcouru par un courant alternatif, ce qui était attendu, les équations de diffusion étant similaires.

3) Interprétation : évolution de la fluctuation de température en fonction de la position et du temps

a) Termes de propagation et d'amortissement, épaisseur de peau

⇒ Le terme $\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$ est un **terme de propagation**, on peut parler d'une « onde plane progressive de diffusion thermique » avec une longueur d'onde qui serait $\lambda = 2\pi\delta$.

⇒ Le terme $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ est un **terme d'amortissement**, l'onde plane progressive est atténuée au cours de sa propagation.

La distance δ apparaît comme une distance caractéristique de l'atténuation : elle donne un ordre de grandeur de l'épaisseur du milieu dans laquelle la température fluctue de façon importante.

■ Epaisseur de peau thermique

L'épaisseur de peau thermique δ est la distance caractéristique de l'atténuation de l'onde thermique, soit la distance caractéristique sur laquelle la température fluctue de façon importante.

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \quad \text{telle que} \quad T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

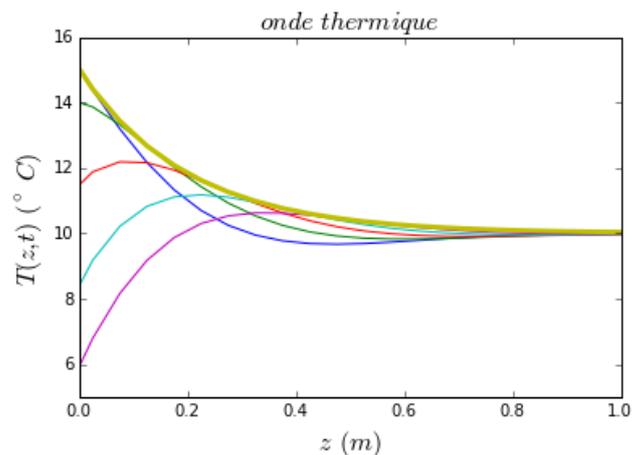
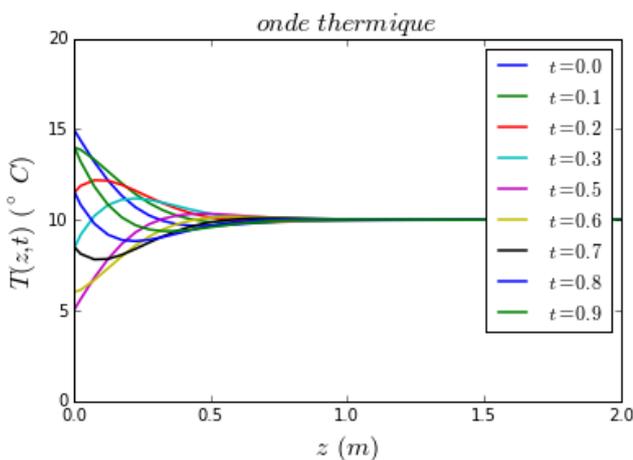
■ Remarques

- La profondeur caractéristique δ montre que l'hypothèse d'une profondeur infinie peut être remplacée par celle d'une profondeur finie, grande devant δ , mais suffisamment faible pour que des phénomènes supplémentaires de réchauffement n'interviennent pas ...
- δ diminue si ω augmente :

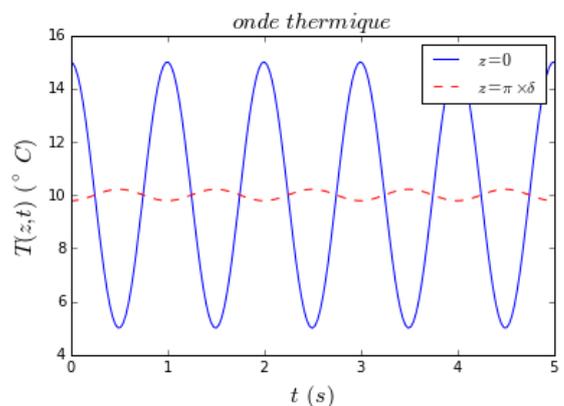
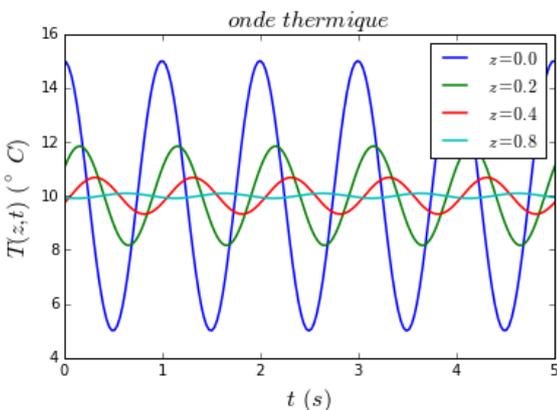
Plus les variations de températures sont rapides, moins elles se propagent loin.

- δ est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi\delta$, l'onde est donc très vite atténuée.

Représentation de $T(z, t)$ à différents instants en fonction des points de l'espace



Représentation de $T(z, t)$ en différents points du milieu au cours du temps



On constate que l'amplitude de température décroît au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le matériau (le flux thermique s'épuise puisque le matériau absorbe une partie de ce flux) et que son évolution se déphase par rapport à l'évolution en surface et qu'à la cote $\pi\delta$, la variation temporelle de température est exactement en opposition de phase avec celle en surface.

Ordres de grandeur de l'épaisseur de peau thermique δ :

| Matériau | $c(J.K^{-1}.kg^{-1})$ | $\mu(kg.m^{-3})$ | $\lambda(W.K^{-1}.m^{-1})$ | T | $\delta(m)$ |
|----------|-----------------------|---------------------|----------------------------|-----------|-------------|
| Terre | 9.10 ² | 2.10 ³ | 0,8 | 24 h | 0,11 |
| | | | | 365 jours | 2,1 |
| Cuivre | 3,85.10 ² | 8,9.10 ³ | 390 | 1 h | 0,36 |

Une cave profondément enterrée reste insensible à l’alternance diurne de température, et est peu sensible à l’alternance annuelle. Sa température reste à peu près constante, ce qui en fait une pièce « thermostatée ».

■ Temps et longueur caractéristiques

On a défini $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$; si ω est la pulsation des variations de température, le temps caractéristique est la période $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ (notée ainsi car T est la température). Soit

$$\delta = \sqrt{\frac{2D\tau}{2\pi}} = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}$$

On trouve une longueur caractéristique de diffusion **de l'ordre de $\sqrt{D\tau}$** , ce qui est en accord avec ce qui a été vu précédemment.

b) Compléments sur l'onde de température

L'étude de l'évolution de la température dans le matériau a montré qu'elle évoluait comme une onde plane harmonique progressive, dont l'amplitude décroît au fur et à mesure que l'onde s'éloigne de la surface (qu'elle pénètre dans le matériau étudié). L'amplitude de l'onde décroît de façon exponentielle, proportionnellement au terme $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, en raison de l'absorption d'une partie de l'énergie thermique par le matériau, ce qui est pris en compte par le biais de sa capacité thermique.

La représentation complexe de la fluctuation de température :

$$\underline{\theta}(x, t) = a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

peut également s'écrire :

$$\underline{\theta}(x, t) = a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) \exp(i\omega t) = a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}(1+i)\right) \exp(i\omega t) = a_0 \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\left(\frac{1}{i}+1\right)\right) \exp(i\omega t)$$

$$\underline{\theta}(x, t) = a_0 \exp\left(-i\frac{x}{\delta}(-i+1)\right) \exp(i\omega t) = a_0 \exp\left(i\left[\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right]\right)$$

$$\underline{\theta}(x, t) = a_0 \exp\left(i(\omega t - \underline{k}x)\right)$$

avec $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$, vecteur d'onde complexe de l'onde.

En l'écrivant sous la forme $\underline{k} = k_r + ik_i$ de façon à faire apparaître sa partie réelle et sa partie imaginaire, on retrouve les résultats généraux établis pour les ondes OEM.

- Forme générale de la grandeur complexe d'une onde plane harmonique :

$$\underline{g}(x, t) = g_0 \exp\left(i(\omega t - \underline{k}x)\right), \text{ avec } \underline{k} = k_r + ik_i$$

- Onde absorbée dans l'espace $\Leftrightarrow \underline{k} = k_r + ik_i \in \mathbb{C}$ avec $k_i < 0$
- Distance caractéristique d'absorption $\delta = \frac{1}{|k_i|}$

■ Vitesse de phase v_φ de l'onde thermique (vitesse de propagation de la phase de l'onde)

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega\delta = \sqrt{2D_{th}\omega}$$

Milieu **dispersif** pour les ondes thermiques, avec le même type d'expression que dans un milieu conducteur.