

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Conductivité complexe

1. PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

en notation complexe

$$i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m}$$

Expression de la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{im\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1 + i\omega\tau}$$

Expression du vecteur $\underline{\vec{j}}$:

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{\frac{1 + i\omega\tau}{\gamma(\omega)}} \vec{E} \equiv \frac{\gamma(\omega)}{\text{loi d'Ohm locale}} \vec{E}$$

Conductivité complexe $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{1 + i\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1 + i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1 + i\omega\tau}$$

On a donc $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

2. soit $\tau = \frac{m\gamma_0}{n_e e^2} \sim 10^{-13}$ s. ($\tau \approx 10^{-14}$ s pour le cuivre).

3. pour $\omega\tau \ll 1$: $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \approx \gamma_0$ et pour $\omega\tau \gg 1$; $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \approx \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} = -i \frac{\gamma_0}{\omega\tau}$

En posant $\frac{\gamma_0}{\tau} = \varepsilon_0 \omega_p^2$ soit $\omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \tau}} = \sqrt{\frac{n_e e^2 \tau}{m \varepsilon_0 \tau}} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \varepsilon_0}}$

$$\underline{\gamma} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

Remarque : on retrouve alors l'expression de la pulsation plasma et de la conductivité dans un plasma !

Exercice 2. Electroneutralité d'un conducteur ohmique en régime lentement variable

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. Or avec $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, on en déduit, d'après l'équation de Maxwell Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

En intégrant :

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau'}$$

Avec $\tau' = \varepsilon_0 / \gamma_0 \sim 10^{-18}$ s nommé **temps caractéristique de Maxwell**.

Aux fréquences $f \ll 1/\tau$ auxquelles on travaille, on a toujours $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la **relaxation de la densité volumique** de charge dans le conducteur est toujours **infinitement plus rapide** que la variation qui pourrait être imposée par la variation temporelle du champ source.

À ces « basses fréquences » ($f \ll 1/\tau$), les électrons ne peuvent pas se concentrer localement pour former des amas chargés dans la masse du métal car le phénomène de conduction les disperse quasi-instantanément vers les surfaces du matériau (ce phénomène explique que les métaux se chargent en surface, ce processus est l'analogie de la décharge d'un condensateur dans une résistance, de temps caractéristique RC analogue à ϵ_0/γ_0)

Exercice 3. Equation de propagation des champs électrique et magnétique

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{M.G.}{=} - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{M.F.}{=} \overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \stackrel{M.A.}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Le champ magnétique vérifie la même équation de propagation

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Exercice 4. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique en régime lentement variable

Polarisation rectiligne selon (Oy), propagation selon (Ox) dans le sens direct

La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \vec{E}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Cherchons la solution exacte du vecteur d'onde \underline{k} sous la forme générale $\underline{k} = k_r + k_i$ en commençant par rechercher k_r et k_i .

Méthode 1 de résolution :

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

Soit

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Méthode 2 de résolution

$$\underline{k}^2 = (k_r + ik_i)^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$$

$$k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i = -i\mu_0\gamma_0\omega$$

On en déduit $|k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0\gamma_0\omega$ soit en notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$,

$$|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On recherche le champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, la forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation est a priori une combinaison linéaire :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta}x)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})}$$

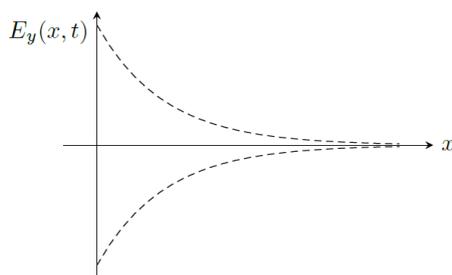
Si $\underline{A}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe \oplus est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-j)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x)} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

Allure qualitative :



Relation de structure sous forme complexe à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} = \frac{(1-j)}{\delta\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 \cdot e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi - \frac{\pi}{4})$$

Densité de courant dans le conducteur :

D'après la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} = \underline{\gamma} \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x)} \vec{e}_y = \underline{\gamma} \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

On a $k_r = -k_i = \frac{1}{\delta'}$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ or par définition, la vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \delta \omega = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \omega$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = f(\omega)$$

Milieu dispersif avec une vitesse de phase qui augmente avec ω , contrairement au cas des plasmas dilués.

Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk_r}$ or $k_r = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$ soit $k_r^2 = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}$ ou encore $\omega = \frac{2k_r^2}{\mu_0 \gamma_0}$ d'où

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{4k_r}{\mu_0 \gamma_0} = \frac{4}{\mu_0 \gamma_0} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = 2v_\varphi$$

Exercice 5. Bilan énergétique de la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal

Exprimons le vecteur de Poynting dans le cas d'une onde polarisée selon \vec{e}_y , de la forme

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)} = \frac{(1-i)}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0} \vec{e}_y e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \wedge \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle$$

$$\langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle$$

$$= \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \rangle + \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$

A partir de la loi d'Ohm locale, on trouve que

$$\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} = \underline{\gamma} E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

Dans le cadre des régimes lentement variables : $\underline{\gamma} = \gamma_0$

$$\vec{j} = \gamma_0 E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

Soit

$$\vec{j} = \gamma_0 E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Les deux vecteurs sont en phase et le vecteur densité de courant présente le même terme d'atténuation (effet de peau)

Puissance volumique cédée par l'onde à la matière (absorbée par le milieu) : $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$

dans un conducteur ohmique en régime lentement variable, avec la valeur de \vec{E} :

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma_0 E^2 = \gamma_0 \left[E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \right]^2$$

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 \langle E^2 \rangle.$$

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \rangle = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta}$$

Considérons une tranche d'épaisseur dx compris entre x et $x+dx$, de surface S , de volume $d\tau = Sdx$

$$\text{Puissance moyenne absorbée : } \delta \mathcal{P}_{abs} = \langle p_v \rangle d\tau = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle S dx = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} S dx = \delta \mathcal{P}_{Joule}$$

Cette puissance a été cédée par l'onde : la puissance électromagnétique pénétrant dans le système est plus élevée que celle qui en sort, du fait du terme de décroissance.

Avec $\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$, terme de transfert (entrée en x – sortie en $x+dx$) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}_{transfert} &= S[\langle \Pi \rangle(x) - \langle \Pi \rangle(x+dx)] = -S \frac{\partial \langle \Pi \rangle(x)}{\partial x} dx = -S \left(-\frac{2}{\delta}\right) \langle \Pi \rangle(x) dx = S \frac{2}{\delta} \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2x/\delta} dx \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta^2} e^{-2x/\delta} \underbrace{S dx}_{d\tau} \underset{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}{=} \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} d\tau = \delta \mathcal{P}_{abs} \end{aligned}$$

En moyenne, l'intégralité de l'énergie cédée par l'onde est absorbée par le milieu et dissipée par effet Joule ; c'est là l'origine de la décroissance observée. On retrouve le bilan d'énergie en régime stationnaire.

Exercice 6. Onde thermique

La dépendance sinusoïdale temporelle nous amène à travailler en représentation complexe pour résoudre l'équation de la diffusion.

A $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, qui par linéarité vérifie également l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = a(x) \exp(i\omega t) \exp(i\varphi(x))$$

Soit en introduisant l'amplitude complexe : $\underline{\theta}(x, t) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$

où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} \exp(i\omega t) = 0$$

et, en simplifiant le terme oscillant (non nul), on obtient finalement

$$i\omega \underline{a}(x) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} = 0$$

Ou, sous forme plus habituelle,

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation différentielle d'ordre 2 en $\underline{a}(x)$, linéaire, à coefficients constants, sans second membre, les coefficients étant cependant complexes.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D}$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Démarche classique !! On pose δ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

c'est-à-dire $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

$[r] = \left[\sqrt{\frac{\omega}{D}}\right] = L^{-1}$ $[\delta] = L$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta}x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i\frac{x}{\delta}\right)$$

Le premier terme donne une amplitude qui décroît quand on descend dans le sol, c'est cohérent avec la seconde condition aux limites donnée.

Le second terme est quant à lui à exclure, l'amplitude augmenterait avec x : \underline{B} est nécessairement nul. CL(∞)

On retient donc une solution :

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right)$$

Ce qui donne, pour la température en fonction de x et t :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) \exp(i\omega t)$$

On peut encore écrire

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température CL(0)

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{T}(0, t) - T_0 = a_0 \exp(i\omega t)$$

Or

$$\underline{T}(0, t) = T_0 + \underline{A} \exp\left(-\frac{0}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{0}{\delta}\right)\right) = T_0 + \underline{A} \exp(i\omega t)$$

d'où

$$\underline{A} \exp(i\omega t) = a_0 \exp(i\omega t)$$

$$\underline{A} = a_0$$

On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \text{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

Exercice 7. Epaisseur de peau thermique 2 | ✖ 2

$$\delta = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-7} \times 86400}{\pi}} = 0,134 \text{ m}$$

$\theta_0 = 7,5^\circ\text{C}$ Attention, vocabulaire scientifique / vocabulaire habituel

$$7,5 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 1^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad x = \delta \ln(7,5) = 27 \text{ cm}$$

Il suffit de descendre à une profondeur de 27 cm pour que l'amplitude ne soit plus que de 1°C : le sol n'est plus gelé à cette profondeur (cf. plantations ; canalisations d'eau enterrées à une profondeur de l'ordre de 1 m, en général, etc.).

Pour une amplitude de **variation annuelle de température** de 40°C autour de 10°C , on trouve $\delta = 2,55 \text{ m}$ et il faut descendre à une profondeur de 7,4 m pour avoir une température annuelle invariable, à 1°C près (cf. caves).

$$\delta = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-7} \times 365 \times 86400}{\pi}} = 2,45 \text{ m}$$

$$\theta_0 = 20^\circ\text{C} \quad ; \quad 20 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 1^\circ\text{C} \Rightarrow x = \delta \ln(20) = 7,4 \text{ m}$$

EXERCICES INCONTOURNABLES

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques en régime lentement variable

Exercice 8. Blocage d'appel (oral banque PT) 1 | ✖ 2

1 - Ordre de grandeur de la fréquence d'une onde téléphonique : $f \sim 1 \text{ GHz}$; longueur d'onde : $\lambda = \frac{c}{f} \sim 10 \text{ cm}$

2 - On se place dans le cadre des régimes lentement variables :

Le métal est supposé électriquement neutre en tout point et en tout instant : $\forall t, \rho = 0$.

On est dans le cadre de l'ARQS magnétique, $\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} \gg 1$.

Equations de Maxwell simplifiées pour les conducteurs ohmiques en régime lentement variable

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E} \end{aligned}$$

Obtention de l'équation de propagation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.G.} \stackrel{M.F.}{=} -\overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{M.F.}{=} \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \stackrel{M.A.}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Le champ magnétique vérifie la même équation de propagation

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ces équations ne sont pas des équation de d'Alembert comme celle obtenue dans le vide :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

mais des **équations de diffusion** de la même forme que celle obtenue lors de l'étude de la diffusion thermique.

Il était prévisible que l'onde électromagnétique ne vérifie pas l'équation de d'Alembert. En effet, l'équation de d'Alembert décrit des phénomènes de propagation sans atténuation, tandis que dans un conducteur ohmique l'énergie de l'onde est progressivement absorbée et dissipée par effet Joule.

3 - La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \\ \vec{\Delta} \vec{E} &= \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \\ (-i\underline{k})^2 \vec{E} &= \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \vec{E} \end{aligned}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Cherchons la solution exacte du vecteur d'onde \underline{k} sous la forme générale $\underline{k} = k_r + ik_i$ en commençant par rechercher k_r et k_i .

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

1- On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

Soit

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

On recherche le champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, la forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation est a priori une combinaison linéaire :

$$\vec{E} = \vec{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} z\right)} \vec{e}_y + \vec{A}'_0 e^{i\left(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta} z\right)} \vec{e}_y = \vec{A}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \vec{e}_y + \vec{A}'_0 e^{+\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)}$$

Si $\vec{A}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe \oplus est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-i)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} z\right)} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$$

En passant en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-z/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos(\omega t - z/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}}$$

Ces solutions **ne sont pas** des OPPH car leur amplitude diminue au cours de la propagation : on parle plutôt de pseudo-OPPH.

- 2- La longueur caractéristique sur laquelle le champ électrique s'atténue est δ dans l'exponentielle décroissante caractérisant l'atténuation. Pour un métal, $\gamma \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, d'où $\delta \sim 2.10^{-6} \text{ m}$.

Ainsi, au-delà de quelques microns, ce qui est le cas de toute plaque ordinaire, l'onde électromagnétique est **complètement absorbée par le métal**. Cela justifie l'hypothèse de plaque infinie : dès que son épaisseur $e \gg \delta$ soit pour $e > 50 \mu\text{m}$ par exemple, qu'elle soit de quelques millimètres, centimètres ou kilomètres, il n'y a aucune onde transmise au travers de la plaque. Le second téléphone ne reçoit donc plus l'appel.

Exercice 9. **Transparence ultra-violette des métaux (d'après Banque PT)**

1. PFD à un électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m_e \vec{a} = q\vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m_e} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m_e}$$

en notation complexe

$$i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m_e}$$

Expression de la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{im_e\omega + m_e/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m_e}\vec{E}}{1 + i\omega\tau}$$

Expression du vecteur $\underline{\vec{j}}$:

$$\underline{\vec{j}} = Nq\underline{\vec{v}} = -Ne\underline{\vec{v}} = \frac{N \frac{e^2\tau}{m_e}}{1 + i\omega\tau} \vec{E} \stackrel{\substack{\text{loi d'Ohm} \\ \text{locale}}}{\equiv}}{\underline{\gamma}(\omega)} \vec{E}$$

Conductivité complexe $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où $\gamma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_e} = \gamma(\omega = 0) = \gamma(\text{régime continu})$

- 2 - Equation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

En notation complexe : $i\omega \underline{\rho} + \text{div } \underline{\vec{j}} = 0$

Loi d'Ohm locale :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad i\omega \underline{\rho} + \text{div } \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{ou} \quad i\omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \text{div } \underline{\vec{E}} = 0$$

Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\rho}}{\epsilon_0}$ soit dans l'équation de conservation de la charge :

$$i\omega \underline{\rho} + \frac{\underline{\gamma}}{\epsilon_0} \underline{\rho} = 0 \quad \text{soit} \quad \left(i\omega + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \right) \underline{\rho} = 0$$

Comme la partie réelle de γ est non nulle, le terme entre parenthèses ne peut pas s'annuler. L'équation de conservation de la charge impose donc forcément $\underline{\rho} = 0$, c'est-à-dire que la densité volumique de charge reste nulle à haute fréquence.

- 3 - Avec la convention donnée par l'énoncé : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$: $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow (\times i\omega)$ et $\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{E}$

équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque :

Maxwell-Gauss : $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

Maxwell-Faraday : $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$

Maxwell-Flux : $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère : $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E} = \mu_0\gamma\vec{E} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}$

Effectuons le produit vectoriel de l'équation de Maxwell-Faraday par $i\vec{k}$:

$$i\vec{k} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) = i\vec{k} \wedge (-i\omega\vec{B}) \Leftrightarrow \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k} \wedge (\omega\vec{B})$$

Avec la formule du double produit vectoriel :

On a pour tous vecteurs \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ soit ici :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} \stackrel{\text{onde transverse}}{=} -(\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

Dans l'équation issue de Maxwell-Faraday :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \omega\vec{k} \wedge \vec{B} = -k^2\vec{E} \quad \text{soit} \quad -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{ik^2}{\omega}\vec{E}$$

Dans Maxwell-Ampère :

$$-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E} = (\mu_0\gamma + i\omega\varepsilon_0\mu_0)\vec{E} = \frac{ik^2}{\omega}\vec{E}$$

Le champ \vec{E} étant non nul, on a donc :

$$\mu_0\gamma + i\omega\varepsilon_0\mu_0 = i\frac{k^2}{\omega} \stackrel{\mu_0\varepsilon_0c^2=1}{=} \mu_0\gamma + \frac{i\omega}{c^2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\mu_0\omega\gamma}{i} = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\gamma$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\gamma$$

4- Avec $\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\gamma = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\omega\tau} = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0\gamma_0\omega(1-i\omega\tau)}{1+(\omega\tau)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0\omega(i+\omega\tau)}{1+(\omega\tau)^2}$$

Pour que l'onde soit transmise sans absorption, il faut que k^2 soit réel positif ; il faut donc que :

- la partie imaginaire soit négligeable : $i + \omega\tau \approx \omega\tau$ pour $\omega\tau \gg 1$ soit $\omega \gg \frac{1}{\tau} = 10^{14}$ rad/s (hautes fréquences)
- la partie réelle soit positive, soit

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \approx \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0\omega^2\tau}{(\omega\tau)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0}{\tau} > 0$$

$$\omega^2 > \frac{\mu_0c^2\gamma_0}{\tau} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau} \quad \omega > \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} = 2 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

C'est la seconde condition qui est la plus contraignante ; on a alors, puisque $k = k_r > 0$: $\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda c}$

$$\omega > \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} = 2 \cdot 10^{16} \text{ rad/s} \text{ correspondant à } \lambda < 80 \text{ nm}$$

C'est dans le domaine des UV lointains que le métal devient transparent, avec une propagation sans absorption.

Exercice 10. Propriétés optiques du métal or (Concours CCS MP 2021)

Exercice 11. Propagation dans un câble coaxial-équation du télégraphiste

- 1- Il s'agit de la **résistance** série : résistance équivalente longitudinale des conducteurs du câble rdx , et de la **conductance** latérale de fuite gdx (à travers l'isolant circule un courant de fuite $\delta i = gdxu$ sur une tranche d'épaisseur dx). En raison des pertes par effet Joule associées, on s'attend à une atténuation du signal donc une diminution de l'amplitude.

2- Loi des mailles et caractéristiques des dipôles : $u(x, t) = u(x + dx, t) + rdx i(x, t) + \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x} = ri(x, t) + \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

Loi des mailles :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} + gdx u(x + dx, t)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = gu(x, t) + \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(ri(x, t) + \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -r \frac{\partial i}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = rgu(x, t) + r\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = gu(x, t) + r\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(-gu(x, t) - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = gru + (g\Lambda + r\Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (g\Lambda + r\Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} + gru$$

Par identification avec $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial u}{\partial t} + Bu$, on en déduit

$$\boxed{v^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma}}$$

Il s'agit d'un terme similaire à celui qui serait obtenu dans un câble sans perte

$$\boxed{A = g\Lambda + r\Gamma \quad B = gr}$$

Il s'agit de termes associés aux résistances, donc aux pertes.

On cherche à mettre sous la forme canonique :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{termes de d'Alembert}} + \underbrace{\frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u}_{\text{termes de pertes}} = 0$$

En divisant par $-\Lambda \Gamma$:

$$-\frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{(g\Lambda + r\Gamma)}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{gr}{\Lambda \Gamma} u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(g\Lambda + r\Gamma)}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{gr}{\Lambda \Gamma} u = 0$$

A nouveau, par identification :

$$\boxed{c_0^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma} = v^2} \quad \boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{(g\Lambda + r\Gamma)}{\Lambda \Gamma} = \frac{g}{\Gamma} + \frac{r}{\Lambda}} \quad \omega_0^2 = \frac{gr}{\Lambda \Gamma}$$

3- En injectant $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ dans l'équation de propagation puis en simplifiant par \underline{u} , on obtient

$$-\omega^2 - c_0^2 (-j\underline{k})^2 + j\omega \frac{1}{\tau} + \omega_0^2 = 0$$

$$-\omega^2 + c_0^2 \underline{k}^2 + j\omega \frac{1}{\tau} + \omega_0^2 = 0$$

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2}}$$

Rappel général :

Pour un signal quelconque recherché sous la forme $\underline{\psi}(x, t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, en notant le vecteur d'onde complexe sous la forme $\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + jk_i(\omega)$, avec k_r et k_i des réels, on a

$$\underline{\psi}(x, t) = \underline{\psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = \psi_0 e^{j(\omega t - k_r x - j k_i x + \varphi_0)} = \psi_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x + \varphi_0)}$$

$$\psi(x, t) = \underbrace{\psi_0 e^{k_i x}}_{\text{terme d'amplitude}} \times \underbrace{\cos(\omega t - k_r x + \varphi_0)}_{\text{terme ondulatoire}}$$

C'est la partie imaginaire k_i qui intervient dans le terme d'amplitude.

Le terme d'amplitude $\psi_0 e^{k_i x}$ peut s'écrire en introduisant une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_i|} > 0$: $\psi_0 e^{k_i x} = \psi_0 e^{\pm x/\delta}$: atténuation ou amplification selon le signe de k_i

4- Si $\omega \gg \omega_0$ et $\tau \rightarrow \infty$: $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2} \approx \frac{\omega^2}{c_0^2}$

Ici, $k_i = 0$, pas d'atténuation. De plus, $k_r = \frac{\omega}{c_0}$ soit $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = c_0 = cte$: absence de dispersion

5- Si $\omega \gg \omega_0$ et $\omega\tau \gg 1$:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2} \approx \frac{\omega^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right)$$

On résout via un DL à l'ordre 1.

$$\underline{k} \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{j}{2\omega\tau}\right) = \frac{\omega}{c_0} - \frac{j}{2c_0\tau}$$

$k_r = \frac{\omega}{c_0}$ soit $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = c_0 = cte$: absence de dispersion

$$k_i < 0 \text{ donc } \delta = \frac{1}{|k_i|} \approx \frac{1}{\frac{1}{2c_0\tau}} = 2c_0\tau$$

Atténuation avec $\delta \approx 2c_0\tau$

6- Si $\omega > \omega_0$ et $\tau \rightarrow \infty$, $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2} \approx \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}$

Même relation de dispersion que dans le plasma pour $\omega > \omega_p$:

$$\underline{k}^2 \text{ réel positif } \in \mathbb{R}^+ \text{ (Relation de Klein Gordon)} \Rightarrow k = k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}} = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c_0} \in \mathbb{R}; \quad k_i = 0.$$

il n'y a pas atténuation mais $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} c_0 = f(\omega)$: il y a de la dispersion. On peut remarquer que $v_\varphi > c_0$

(mais vitesse de groupe $< c_0$).

7- Si $\omega < \omega_0$ et $\tau \rightarrow \infty$: $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow k = \pm j \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{c_0} \in j\mathbb{R}$

Il y a atténuation car $k_i \neq 0$

Il n'y a plus de propagation puisque $k_r = 0$. La partie ondulatoire se résume à une simple partie temporelle de la forme $\cos(\omega t + \varphi_0)$: onde de la forme

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

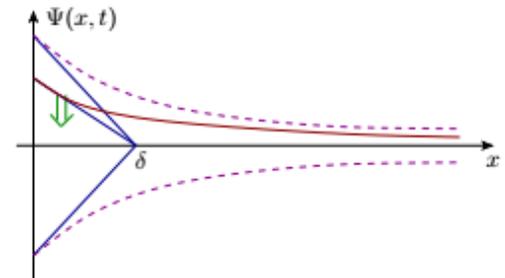
Cf cours plasma pour $\omega < \omega_p$: il s'agit d'une **onde évanescente**, pseudo-stationnaire car les dépendances temporelles et spatiales sont séparées mais d'amplitude décroissante dans l'espace

4- On a déjà montré

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (g\Lambda + r\Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} + gru$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (g\Lambda + r\Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - gru = 0$$



5- En injectant $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ dans cette équation de propagation puis en simplifiant par \underline{u} , on obtient

$$\underline{k}^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - j\omega(\Lambda g + r\Gamma) - rg = \Lambda \Gamma \omega^2 - rg - j\omega(\Lambda g + r\Gamma)$$

6- En introduisant les parties réelle et imaginaire : $\underline{k} = k' + jk''$ soit

$$\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k'' \stackrel{\substack{\text{relation} \\ \text{dispersion}}}{=} \Lambda \Gamma \omega^2 - rg - j\omega(\Lambda g + r\Gamma)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - rg \\ 2k'k'' = -(\Lambda g + r\Gamma) \end{cases}$$

5. Vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ indépendante de ω si $k' \propto \omega$ et distance d'amortissement $\delta = 1/|k''|$ indépendante de ω si k'' ne dépend pas de ω . $k'^2 - k''^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - rg$ impose que $|k''| = \sqrt{rg}$ et $|k'| = \sqrt{\Lambda \Gamma} \omega$. Une fois cela réinjecté dans la seconde relation $2k'k'' = -(\Lambda g + r\Gamma)$, cela impose $\Lambda g = r\Gamma$. Avec un tel choix, on s'affranchit de la dispersion et comme la décroissance d'amplitude ne dépend pas de la fréquence, les signaux, aussi complexes soient-ils, se propagent à l'identique de leur forme, simplement atténués en amplitude.

6. La forme du signal (donc son spectre) change au cours de la propagation, la condition précédente de non dispersion n'est donc pas respectée

7. Si la décroissance est exponentielle en $U(x) = f(t)e^{-x/\delta} = f(t)e^{k''x}$, on a $\ln(U) = \ln(f(t)) = -\frac{x}{\delta} = k''x$ soit en traçant $\ln(U)$ en fonction de x , obtention d'une décroissance affine de pente k'' . La modélisation est bien vérifiée et on en déduit $k'' = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ ($\delta = 400 \text{ m}$).

L'absorption du câble vaut $A = 20 \log(U(x + 1 \text{ km})/U(x)) = -22 \text{ dB/km}$

8. k' varie de manière non linéaire avec la pulsation, la vitesse de phase n'est pas constante et le milieu est dispersif : on a déformation du signal. On remarque sur les graphes de déformation du signal que les HF avancent plus vite que les BF, le front droit abrupt se trouve donc à l'avant. En revanche, comme k'' est non nulle pour les hautes fréquences et augmente également avec f , il y a atténuation, et ce d'autant plus qu'il s'agit de composantes de fréquence élevée. Il y a donc diminution de l'amplitude du signal, tandis que le front raide, constitué de fréquences élevées, finit par s'amortir et s'adoucir, d'où la forme plus douce observée au-delà de 200 m..

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 12. Grandeurs caractéristiques



a. $\tau = \frac{Lc^2}{D}$;

b. Acier : $D_{acier} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et bois : $D_{bois} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ donc $\frac{D_{acier}}{D_{bois}} \sim 60$ donc $\frac{\tau_{cbois}}{\tau_{cacier}} \sim 60$: les instruments utilisés pour retirer ou placer des objets dans un four sont donc en bois.

c. T_0 est la température au milieu de la tige ; θ_0 est l'écart entre la température à une extrémité et la température au milieu, en valeur positive ou négative selon l'extrémité considérée ; $[a] = T$.

d. $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{a} \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp\left(-\frac{t}{a}\right) = -D \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp\left(-\frac{t}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a} = D \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$

Soit $\frac{4L^2}{D\pi^2} = \frac{4}{\pi^2} \tau_c \sim 0,4 \tau_c$, on a précisé la relation obtenue à la première question.

Exercice 13. Propagation d'ondes acoustiques

9. On injecte une pseudo-OPPH $\underline{p}(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)}$ dans l'équation d'onde afin d'obtenir une relation entre \underline{k} et ω :

$$\frac{1}{c^2} (j\omega)^2 \underline{p} = (-jk)^2 \underline{p} + \frac{\eta}{\mu c^2} (j\omega) (-jk)^2 \underline{p}$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} = -\underline{k}^2 - \frac{\eta}{\mu c^2} j \omega \underline{k}^2$$

$$\omega^2 = \underline{k}^2 c^2 \left(1 + j \frac{\eta}{\mu c^2} \omega \right)$$

10. On en déduit

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\left(1 + j \frac{\eta}{\mu c^2} \omega \right)^{\frac{1}{2}}}$$

11. On effectue un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{\eta}{\mu c^2} \omega$

$$\underline{k} \cong \frac{\omega}{c} \cdot \left(1 - j \frac{\eta}{2\mu c^2} \omega \right) = \frac{\omega}{c} - j \frac{\eta}{2\mu c^3} \omega^2$$

$$k' = \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k'' = -\frac{\eta}{2\mu c^3} \omega^2$$

On en déduit

$$v_\phi = \frac{\omega}{|k'|} = c$$

12. On observe que v_ϕ ne dépend pas de la fréquence ; le milieu n'est pas dispersif.

Par ailleurs $k'' < 0$; le milieu est donc atténuateur. Cela est dû à la viscosité du milieu qui dissipe de l'énergie ; le milieu est absorbant. On peut alors définir une distance caractéristique d'absorption $\delta = -1/k''$:

$$\delta = -\frac{1}{k''} = \frac{2\mu c^2}{\eta \omega^2}$$

Cette atténuation est d'autant plus importante (δ petite) que la fréquence du son est élevée. Le calcul à 20 kHz, limite des hautes fréquences audibles, donne $\delta(f = 20 \text{ kHz}) = 6,5 \cdot 10^2 \text{ m}$. On en déduit que les ondes sonores sont très faiblement amorties dans l'air.

Exercice 14. Propagation dans un diélectrique – modèle de l'électron élastiquement lié

1) On a comme dans le plasma

$$\frac{F_{mag}}{F_{el}} = \frac{vB}{E} \simeq \frac{v}{c} \ll 1$$

si les électrons sont non relativistes. Pour les sceptiques, avec un peu de mécanique quantique on peut écrire que le moment cinétique est de l'ordre de $L = mav = \hbar$ d'où $v \sim \frac{\hbar}{ma}$ avec a de l'ordre de $a \sim 1 \times 10^{-10} \text{ m}$, on trouve $v/c \simeq 3 \times 10^{-3}$ donc le critère est bien vérifié.

2) Le PFD s'écrit

$$m\ddot{\underline{r}} = -f\dot{\underline{r}} - K\underline{r} - e\vec{E} \Rightarrow \underline{r} \left(-\omega^2 + \underbrace{\frac{K}{m}}_{=\omega_0^2} + j \underbrace{\frac{f}{m}}_{=\frac{\omega_0}{Q}} \omega \right) = -\frac{e}{m} \vec{E} \Rightarrow \underline{r} = -\frac{e}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \vec{E}$$

avec $x = \omega/\omega_0$.

3) On a

$$\underline{j}_p = -ne\dot{\underline{r}} = -nej\omega\underline{r} = \frac{ne^2}{m\omega_0} \frac{jx}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \vec{E}$$

4.a) Si on écrit l'équation de Maxwell-Ampère, on a

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_p + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 j \omega \vec{E} \left(1 + \underbrace{\frac{ne^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}}_{\epsilon_r} \frac{1}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \right)$$

4.b) On a la même équation que dans le vide (en complexe) en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$ ce qui est la définition d'un diélectrique.

On a donc

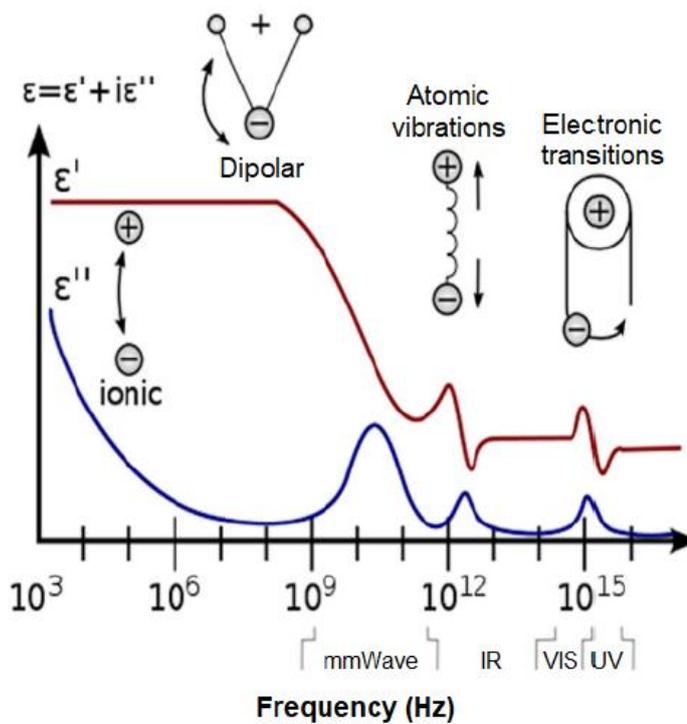
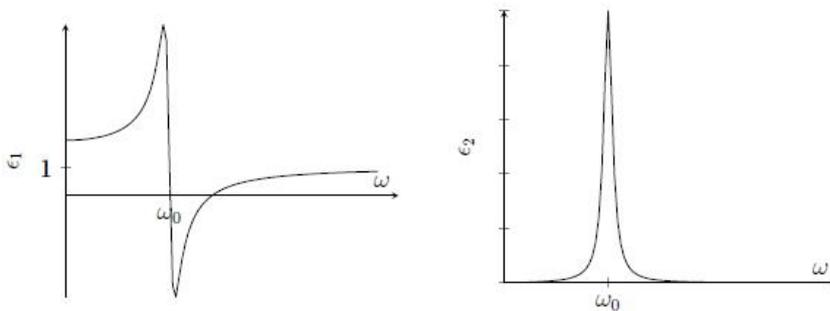
$$\epsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

4.c)

$$\epsilon_1 = \text{Re}(\epsilon_e) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

$$\epsilon_2 = \text{Im}(\epsilon_e) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{x/Q}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

On peut alors tracer l'allure des graphes (sans nécessairement respecter les bons ordres de grandeurs ...)



Pour les plus curieux, on a indiqué la courbe expérimentale pour un matériau. Commentaire?