TD CHAPITRE OND.4 : REFLEXIONS D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Relations de passage pour une interface vide / conducteur parfait IMPORTANT | 1 | 1

Supposons qu'un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$ tandis que le demi-espace $x < 0$ est vide. Ecrire les relations de passage en $x = 0$.

Exercice 2. Champ électrique réfléchi par le conducteur parfait IMPORTANT | 2 | 1

On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. L'onde réfléchie est de la forme

$$\vec{E}_r = E_{0ry}\vec{e}_y \cos\left(\omega t + kx + \varphi_y\right) + E_{0rz}\vec{e}_z \cos\left(\omega t + kx + \varphi_z\right)$$

Déterminer ses caractéristiques en exploitant les champs sous forme complexe.

Exercice 3. Détermination du courant surfacique à la surface d'un conducteur parfait 2 | 1

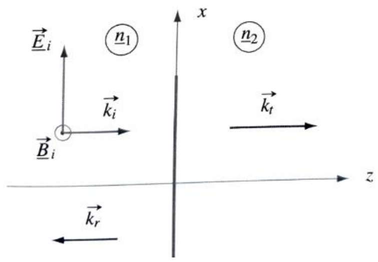
On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x,t) = B_0 \cos(\omega t + kx)\,\vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique :

$$\boldsymbol{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}}$$

Etablir l'expression du courant surfacique $\vec{j}_s$ généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

Exercice 4. Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude 2 | 2

Considérons une OemPPH arrivant en incidence normale sur l'interface d'équation $z = 0$ entre deux milieux matériels 1 et 2 quelconques caractérisés par leurs indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$.



Le champ électrique incident est $\underline{\vec{E}_i}(z,t) = \underline{E}_{0i} e^{i(\omega t - \underline{k}_1 z)}\,\vec{e}_x$ avec un vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}_i = \underline{k}_1 \vec{e}_z$ et $\underline{k}_1 = \underline{n}_1 \frac{\omega}{c}$. Cette onde donne naissance à une onde réfléchie de vecteur $\underline{\vec{k}}_r = -\underline{k}_1 \vec{e}_z$ et une onde transmise de vecteur $\underline{\vec{k}}_t = \underline{k}_2 \vec{e}_z$ avec $\underline{k}_2 = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$. On admet pour simplifier que la réflexion et la transmission conservent la direction de polarisation de l'onde.

1- Donner les expressions des champs électriques et magnétiques des trois ondes incidente, réfléchie et transmise.

2- En admettant que dans cette configuration, le champ électromagnétique est continu à l'interface, donner les expressions des équations dites de raccordement traduisant cette continuité pour la situation étudiée.

3- Montrer alors que les coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique vérifient les relations :

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \qquad\qquad \underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$$

4- Etablir leurs expressions dans le cas d'une interface vide-plasma

5- Même question pour une interface vide-conducteur ohmique dans le cas des régimes lentement variables. Vérifier qu'on retrouve le cas limite du conducteur parfait.

Exercice 5. Champ $\vec{E}$ résultant après réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait IMPORTANT | 2 | 2 ou 3

Lorsque le champ incident $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$ arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, le champ réfléchi est $\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_y$.

1 - Etablir l'expression du champ électrique résultant.

2 - Quelle est la caractéristique de ce champ ?

Exercice 6. Champ $\vec{B}$ résultant après réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait IMPORTANT | 1 ou 2 | 2

Lorsque le champ incident $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$ arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, les champs magnétiques incident et réfléchis sont les suivants : $\vec{B}_i(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_z$ et $\vec{B}_r(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_z$ tandis que le champ électrique complexe résultant de la superposition des champs incident et réfléchi est $\underline{\vec{E}}(x,t) = -2iE_0 \sin(kx) \exp(i\omega t)\, \vec{e}_y$.

Etablir l'expression du champ magnétique résultant selon deux méthodes différentes.

Exercice 7. Recherche de solutions stationnaires par séparation des variables 2 | 3

La recherche de solutions d'ondes stationnaires à une équation de d'Alembert peut se faire par la méthode très générale de séparation des variables, consistant à rechercher des solutions de la forme

$$\psi(x,t) = f(x)g(t)$$

Injecter cette expression dans l'équation d'onde et montrer que les solutions de cette forme, non divergentes dans le temps, sont nécessairement de la forme

$$\psi_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

Exercice 8. Forme de l'enveloppe spatiale d'une onde stationnaire IMPORTANT IMPORTANT | 1 ou 2 | 1 ou 2

On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, et on recherche les solutions de la forme : $y(x,t) = Y_0(x)\sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier.

1) Comment qualifie-t-on la solution $y(x,t)$ décrivant une onde pour laquelle les dépendances spatiale x et temporelle t interviennent séparément ?

2) Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$ où $k > 0$ et résoudre cette équation.

Exercice 9. Positions des nœuds et ventres IMPORTANT | 1 | 2

Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x,t) = 2\, E_0 \sin(\omega t)\sin(kx)\, \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x,t) = 2\, \frac{E_0}{c} \cos(\omega t)\cos(kx)\, \vec{e}_z$.

Etablir les positions $x_{N,p}$ des nœuds et $x_{V,q}$ ventres pour chacun de ces champs et déterminer la distance entre deux nœuds ou deux ventres successifs

---

Exercice 10. Etude énergétique de l'onde stationnaire IMPORTANT | 1 | 2

Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x,t) = 2\,E_0 \sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{e}_y$ et $\vec{B}(x,t) = 2\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{e}_z$.

1 - Déterminer la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide. Quelle est sa moyenne temporelle ?

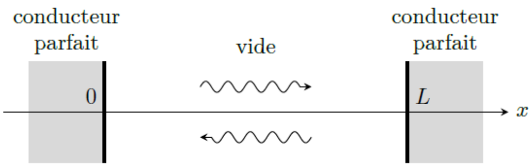
2 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting ainsi que sa valeur moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 11. Modes propres IMPORTANT IMPORTANT | 1 ou 2 | 2

On considère une cavité résonante de longueur L fermée par deux conducteurs parfaits en $x = 0$ et en $x = L$. On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$\vec{E}(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)\ \vec{e}_y$$

Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.



- Cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs.

EXERCICES

Réflexion d'une onde plane

Exercice 12. Onde et conducteur métallique 2 | 2

Une **onde incidente** plane progressive monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k\,\vec{e}_z$ ($k > 0$), est caractérisée par son champ électrique : en notation complexe, $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp\big(i(\omega t - kz)\big)\ \vec{e}_x$.

a. Quelle est la nature de la polarisation de l'onde incidente ?

b. Exprimer le champ magnétique $\underline{\vec{B}_i}$ de cette onde.

Un **conducteur parfait** occupe toute la partie de l'espace correspondant à $z > 0$; sa surface libre avec l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, est représentée par le plan Oxy.

c. Que valent les champs électrique $\vec{E}_c$ et magnétique $\vec{B}_c$ dans le conducteur parfait ?

Onde réfléchie

d. Quelle est, sur le conducteur, la densité surfacique de charge σ ?
Donner l'expression complète du champ électrique $\underline{\vec{E}_r}$ de l'onde réfléchie.

e. Exprimer le champ magnétique $\underline{\vec{B}_r}$ de cette onde.

f. Représenter les vecteurs $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\underline{\vec{E}_i}$, $\underline{\vec{E}_r}$, $\underline{\vec{B}_i}$ et $\underline{\vec{B}_r}$ en $z = 0$ à une date t donnée.

g. Quelle est, sur le conducteur, la densité surfacique de courant $\vec{j}_s$?

Onde stationnaire résultante

h. Exprimer, en notations réelles, les champs électrique $\vec{E}(z,t)$ et magnétique $\vec{B}(z,t)$ de l'onde stationnaire résultante.

i. Donner les caractéristiques de cette onde et montrer, à l'aide de schémas, les différences entre cette onde stationnaire et une onde progressive.

j. Exprimer $w(z,t)$ puis $\langle w(z)\rangle$.

k. Exprimer $\vec{\Pi}(z,t)$ puis $\langle\vec{\Pi}(z)\rangle$.

Exercice 13. Réflexion sous incidence normale 1 | 1

1) Un espace délimité par deux plans conducteurs distants de $a = 6\ cm$. Chaque plan présente un coefficient de réflexion en énergie de $R = 0{,}99995$. Au bout de combien de temps l'onde ne présente-t-elle plus que 1% de son énergie initiale ?

1) Un objet de la vie courant utilise la réflexion totale des OEM sur un conducteur parfait. Préciser quel est cet objet et expliquer comment il est fabriqué.

Exercice 14. Pression de radiation *d'après ENSAM* 2 | 1 ou 2

Un conducteur parfait occupe le demi-espace $z > 0$. Une onde plane progressive sinusoïdale atteint la surface du conducteur sous incidence normale : $\vec{E}_i = E_0\vec{e}_y e^{j(\omega t - kx)}$

1) Montrer que le champ électrique est nul dans le métal.

2) Calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le milieu $z < 0$.

3) Calculer les densité surfaciques de charge σ et de courant $\vec{J}_s$ en $z = 0$.

4) Caractériser l'onde en $z < 0$. Calculer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne. Commenter.

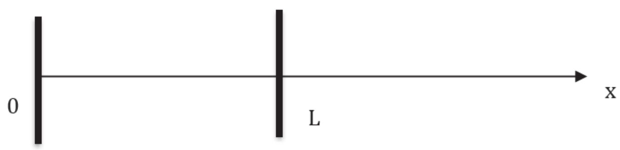
5) On donne l'expression de la force qu'exerce l'onde sur le métal : $\mathrm{d}\vec{F} = \left(\sigma\vec{E} + \vec{J}_s \wedge \vec{B}\right)\frac{dS}{2}$. Montrer qu'il s'agit d'une pression (de radiation) et calculer sa valeur moyenne en faisant intervenir la densité volumique du champ électromagnétique incident.

6) Calculer la pression de radiation pour un laser de section $S = 0{,}4\ \mathrm{mm}^2$ et de puissance $P = 75\ \mathrm{mW}$.

■ Cavité résonante

Exercice 15. Etude d'une cavité résonante *(écrit banque PT 2020)* IMPORTANT | 1 ou 2 | 2

On considère une onde électromagnétique sinusoïdale de fréquence f, polarisée rectilignement située entre deux conducteurs parfaits situés en $x = 0$ et $x = L$. L'espace entre les deux conducteurs est le vide.



1) Retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

2) On cherche un champ sous la forme $\vec{E}(x,\mathrm{t}) = g(x)\cos(2\,\pi\,\mathrm{f}\,\mathrm{t})\,\vec{\mathrm{u}}_y$. A quel type d'onde cela correspond-il ?

3) Que peut-on dire du champ électrique dans un conducteur parfait. Pourquoi ?

4) On admet la continuité du champ tangent aux interfaces conducteur/vide. Quelles sont alors les conditions aux limites vérifiées par le champ dans la cavité ?

5) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $g(x)$ et la résoudre.

6) En déduire qu'un champ électromagnétique harmonique ne peut exister dans la cavité que pour certaines fréquences. On exprimera ces fréquences ainsi que leur longueur d'onde associée.

Exercice 16. Cavité résonante - bis IMPORTANT | 2 | 2

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur métallique parfait entre $z = 0$ et $z = a$. On s'intéresse à un champ électromagnétique qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement (selon $\vec{u}_x$ par exemple) de sens de propagation opposés $\pm\vec{u}_z$.

a. Quelle est la forme du champ électrique dans la cavité ?

b. Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

c. Représenter sur un même graphique l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les 3 plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres le mode n possède-t-il ?

d. En admettant que dans le domaine de l'acoustique, un tuyau d'orgue (tube) soit régi par des équations analogues à celle d'une cavité électromagnétique, identifier les tuyaux d'un orgue produisant les sons les plus graves et les plus aigus. On supposera que le mode $n = 1$ est prédominant dans chaque tube.

Exercice 17. Guide d'onde (Oral banque PT) IMPORTANT | 2 | 2 ou 3

Un guide d'onde est constitué de deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \left[Ae^{ik_2y} + Be^{-ik_2y}\right]e^{i(\omega t - k_1x)}\overrightarrow{e_z}$$

Donnée : on rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

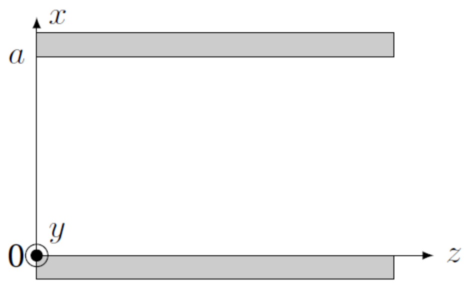
$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$$

Avec $\vec{u}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1. Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives harmoniques (OPPH) dont on exprimera les vecteurs d'ondes notés $\overrightarrow{k_+}$ et $\overrightarrow{k_-}$.
2. Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Etablir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.
3. Déterminer les inclinaisons θ_+et θ_- des deux OPPH avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et de la distance a.
4. En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.
5. Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y.

Exercice 18. Onde guidée entre deux plans métalliques IMPORTANT | 2 | 2 ou 3

On cherche ici à illustrer le principe d'un guide d'onde. Pour ce faire, on considère deux plans métalliques parfaits parallèles et distants de a et on cherche à déterminer la structure de l'onde pouvant se propager entre ces deux plans *i.e.* selon (Oz).



1- Quelle est la valeur du champ électrique et magnétique dans les conducteurs parfaits?

2- En déduire les valeurs que doivent prendre certaines composantes du champ électrique de l'onde au voisinage de chacun des plans métalliques.

3- Ces conditions sont-elles cohérentes avec une structure d'onde **plane** progressive?

4- Pour remédier à ce problème, on a s'intéresser à une onde dite "TE" (transverse électrique) de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = E(x)\overrightarrow{e_y}\,e^{j(\omega t - kz)}$$

Comment s’écrivent les équations de Maxwell dans ces conditions? A-t-on $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{k}$ et $\vec{E}$?

5- Comment s’écrit l’équation de propagation pour le champ électrique avec une onde de ce type? En déduire l’équation vérifiée par $E(z)$

6- Quelle est la solution générale pour $E(z)$? En exploitant les conditions limites, en déduire la relation entre ω, k et a.

Exercice 19. Guide d’onde *d’après CCINP* IMPORTANT | 2 | 2

On considère un guide d’onde de longueur infinie selon z, de hauteur a selon x, et de largeur b selon y. Les parois sont supposées faites d’un métal parfait. Le champ se propageant dans le guide est donné par :

$$\vec{E} = E_m \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

1.a) Déterminer le champ $\vec{B}$ associé à cette onde.

1.b) Quelle relation $\vec{E}$ vérifie-t-il ? Déterminer la relation de dispersion.

2) On ferme le guide par une paroi parfaitement conductrice en $z = L$. Que devient le champ électrique? Commenter le résultat obtenu.

Exercice 20. Cavité réelle, coefficient de qualité 2 | 2

On délimite une cavité avec deux plans métalliques parallèles coïncidant avec les plans $z = 0$ et $z = L$. On prend pour expression du champ magnétique dans la cavité :

$$\vec{B}_{cavité} = B_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t)\, \vec{u}_y, \quad \text{avec } \omega = \frac{\pi c}{L}$$

et dans le demi-espace $z > L$ occupé par le métal de conductivité :

$$\vec{B}_{métal} = -B_0 \exp\left(-\frac{z-L}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z-L}{\delta}\right) \vec{u}_y, \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

1) Exprimer l’énergie électromagnétique moyenne $< U_{em} >$ contenue dans la cavité en fonction de B_0, L et S, la surface des plans conducteurs.

2) On donne $L = 3\ cm$, $\gamma = 2 \times 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$. Calculer la fréquence et vérifier que, dans le métal, le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant la densité volumique de courant. Comparer également δ et L.

3) Exprimer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule en un point d’abscisse $z > L$ en fonction de B_0, γ, δ et z. En déduire la puissance moyenne $< P_J >$ dissipée par effet Joule dans tout le volume du conducteur $z > L$, en fonction de B_0, γ, δ et S.

4) On définit le facteur de qualité Q par

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée pendant une période}}$$

Exprimer le facteur de qualité de la cavité en fonction de L et δ, puis en fonction de γ et de la longueur d’onde λ associée à la fréquence propre de la cavité.

Exercice 21. Onde électromagnétique cylindrique guidée par un fil *(J. Kieffer)* 2 ou 3 | 2 ou 3

Une onde électromagnétique cylindrique, monochromatique de pulsation ω se propage dans le vide le long d’un cylindre de rayon a rectiligne infini d’axe (Oz), correspondant à un conducteur supposé parfait.

Le champ électromagnétique de l'onde noté $\begin{cases}\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0(r,z)e^{j\omega t} \\ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0(r,z)e^{j\omega t}\end{cases}$ est transverse : $E_z = 0, B_z = 0$.

1- Que peut-on dire des charges et courants dans le cadre du conducteur parfait ?

2- Traduire les relations imposées aux composantes du champ électromagnétique de l'onde dans la base locale des coordonnées cylindriques par les équations de Maxwell.

3- Le conducteur étant parfait, établir les conditions limites vérifiées par le champ électrique à la surface du fil. Montrer qu'en tout point de l'espace environnant le fil conducteur $B_r = 0$ et $E_\theta = 0$.

4- On notera $I(z)e^{j\omega t}$ le courant transporté à l'abscisse z par le fil ; achever la résolution des équations de Maxwell pour exprimer le champ électromagnétique à l'aide de la fonction $I(z)$.

5- En déduire la forme générale prise par les grandeurs rencontrées jusqu'à présent.

6- Quelles sont les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{J}_S$ portées à l'abscisse z et à l'instant t par le fil conducteur? Quelle relation liant ces deux grandeurs traduit la conservation de la charge? Quelle relation précédente assure déjà ce résultat?

On rappelle qu'en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{z,r}\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta}\vec{e}_z \qquad \text{div}\,(\vec{a}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right)_{\theta,z} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right)_{r,z} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{r,\theta}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta}\right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)_{r,\theta}\right]\vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}\right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)_{\theta,z}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r}\right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)_{z,r}\right]\vec{e}_z$$

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 22. Interface vide-plasma 2 | 2

Un plasma occupe le demi-espace $z > 0$ (le demi-espace $z < 0$ est occupé par l'atmosphère assimilé au vide).

Une onde électromagnétique OPPM polarisée rectilignement arrive en incidence normale sur le plasma :

$\overrightarrow{E_i} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)\,\overrightarrow{e_x}$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$. On définit l'indice complexe du plasma par $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{k_0}$.

On rappelle l'équation de dispersion dans un plasma : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On note $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de transmission et de réflexion du champ électrique sur le plasma en $z = 0$ tels que :

$\overrightarrow{E_r}(z=0,t) = \underline{r}\,\overrightarrow{E_i}(z=0,t)$ et $\overrightarrow{E_t}(z=0,t) = \underline{t}\,\overrightarrow{E_i}(z=0,t)$.

1. Ecrire la forme des champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis.

2. **En supposant la continuité des champs à l'interface vide-plasma**, exprimer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n}$.

On note R et T les coefficients de réflexion et de transmission de l'énergie à l'interface définis par les rapports de puissances moyennes réfléchies (ou transmises) sur les incidentes.

$R = \frac{\|<\overrightarrow{\pi_R}>\| S}{\|<\overrightarrow{\pi_i}>\| S}$ et $T = \frac{\|<\overrightarrow{\pi_T}>\| S}{\|<\overrightarrow{\pi_i}>\| S}$ ce sont les rapports au final des normes des vecteurs de Poynting moyens réfléchi ou transmis sur l'incident.

3. Que vaut $\underline{n}$ si $\omega < \omega_P$? Calculer R et T dans ce cas. Conclure.

4. Que vaut $\underline{n}$ si $\omega > \omega_P$? Calculer R et T dans ce cas en fonction de n.

5. Quelle relation existe-t-il entre R et T dans les deux cas. Interpréter.

6. Représenter sur le même graphe $R(\omega)$ et $T(\omega)$.

Exercice 23. Propagation guidée et relation de dispersion 2| 2

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oxy, d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide suivant $\overrightarrow{e_z}$ entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans le vide. Dans le conducteur parfait $E(x = 0) = 0$ et $E(x = d) = 0$

1. Etablir l'équation de propagation.

On cherche le champ électrique sous la forme $\underline{\overrightarrow{E}}(M, t) = E(x) \exp j(\omega t - kz)\, \overrightarrow{e_y}$.

2. Etablir la relation de dispersion.

3. Montrer que l'on doit avoir une fréquence supérieure à une fréquence minimale f_{min} pour avoir propagation de cette onde. Déterminer f_{min} en fonction de c et d.

4. Quelle est la nature de l'onde ?

Exercice 24. Onde dans un câble coaxial 2 | 2

On étudie un guide d'onde constitué de deux armatures métalliques cylindriques coaxiales d'axe $\overrightarrow{e_z}$ et de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. Les régions $r < R_1$ et $r > R_2$ sont remplies d'un métal parfait (de conductivité infinie). La région $[R_1, R_2]$ est occupée par du vide. Dans cette zone vide, on veut propager une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = f(r) \cos(\omega t - kz)\, \overrightarrow{e_r} \text{ avec } f(R_1) = E_0$$

1. A l'aide des équations de Maxwell (préciser la ou lesquelles), déterminer la fonction $f(r)$.

2. Déterminer le champ $\overrightarrow{B}$ de l'onde.

3. Etablir la relation de dispersion (relation entre ω et k) pour l'onde envisagée, commentez.

4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting. En déduire le flux d'énergie (moyenné en temps) à travers une section du câble.

5. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde, puis la moyenner en temps.

6. En déduire la vitesse moyenne v_e de propagation de l'énergie dans le câble.

On donne : $\vec{\Delta}\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_r\right) \overrightarrow{e_r}$