

DS. DE PHYSIQUE N°5 - MPI – ELEMENTS DE CORRECTION

PROBLEME N°1 A : ROBOT PERSEVERANCE SUR MARS (CCINP TSI 2023)

Q1. Un signal radio se propage dans le vide à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ de la lumière.

En notant d la distance maximale $d = 300 \cdot 10^6 \text{ km} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}$:

$$\tau = \frac{d}{c}$$

A.N. : $\tau = 10^3 \text{ s} \approx 17 \text{ min}$

Les informations du rover sont reçues après plus de 15 min, la réponse envoyée depuis la Terre parvient au rover après plus de 35 min : il n'est donc pas possible de réagir sur l'instant aux informations reçues. Le rover va nécessiter d'être programmé.

Q2. $w = 4\,000 \times 2\,000 \times 32 \text{ bits}$ avec $8 \frac{\text{bits}}{\text{octet}}$ soit $w = 4\,000 \times 2\,000 \times \frac{32}{8} \text{ octet} = 4 \times 2 \times 4 \times 10^6 \text{ octets}$

$$w = 32 \text{ Mo}$$

Q3. Soit T la durée nécessaire pour transmettre une vidéo d'une seconde correspondant à un poids de $N \text{ Mo}$ avec un débit $D = 0,25 \text{ Mo/s}$

$$N = 24 \times 32 \text{ Mo}$$

$$T = \frac{N}{D} = \frac{24 \times 32}{0,25} = 3200 \text{ s} \approx 53 \text{ min} \approx 1 \text{ h}$$

Durée très conséquente pour une vidéo de très petite taille, peu envisageable autrement que de manière exceptionnelle.

Q4. Equations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants : On se place « dans le vide », ou dans un milieu se comportant comme le vide (cas de l'air en particulier), on suppose dans toute la suite l'absence de charges et de courants électriques, soit $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; les équations de Maxwell deviennent alors :

		Régime variable dans le vide
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = 0$
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$

Q5. Formule d'analyse vectorielle du double rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec (MG) dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec (MF) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on peut inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\overline{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\boxed{\overline{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Q6. Il s'agit d'une **équation de d'Alembert**. On obtient une équation de même forme pour la propagation **d'ondes mécaniques sur une corde vibrante** (moyennant différentes hypothèses : absence de toute dissipation d'énergie, poids négligeable devant la tension de la corde, etc.), la propagation **d'ondes sonores dans un milieu non dissipatif**, etc.

Q7. La relation de dispersion s'obtient en calculant les dérivées partielles par rapport au temps et à y , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert $\overline{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

ici, $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ avec $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = 0$ soit $\boxed{k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}$

en posant $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}$ et en choisissant des grandeurs positives : $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

Q8. Dans l'argument du cosinus, on trouve la variable $\omega t - ky = \omega \left(t - \frac{k}{\omega} y \right) = \omega \left(t - \frac{y}{c} \right)$: il s'agit du couplage entre espace et temps caractéristique d'une onde progressive, avec $\frac{y}{c}$ retard lié à la propagation sur une distance y . Il s'agit donc d'une **propagation selon $+\vec{u}_y$** (selon les y croissants).

Q9. $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_k$ soit ici : $\boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_y}$

Q10. Surface d'onde : par définition, surface telle que à un instant t donné, $\vec{E}(M, t) = \vec{c}t\vec{e}$ soit ici surface telle que $ky = cte$ soit **surface d'onde : $y = cte$** : il s'agit de l'équation d'un plan, et l'onde est donc une **onde plane**.

Q11. Par définition, la polarisation correspond à la direction du vecteur \vec{E} qui a ici une direction constante : **polarisation rectiligne selon \vec{u}_x** .

Q12. Equation de Maxwell-Faraday : $\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

L'onde étant une OemPPH, possibilité d'utiliser la notation complexe.

La dérivation par rapport à t est une multiplication par $i\omega$ $\frac{\partial}{\partial t} = (\times i\omega)$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

Equation de Maxwell-Faraday : $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ $\leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$: les trois vecteurs forment un trièdre direct

Q13. $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ soit $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

\vec{k} et ω étant des constantes réelles, cette relation reste vraie pour les champs réels (linéarité de la partie réelle) :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

Avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_y$ et $\frac{k}{\omega} = c$, on a donc

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky) \vec{u}_z}$$

Q14. Vecteur de Poynting tel que $\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$

Il s'agit du vecteur « densité de flux de puissance électromagnétique » : le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ à travers une surface (Σ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface (Σ) dans le sens de \vec{dS} .

Unité : $\vec{\Pi}$ en $W \cdot m^{-2}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, qui coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique si elle est progressive.

Ici,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{E_0^2}{c} \cos^2(\omega t - ky) \right) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ky) \vec{u}_y$$

- Q15.** L'onde émise par la source est en réalité sphérique et non pas plane. La puissance électromagnétique \mathcal{P}_e émise par la source n'étant pas absorbée dans le vide, elle se conserve mais se répartit sur des surfaces d'onde qui sont des sphères de plus en plus grandes, soit pour une sphère de rayon d , sur une surface $S = 4\pi d^2$. La puissance surfacique varie donc en $\frac{\mathcal{P}_e}{S}$, or la puissance reçue étant proportionnelle à la puissance surfacique donc à $1/S$, elle est bien proportionnelle à $1/d^2$.
- Q16.** En exploitant la relation fournie, ordre de grandeur de la puissance reçue : environ $2 \cdot 10^{-20} \text{ W}$. Elle est très faible, il est donc très difficile de distinguer le signal du bruit, d'où la nécessité de relais avant de transmettre vers la Terre (sondes orbitales captant mieux le signal car plus proches et sans traversée de l'atmosphère, et ayant une puissance d'émission plus grande).

PROBLEME N°1B : OLEODUC BAKOU-TBILISSI ET RISQUE SISMIQUE (CCS TSI 2021)

Q24. Système : tronçon n repéré par $x_n(t)$ Bilan des actions mécaniques horizontales subies par le tronçon n :

- force de rappel du ressort situé entre $n - 1$ et n : $\vec{f} = -K(x_n - x_{n-1} - a)\vec{u}_x$
- force de rappel du ressort situé entre n et $n + 1$: $\vec{f}' = K(x_{n+1} - x_n - a)\vec{u}_x$

On applique alors la seconde loi de Newton, en projection sur l'axe Ox , il vient :

$$m\ddot{x}_n = -K(x_n - x_{n-1} - a) + K(x_{n+1} - x_n - a) \iff m\ddot{x}_n = Kx_{n+1} + Kx_{n-1} - 2Kx_n$$

On a donc bien l'équation demandée :

$$\ddot{x}_n(t) = \Gamma(x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t)) \quad (\text{II.1}) \quad \text{avec} \quad \Gamma = \frac{K}{m}$$

Q25. X_0 est l'amplitude de l'onde, ω est sa pulsation et k est la norme du vecteur d'onde.

Q26. On reprend l'équation (II.1) en notation complexe :

$$(i\omega)^2 \underline{x}_n = \Gamma \underline{x}_n (e^{-ika} + e^{ika} - 2) \iff -\omega^2 = \Gamma(2 \cos(ka) - 2) = 2\Gamma(\cos(ka) - 1)$$

en utilisant la relation d'Euler. On peut alors utiliser les formules de trigonométrie :

$$-\omega^2 = 2\Gamma \left(\cos^2\left(\frac{ka}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) - 1 \right) = 2\Gamma \left(-2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \right) \iff \omega^2 = 4\Gamma \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q27. Si $ka \ll 1$, on peut alors écrire $\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \sim \frac{ka}{2}$, la relation de dispersion se simplifie alors en : $\omega^2 = \Gamma k^2 a^2$. Or on sait que $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ d'où $c = a\sqrt{\Gamma}$ CQFD.

Q28. Dans le préambule, on nous dit que les tronçons de tube font 12 m, on prendra donc $L = a = 12 \text{ m}$. La force T donnée par la loi de Hooke est $T = \frac{ES}{L} \Delta L$ tandis que dans la modélisation retenue précédemment, on avait écrit que $F = -K(x_n - x_{n-1} - a) = -K\Delta L$. En faisant l'hypothèse que $\Delta L \ll L$, on peut alors identifier : $K = \frac{ES}{L}$. Il faut à présent estimer S , la section d'acier du tube. On sait que 150 000 tubes ont été utilisés pour une masse totale de 594 000 tonnes d'acier. La masse d'un tube est donc de 3,96 tonnes. Compte tenu de la masse volumique de l'acier, un tube est donc

constitué de $V_{tube} = 0,495 \text{ m}^3$ d'acier. Comme la longueur du tube est de 12 m, on en déduit la section à prendre en compte pour l'estimation : $S = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$. Finalement, on aboutit à : $K \approx 6,9 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q29. On a $c = a\sqrt{\frac{K}{m}}$ donc $c \approx 5,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q30. Afin de déterminer la célérité de l'onde, utilise le maximum de déplacement. On constate qu'il lui faut 80 ms pour passer du 20e au 55e tronçon, ce qui correspond à une vitesse $c \approx 5,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur d'onde vaut $\lambda = 25/7 = 3,57$ tronçons soit $\lambda \approx 43 \text{ m}$. Enfin, la figure 9 permet de déterminer la période : $T = 90/10$ ms soit $T \approx 9 \text{ ms}$.

Q31. On retrouve approximativement la relation $\lambda = cT$. En outre, on retrouve bien la vitesse estimée à la question Q29. Le modèle peut donc être validé.

PROBLEME N°2 : DELOCALISER LES CENTRES DE DONNEES, UNE SOLUTION D'AVENIR ? (CCS MP 2022)

Q.12. Principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique, dans la base polaire de centre O le centre de la Terre $\mathcal{B}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$m_s \vec{a} = \vec{F}(M) = -\frac{\mathcal{G}M_T m_s}{r^2} \vec{u}_r$$

Or d'après l'énoncé, on a $r = R_T + h$ avec $h = 650 \text{ km} = \text{cte}$. Il s'agit donc d'un mouvement circulaire.

Accélération en polaires dans le cas d'un mouvement circulaire : $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r} \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

Projection sur la direction orthoradiale : $m_s r \ddot{\theta} = 0$ d'où $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = \text{cte}$ d'où $v = (R_T + h)\dot{\theta} = \text{cte}$

Pour un mouvement à force centrale, le **mouvement circulaire est nécessairement uniforme**.

Q.13. Projection sur la direction radiale : $-m_s \frac{v_0^2}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m_s}{r^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}}$ vitesse de satellisation

Q.14. Avec $r = R_T + h$, A.N. : pour $h = 650 \text{ km}$: $v_0 = 7,52 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Le satellite parcourt la distance $2\pi r$ en une durée T : $v_0 = \frac{2\pi r}{T_0}$ et

$$T_0 = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_0}$$

Ou encore :

$$T_0 = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}} = \frac{2\pi(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}}$$

A.N. : $T_0 = 5,89 \cdot 10^3 \text{ s}$

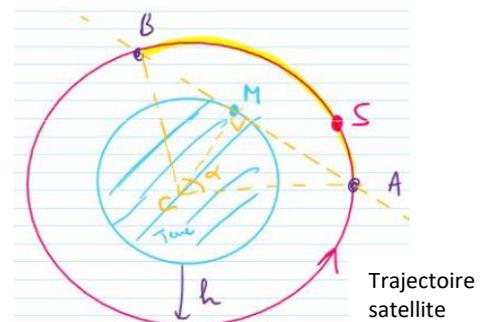
Q.15. La communication entre un point M fixe sur le sol et le satellite S n'est possible que lorsque S se trouve sur la portion de trajectoire telle que les rayons puissent en ligne droite aller du point M au point S sans rencontrer le sol en un autre point. Il s'agit donc de la portion de trajectoire comprise entre les points A et B (cf Schéma)

La durée pendant laquelle le satellite reste dans cette zone est, avec l_{AB} longueur de l'arc de cercle compris entre A et B :

$$\Delta t = \frac{l_{AB}}{v_0}$$

En introduisant l'angle $\alpha = \widehat{ACB}$ on a $l_{AB} = (R_T + h)\alpha$ or dans le triangle CMA : $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_T}{R_T+h}$ soit

$$l_{AB} = 2(R_T + h) \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)$$



Finalement,

$$\Delta t = \frac{l_{AB}}{v_0} = \frac{2(R_T + h)}{v_0} \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$$

A.N. : $\Delta t \approx 780 \text{ s} \approx 13 \text{ min}$

Ce modèle suppose d'avoir une émission/réception isotrope en M. Si l'antenne en M est directive, cela réduit la zone où peut se trouver le satellite pour avoir une communication, et donc réduit encore la durée Δt pour atteindre quelques minutes.

Q.16

On se place « dans le vide », ou dans un milieu se comportant comme le vide (cas de l'air en particulier), on suppose dans toute la suite l'absence de charges et de courants électriques, soit $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; les équations de Maxwell deviennent alors :

		Régime variable dans le vide
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = 0$
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec (MG) dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec (MF) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on peut inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Q.17.

$$\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Dérivées spatiales : $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik \vec{E} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$ $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}$

Dérivées temporelles : $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$ $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \times (-\omega^2 \vec{E})$$

Soit $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$,

Ici, on recherche une onde se propageant a priori dans le sens des x croissants, correspondant donc à $k > 0$, on obtient la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega}{=1/c} \quad \omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

La vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c = cte$ est une constante indépendante de la pulsation de l'OemPPH considérée : **milieu non dispersif**.

Q.18 : Relation de structure dans le vide (OemPPH) :

$$\vec{B} \underset{OemPP}{=} \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \underset{OemPPH}{=} \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Q.19 : Dans le vide, d'après la question précédente, $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

Comparons les composantes électrique $F_{\text{él}}$ et magnétique F_{mag} de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q :

$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{F_{\text{él}}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{F_{\text{mag}}}$$

$$F_{\text{él}} \sim qE \quad F_{\text{mag}} \sim qvB \sim \frac{qvE}{c}$$

$$\text{D'où } \frac{F_{\text{él}}}{F_{\text{mag}}} \sim \frac{qE}{qvE} c = \frac{c}{v}$$

Pour des électrons non relativistes, $\frac{c}{v} \gg 1$ soit $\frac{F_{\text{él}}}{F_{\text{mag}}} \gg 1 : \vec{F} \approx \underbrace{q\vec{E}}_{F_{\text{él}}}$

Q.20.

Système électron, étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : poids négligé devant la force de Lorentz

Déterminons la vitesse des électrons et des ions en régime harmonique en leur appliquant le PFD

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E} \Rightarrow$$

En régime sinusoïdal forcé, passage à la notation complexe, on a alors $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = i\omega \vec{v}_e$ soit

$$im_e \omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}}{i\omega m_e}$$

De même, pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c , $\vec{v}_c = +\frac{Ze\vec{E}}{i\omega m_c}$

Avec $m_c \gg m_e$, $\|\vec{v}_e\| \gg \|\vec{v}_c\|$

Q21.

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{\text{cation}} = n_e(-e)\vec{v}_e + n_c(+e)\vec{v}_c \underset{n_c=n_e}{=} n_e e \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c} \right) \frac{e\vec{E}}{i\omega} \underset{\frac{m_c}{m_e} \gg 1}{\approx} \frac{n_e e^2 \vec{E}}{m_e i\omega}$$

$$\vec{j} = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \vec{E}$$

On peut alors définir par analogie avec un conducteur ohmique une conductivité électrique complexe du plasma :

$$\vec{j} = \underline{\gamma}(\omega) \vec{E}$$

$$\underline{\gamma}(\omega) \approx -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}$$

Q.22. On a $\underline{j} = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \underline{\vec{E}} = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \underline{\vec{E}} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ soit $\underline{j} = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0 e^{-i\frac{\pi}{2}} \exp i(\omega t - kx) \underline{e}_y = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0 e^{i(\omega t - kx - \frac{\pi}{2})} \underline{e}_y$

$$\underline{j} = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0 \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) \underline{e}_y = \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0 \sin(\omega t - kx) \underline{e}_y$$

Or

$$\begin{aligned} p_V &= \frac{dP}{dt} = \underline{j} \cdot \underline{\vec{E}} \\ &= \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0^2 \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \\ \langle p_V \rangle &= \frac{n_e e^2}{\omega m_e} E_0^2 \left\langle \frac{1}{2} \sin(2(\omega t - kx)) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

On peut retrouver très simplement $\langle p_V \rangle$ en par le calcul en complexe :

$$\langle p_V \rangle = \mathcal{Re} \left(\frac{1}{2} \underline{j} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right) = \frac{1}{2} \mathcal{Re} \left(\underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}} \underline{\vec{E}}^* \right) = \frac{1}{2} \mathcal{Re} \left(\underline{\gamma} \cdot \|\underline{\vec{E}}\|^2 \right)$$

Or $\|\underline{\vec{E}}\|^2$ est un réel pur et dans le plasma $\underline{\gamma}$ est un imaginaire pur donc $\underline{\gamma} \cdot \|\underline{\vec{E}}\|^2$ imaginaire pur soit $\mathcal{Re} \left(\underline{\gamma} \cdot \|\underline{\vec{E}}\|^2 \right) = 0$: on retrouve

$$\langle p_V \rangle = 0$$

En moyenne, il n'y a pas de puissance dissipée dans le plasma.

Cela est dû aux charges qui vibrent en quadrature par rapport au champ électrique, comme dans une inductance ou une capacité (ce qui provient de l'hypothèse qu'on a négligé dans le modèle de plasma dilué toute dissipation par le biais des collisions et seulement pris en compte le champ électrique).

Q.23. Exprimons les équations de Maxwell en prenant en compte les différentes hypothèses du milieu de propagation afin d'en déduire l'équation de propagation du champ électrique.

quatre équations de Maxwell: $\text{div} \underline{\vec{E}} = 0$, $\text{div} \underline{\vec{B}} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$

D'autre part, d'après les formules d'analyse vectorielle, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \underline{\vec{E}}) - \Delta \underline{\vec{E}} = -\Delta \underline{\vec{E}}$

En combinant les équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{B}})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) \stackrel{\substack{\text{pseudo loi} \\ \text{d'Ohm locale}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

L'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert et dépend de la conductivité électrique $\underline{\gamma}$ du milieu.

Q.24. Nous allons établir la relation de dispersion dans le plasma en exploitant l'équation de propagation. Elle pourra être retrouvée en exploitant directement les équations de Maxwell avec la notation complexe.

Avec $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, on obtient la relation de dispersion

$$\begin{aligned} -k^2 \underline{\vec{E}} &= \mu_0 \underline{\gamma} i \omega \underline{\vec{E}} + \mu_0 \epsilon_0 (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \\ \text{pseudo loi}}}{=} \left(\mu_0 \underline{\gamma} i \omega + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \right) \underline{\vec{E}} = \left(\frac{\mu_0 \underline{\gamma}}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} \\ -k^2 \underline{\vec{E}} &\stackrel{\substack{\underline{\gamma} = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}}{=} \left(-\frac{\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = -\left(-\frac{\mu_0 n_e e^2}{\omega^2 m_e} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}}{=} -\left(-\frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right)$$

On pose $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$, ce qui permet d'écrire la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Q.25 Pour $\omega < \omega_p$, \underline{k}^2 est un réel négatif, \underline{k} est alors imaginaire pur.

$$\underline{k} = ik_i = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

On définit alors $|k_i| = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ soit $\underline{k} = ik_i = \pm \frac{i}{\delta}$

Solution positive :

$$\underline{k} = ik_i = +i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = +\frac{i}{\delta} \quad \text{d'où} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - ik_i x)) = \underline{\vec{E}}_0 e^{k_i x} e^{i\omega t}$$

Soit

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{k_i x} \cos(\omega t) = E_0 e^{x/\delta} \cos(\omega t) \underline{\vec{e}}_y$$

Il n'y a plus de propagation (absence de couplage espace et temps) mais une amplification menant à une solution divergente soit à une solution physiquement non acceptable, le plasma n'étant pas un milieu amplificateur fournissant de l'énergie à l'onde.

Solution négative :

$$\underline{k} = ik_i = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -\frac{i}{\delta} \quad \text{d'où} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left(i\left(\omega t + \frac{i}{\delta} x\right)\right) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

Soit

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t) \underline{\vec{e}}_y$$

$\delta = \frac{1}{|k_i|} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ représente la distance caractéristique associée à ce phénomène d'atténuation, également appelée **profondeur de pénétration ou épaisseur de peau**.

Le champ magnétique s'exprime alors, à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday, selon

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{-i \underline{\vec{e}}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0}{\omega} e^{-x/\delta} e^{i\omega t} = \frac{\underline{\vec{e}}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} \underline{\vec{e}}_z$$

$$\underline{\vec{B}} = \text{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{\underline{\vec{e}}_x \wedge \underline{\vec{E}}_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \sin(\omega t) \underline{\vec{e}}_z$$

Q.26. En un point donné, les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ varient sinusoidalement et en quadrature. A t donné, ils présentent le même type d'amortissement dans l'espace avec une distance caractéristique de la décroissance correspondant à l'épaisseur de peau.

Q.27. Nous allons exprimer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne au cours du temps

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t) \vec{e}_y \wedge \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \sin(\omega t) \vec{e}_z}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_x$$

$$\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \underbrace{e^{-2x/\delta} \cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{\frac{1}{2} e^{-2x/\delta} \sin(2\omega t)} \vec{e}_x$$

Les champs électrique et magnétique sont en quadrature temporelle donc $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$, ou encore avec $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$

On peut retrouver très simplement $\langle \vec{\pi} \rangle$ par la formule complexe des moyennes $\langle \vec{\pi} \rangle = \mathcal{R}e \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \mathcal{R}e \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e \left(E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t)} \vec{e}_y \wedge \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - \pi/2)} \vec{e}_z \right)$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \mathcal{R}e \left(e^{i(\omega t)} e^{-i(\omega t - \pi/2)} \right) \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \underbrace{\mathcal{R}e \left(e^{i\pi/2} \right)}_{=0} \vec{e}_x$$

Cette onde stationnaire évanescence ne transporte ni ne dissipe aucune énergie (en moyenne) ; $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$

Q.28. Pour $\omega > \omega_p$, k^2 est un réel positif, k est alors réel pur.

$$k = k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

On conserve la solution positive $k = k_r > 0$ qui correspond à une onde se propageant selon $+\vec{e}_x$, soit selon les x croissants :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_r x)} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r x) = E_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} x\right) \vec{e}_y$$

L'onde a la même forme qu'une OemPPH dans le vide ; le vecteur d'onde étant réel, il y a propagation sans absorption, on dit que le plasma est transparent.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday (M.F.) : $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ soit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge E_0 \cos(\omega t - k(\omega)x) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} x\right) \vec{e}_z$$

Le vecteur de Poynting s'exprime selon

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \cdot \cos^2(\omega t - k(\omega)x)$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) = \frac{k E_0^2}{2\mu_0 \omega} \vec{e}_x = \frac{\vec{k} E_0^2}{2\mu_0 \omega} \neq \vec{0}$$

Ou encore directement :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \mathcal{R}e \left(\frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}^*}{\omega} \right)}{2\mu_0} \right) = \frac{\vec{k}}{2\mu_0 \omega} E_0^2$$

Q.29. Par définition de la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

On a $v_\phi = f(\omega)$: milieu dispersif

En différenciant la relation de dispersion :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow 2c^2 k dk = 2\omega d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

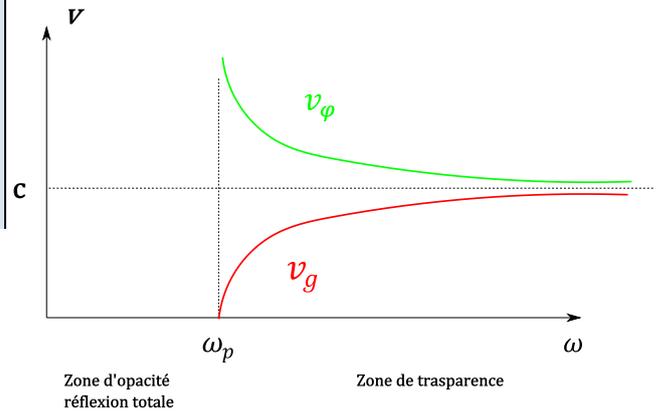
$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

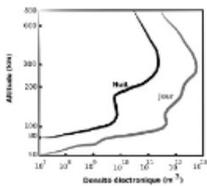
Relation de Klein-Gordon : $v_g v_\phi = c^2$

Pour $\omega > \omega_p$, on en déduit les propriétés suivantes :

$v_\phi > c$ et $v_g < c$



La vitesse de phase est toujours supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide et peut même tendre vers l'infini, sans contradiction avec le principe de relativité car la vitesse de phase est la vitesse d'une OPPH sans réalité physique elle ne représente ni la vitesse de propagation de l'énergie, ni celle de l'information). Seule la superposition (infinie) d'OPPH possède un sens physique, et cette superposition se déplace à la vitesse de groupe qui reste bien inférieure à c.



- L'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km (voir article "Le Météo"). (et résultat classique d'examen)
- on se dépend de l'altitude donc ω_p dépend de l'altitude.

Pour communiquer avec le satellite, il faut traverser la ionosphère \forall altitude $h \leq 36000$ km

donc il faut que la pulsation ω de l'onde vérifie

$$\omega > \omega_p(h) \quad \forall h \leq 36000 \text{ km.}$$

soit $\omega > \omega_p^{\max} = \sqrt{\frac{n_{e,\max} e^2}{m_e \epsilon_0}}$

avec $n_{e,\max} \approx 0,8 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ (300 km de jour sur figure 6)

AN

$$\omega > 0,2 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\text{soit } f > 0,03 \text{ GHz.}$$

cohérent (radio AM #160kHz ne traverse pas ionosphère FM #100MHz traverse)

Q 31. Donner la configuration électronique de l'élément lithium dans l'état fondamental. À quelle famille appartient-il ?

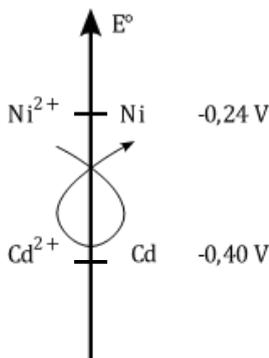
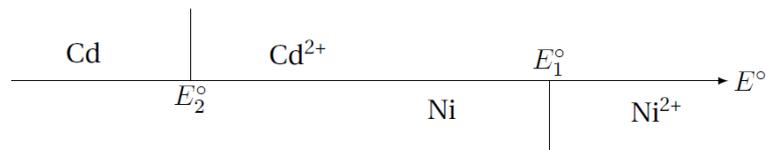
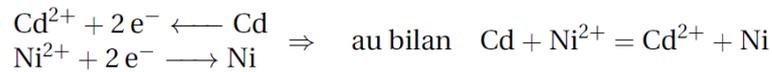
PROBLEME N°3 – A) PILES CADMIUM - NICKEL (E3A MPI 2023)

1. On a :



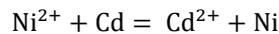
Réducteur : donneur d'électron, oxydant : accepteur d'électrons

2. Pour avoir une réaction thermodynamiquement favorisée, il faut que les espèces avec des domaines de stabilité disjoints réagissent soit ici Cd avec Ni^{2+}



Pour déterminer la réaction thermodynamiquement la plus favorisée, sans avoir nécessairement une constante d'équilibre $K^\circ > 1$, on peut placer les espèces sur une échelle de potentiel redox standard et identifier le meilleur oxydant et le meilleur réducteur.

La réaction favorisée thermodynamiquement est celle ayant lieu entre l'oxydant le plus fort (Ni^{2+}) avec le réducteur le plus fort (Cd) selon la réaction d'équation bilan ;

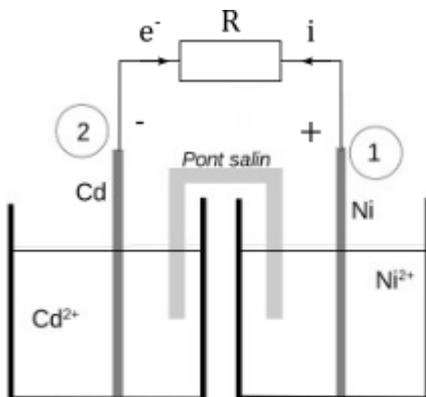


3. On calcule les potentiels d'électrodes par la formule de Nernst, les activités des solides étant toujours égales à 1

$$E_1(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = E^\circ(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{[\text{Ni}^{2+}]}{c^\circ}\right) = E^\circ(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{c_1}{c^\circ}\right) = -0,28 \text{ V}$$

$$E_2(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) = E^\circ(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{[\text{Cd}^{2+}]}{c^\circ}\right) = E^\circ(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{c_2}{c^\circ}\right) = -0,49 \text{ V}$$

On en déduit que la fém de la pile à vide (en circuit ouvert) vaut $U = E_1 - E_2 = 0,21 \text{ V}$, l'électrode de Ni constituant le pôle positif de la pile et l'électrode de cadmium son pôle négatif.



Q4. Les électrons sont attirés par le pôle positif de la pile, ils sont libérés au niveau de l'électrode de cadmium par oxydation du cadmium (qui constitue donc l'anode).

Le courant est orienté dans le sens inverse, du pôle positif vers le pôle négatif de la pile, ce qui est cohérent avec le fait que la pile se comporte en générateur.

Q5. La pile cesse de débiter lorsque la fém devient nulle et donc que les potentiels d'électrodes deviennent égaux, i.e. pour des concentrations finales c_{1f} et c_{2f} telles que

$$E_{1,\text{éq}}(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = E^\circ(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{c_{1f}}{c^\circ}\right) = E_{2,\text{éq}}(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) = E^\circ(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{c_{2f}}{c^\circ}\right)$$

Ce qui implique

$$\frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left(\frac{c_{2f}}{c_{1f}} \right) = E_1^\circ - E_2^\circ \approx \frac{1}{0,03} \ln \left(\frac{c_{2f}}{c_{1f}} \right) \Leftrightarrow \frac{c_{2f}}{c_{1f}} = \exp \left(\frac{(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0,03} \right) \stackrel{AN}{=} 2,2 \cdot 10^5$$

qui n'est rien autre que la loi d'action de masse $Q_{r, \text{éq}} = \frac{[Cd^{2+}]}{[Ni^{2+}]} = K^\circ = \exp \left(\frac{(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0,03} \right)$

Afin de déterminer réalise un tableau d'avancement

	Ni^{2+}	Cd	=	Ni	Cd^{2+}
EI	c_1V	excès		excès	c_2V
Ec	$c_1V - \xi$	excès		excès	$c_2V + \xi$
EF	$c_1V - \xi_f$	excès		excès	$c_2V + \xi_f$

On détermine alors ξ_f en résolvant l'équation

$$\frac{c_2V + \xi_f}{c_1V - \xi_f} = K^\circ \Leftrightarrow \xi_f = \frac{1}{1 + K^\circ} (K^\circ c_1V - c_2V) \approx c_1V$$

	Ni^{2+}	Cd	=	Ni	Cd^{2+}
EF mol	$\approx 0 = \frac{(c_2 + c_1)V}{K^\circ} = 2,10^{-9}$	excès		excès	$c_2V + \xi_f \approx (c_2 + c_1)V = 5,1 \cdot 10^{-3}$

La réaction a donc consommé quasiment tous les ions Ni^{2+} , soit environ $5,0 \cdot 10^{-3}$ mol et produit $5,0 \cdot 10^{-3}$ mol de nickel. Pour cela, $5,0 \cdot 10^{-3}$ mol de cadmium ont été oxydé en autant d'ions Cd^{2+} .

A la fin de la réaction, les potentiels d'électrodes sont égaux

$$E_1 = E_2 = E^\circ(Ni^{2+}/Ni) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left(\frac{c_{1f}}{c^\circ} \right) = -0,44 \text{ V}$$

Q6. Évaluer la durée de fonctionnement de la pile ainsi que sa capacité totale.

Durant la réaction, il a circulé $2\xi_f$ mol d'électrons, soit une charge totale $Q = 2\xi_f | -e | N_A = 965 \text{ C}$.

Sachant que le courant de fonctionnement est de 50 mA, on en déduit la durée de fonctionnement

$$\Delta t = \frac{Q}{i} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ s} = 5\text{h}21\text{min}40\text{s}$$

La capacité de la pile vaut $Q = 965 \text{ C} = 0,27 \text{ Ah}$

Q7. Un milieu basique est tel que $[HO^-] > [H_3O^+]$, soit $pH > 7$ dans les conditions usuelles

8. On a

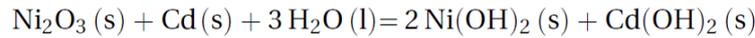
$$\text{dans } Ni_2O_3, \quad 2 \text{no}(\text{Ni}) + \underbrace{3 \text{no}(\text{O})}_{=-II} = 0 \Rightarrow \text{no}(\text{Ni}) = +III$$

$$\text{dans } Ni(\text{OH})_2, \quad \text{no}(\text{Ni}) + \underbrace{2 \text{no}(\text{O})}_{=-II} + \underbrace{2 \text{no}(\text{H})}_{=+I} = 0 \Rightarrow \text{no}(\text{Ni}) = +II$$

$$\text{dans } Cd(\text{OH})_2, \quad \text{no}(\text{Cd}) + \underbrace{2 \text{no}(\text{O})}_{=-II} + \underbrace{2 \text{no}(\text{H})}_{=+I} = 0 \Rightarrow \text{no}(\text{Cd}) = +II$$

Bien entendu, dans Cd (s), $\text{no}(\text{Cd}) = 0$.

Il faut équilibrer en élément ($2 Ni(\text{OH})_2$ à droite) puis en variation de nombre d'oxydation (on a $2 \times -I$ pour Ni et $+II$ pour Cd) puis en O avec H_2O et en H avec H^+ (et vérifier au passage que c'est équilibré en charge) soit



A noter que je trouve inquiétant que Ni passe de +III à +II au lieu de passer de +II à 0 (il ne s'agit plus du tout des mêmes couples)

PROBLEME N°3 – B) BATTERIES LITHIUM-IONS (CCS MPI 2023)

Q27

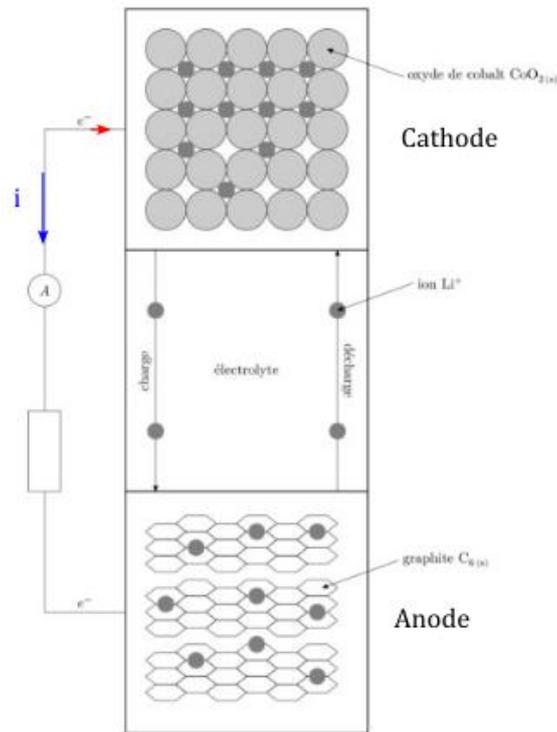
À l'anode a lieu l'oxydation, soit $\text{Li}_{(\text{s})} = \text{Li}_{(\text{aq})}^+ + e^-$

À la cathode a lieu la réduction $\text{Li}_{(\text{aq})}^+ + e^- + \text{CoO}_{2(\text{s})} = \text{LiCoO}_{2(\text{s})}$

Q28

L'équation bilan en décharge est : $\text{Li}_{(\text{s})} + \text{CoO}_{2(\text{s})} = \text{LiCoO}_{2(\text{s})}$

L'équation bilan en charge est la réaction inverse : $\text{LiCoO}_{2(\text{s})} = \text{Li}_{(\text{s})} + \text{CoO}_{2(\text{s})}$



Q29

La capacité de la batterie est de 1440 mA·h (fournie dans les données). On en déduit qu'il circulera donc une quantité d'électricité $Q = 1,44 \times 3600 \text{ C} = n|-e|N_A\xi = \mathcal{F}\xi$. On en déduit l'avancement total jusqu'à usure de la pile $\xi = \frac{Q}{\mathcal{F}}$. On doit donc disposer au minimum de cette quantité de matière de lithium présent initialement sous forme de lithium graphite, ce qui correspond à la masse

$$m(\text{LiC}_6) = n(\text{LiC}_6) \times M(\text{LiC}_6) = \frac{Q}{\mathcal{F}} M(\text{LiC}_6) \stackrel{AN}{=} 4,2 \text{ g}$$

Q30

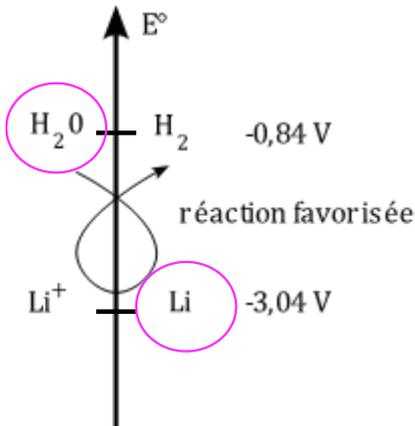
L'énergie délivrée pendant la durée la durée de décharge, qui n'est autre que l'autonomie $\tau = 8 \text{ h}$ fournie, vaut $E = P \times \tau = E_0 \times Q$.

On en déduit l'énergie massique en divisant par la masse fournie de la batterie :

$$\frac{\mathcal{E}}{m} = \frac{E_0 \times Q}{m} = 788 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} = 219 \text{ W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$$

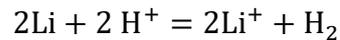
Ce qui est en accord avec la valeur de $218 \text{ W}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ annoncée dans la notice.

Q31



La réaction favorisée thermodynamiquement est celle de l'oxydant le plus fort (ici l'eau) sur le réducteur le plus fort (ici le lithium)

On en déduit l'équation bilan en milieu acide



Et en milieu basique



Q32

À basse température, la capacité de la batterie d'accumulateur décroît rapidement, à -40°C elle est divisée d'un facteur 9 par rapport à celle à 25°C . Ceci peut notamment s'expliquer par la solidification de l'électrolyte qui doit freiner considérablement la migration des ions Li^+ dans l'électrolyte.

À haute température, le danger est l'explosion et la libération de composés toxiques qui en résulte...

PROBLEME N°4 : BRONZAGE SUR LES PLAGES DE LA COTE D'ARGENT ET PROTECTION SOLAIRE (CCINP MPI 2024)

Q36. Pour la solution (i), la concentration en diiode C_i est telle que

$$C_i = \frac{n_i}{V_i} = \frac{m_i}{M(\text{I}_2)V_i}$$

A.N.

$$C_i = \frac{1,250 \text{ g}}{2 \times 127 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} \times 0,100 \text{ L}} = 0,05 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

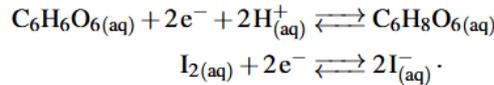
Pour la solution (t), la concentration en diiode C_t est telle que

$$C_t = \frac{n_t}{V_t} = \frac{m_t}{M(\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3)V_t}$$

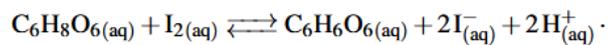
A.N.

$$C_i = \frac{1,500 \text{ g}}{(2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 3 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \times 0,100 \text{ L}} = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

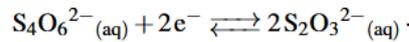
Q37. Une réaction a lieu entre l'acide ascorbique et le diiode, deux espèces dans les demi-équations d'oxydoréduction sont



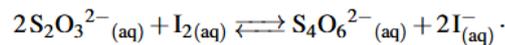
Ainsi l'équation de la réaction dans l'erenmeyer est



La réaction de dosage a lieu entre le diiode en excès et l'ion thiosulfate dont la demi-équation d'oxydoréduction est



L'équation de la réaction de dosage est donc



Q38. Après la réaction dans l'erenmeyer, il reste une quantité de diiode $C_i V_i - n_a$.

La réaction de dosage implique une réaction stœchiométrique entre les ions thiosulfates et le diiode restant, soit

$$\frac{C_i V_i}{2} = C_i V_i - n_a.$$

Il vient donc que

$$n_a = C_i V_i - \frac{C_i V_i}{2}.$$

Q39. Le degré de pureté, noté p , est défini tel

$$p = \frac{m(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)}{m_t} = \frac{M(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)}{n_a m_t}$$

soit

$$p = \frac{M(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6) \left(C_i V_i - \frac{C_i V_i}{2} \right)}{m_t}$$

avec m_t = la masse de la poudre contenant l'acide ascorbique.

A.N.

$$p = \frac{(72 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \left(0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 30 \times 10^{-3} \text{ L} - \frac{0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 19,4 \times 10^{-3} \text{ L}}{2} \right)}{0,500 \text{ g.}} = 19\%$$