

■ Au programme des exercices

- Chapitre CHIM3 : Réactions d'oxydoréduction
- Chapitre OND4 : Ondes dans les métaux en régime lentement variable (**attention ! pas encore d'exercices sur les réflexions, cavités, etc.**)

■ Questions de cours

1. ❤️❤️ Soient les couples : $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ et I_2/I^- de potentiels redox standards respectifs E_1° et E_2° . Ecrire l'équation de réaction des ions dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ par les ions iodure I^- . Identifier l'oxydant et le réducteur. Etablir l'expression de la constante d'équilibre de la réaction en fonction des potentiels standards.

2. ❤️ On considère la pile étain/mercure schématisée comme suit



Les solutions de chacune des deux demi-piles ont le même volume $V = 50,0 \text{ mL}$, avec les concentrations suivantes :

$$[\text{Hg}_2^{2+}]_0 = c_0 = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Hg}^{2+}]_0 = [\text{Sn}^{4+}]_0 = c_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Sn}^{2+}]_0 = c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{On donne } E_1^\circ = E^\circ(\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}) = 0,91 \text{ V et } E_2^\circ = E^\circ(\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}) = 0,15 \text{ V.}$$

Faire un schéma de la pile en commentant (jonction électrolytique notamment). Déterminer la polarité de la pile et l'équation de sa réaction de fonctionnement, en indiquant l'anode et la cathode. Quel est le critère vérifié lorsque la pile est « usée » ?

3. ❤️ On étudie le dosage des ions hypochlorite ClO^- à la concentration C_s dans une solution (S) par iodométrie.

$$\text{Données : } E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V ; } E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V ; } E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,70 \text{ V}$$

Etape (1) : Prélever un volume $V_s = 20,0 \text{ mL}$ de solution (S) et y ajouter $V_I = 20 \text{ mL}$ d'une solution d'iodure de potassium (K^+, I^-) à $C_I = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ en milieu acide.

Etape (2) : Doser ce mélange par du thiosulfate à $C = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$; le volume équivalent est $V_e = 13,0 \text{ mL}$.

Ecrire les équations des réactions mises en jeu au cours des étapes (1) et (2) et déterminer la concentration C_s en ions hypochlorite de la solution (S).

4. ❤️ On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble \vec{v} et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{14} \text{ s}$. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

5. ❤️❤️ Etablir l'équation de propagation du champs électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.

6. ❤️❤️ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On recherche \vec{E} solution sous la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$, en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Etablir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde \underline{k} et celle de \vec{E} sachant que l'on cherche des solutions bornées.

7. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

8. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

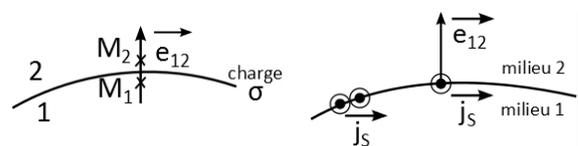
Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé puis du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu. Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée puis celle de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée). Commenter

9. ❤ On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est

$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.

10. ❤❤ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

11. ** On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$. Etablir l'expression du courant surfacique \vec{j}_s généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

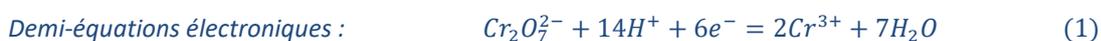
12. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, et on recherche les solutions de la forme : $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier. Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$ où $k > 0$ et résoudre cette équation.

13. ❤ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,

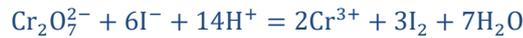
■ Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤❤ Soient les couples : $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ et I_2/I^- de potentiels redox standards respectifs E_1° et E_2° . Ecrire l'équation de réaction des ions dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ avec les ions iodure I^- . Identifier l'oxydant et le réducteur. Donner les expressions des potentiels redox associés à chaque couple.

Pour les non cœurs ou en exo : établir l'expression de la constante d'équilibre de la réaction en fonction des potentiels standards.



Pour se ramener au même nombre d'électrons échangés dans les deux demi-équations : $(2) \times 3$



Réduction des ions dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et oxydation des ions iodure I^- , donc $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ oxydant et I^- réducteur.

D'après la L.A.M. : $K^\circ = \frac{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{éq}}^2 [\text{I}_2]_{\text{éq}}^3}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{éq}} [\text{H}^+]_{\text{éq}}^{14} [\text{I}^-]_{\text{éq}}^6}$

Loi de Nernst :

$$E(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) = E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)$$

$$E(\text{I}_2/\text{I}^-) = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right)$$

A l'équilibre, $E(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+})_{\text{éq}} = E(\text{I}_2/\text{I}^-)_{\text{éq}}$ soit

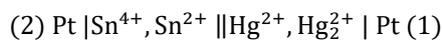
$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{éq}} [\text{H}^+]_{\text{éq}}^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{éq}}^2} \right) = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{I}_2]_{\text{éq}}}{[\text{I}^-]_{\text{éq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = \frac{0,06 \times 3}{6} \log \left(\frac{[\text{I}_2]_{\text{éq}}}{[\text{I}^-]_{\text{éq}}^2} \right) - \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{éq}} [\text{H}^+]_{\text{éq}}^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{éq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = \frac{0,06}{6} \log(K^\circ)$$

$$K^\circ = 10^{\frac{6(E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-))}{0,06}} = 10^{\frac{6(E^\circ_{\text{ox}} - E^\circ_{\text{red}})}{0,06}}$$

2. ♥ On considère la pile étain/mercure schématisée comme suit



Les solutions de chacune des deux demi-piles ont le même volume $V = 50,0 \text{ mL}$, avec les concentrations suivantes :

$$[\text{Hg}_2^{2+}]_0 = c_0 = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Hg}_2^{2+}]_0 = [\text{Sn}^{4+}]_0 = c_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Sn}^{2+}]_0 = c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

On donne $E_1^\circ = E^\circ(\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}) = 0,91 \text{ V}$ et $E_2^\circ = E^\circ(\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}) = 0,15 \text{ V}$.

Faire un schéma de la pile en commentant (jonction électrolytique notamment). Déterminer la polarité de la pile et l'équation de sa réaction de fonctionnement, en indiquant l'anode et la cathode. Quel est le critère vérifié lorsque la pile est « usée » ?

Pour déterminer la polarité de la pile, il faut déterminer quelle électrode a le potentiel le plus élevé.



formule de Nernst à l'état initial :

$$E_{1,0} = E_1^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Hg}_2^{2+}]_0^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]_0 c^\circ}$$

A.N. : $E_{1,0} = 0,91 + 0,03 \log 50 = \mathbf{0,96 \text{ V}} = E_{1,0}$

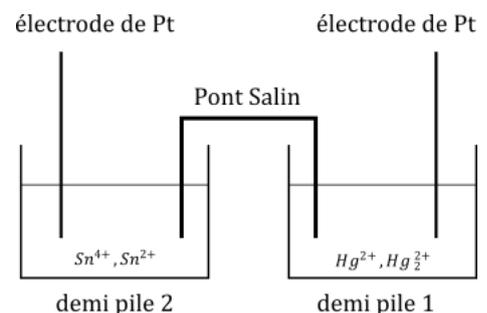


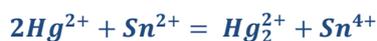
$$E_{2,0} = E_2^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Sn}^{4+}]_0}{[\text{Sn}^{2+}]_0}$$

A.N. : $E_{2,0} = 0,15 + 0,03 \log 10^{-1} = \mathbf{0,12 \text{ V}} = E_{2,0}$

$E_{1,0} > E_{2,0}$: la demi pile au mercure constitue la borne positive de la pile, lieu d'arrivée des électrons, donc de la réduction : il s'agit de la **cathode**. La demi-pile au sélénium constitue sa borne négative, lieu de départ des électrons, donc de l'oxydation : il s'agit de l'**anode**.

En fonctionnement, la réaction de la pile est





Pile usée quand $E_{1,\text{éq}} = E_{2,\text{éq}}$

3. ♥♥ On étudie le dosage des ions hypochlorite ClO^- à la concentration C_S dans une solution (S) par iodométrie.

Données : $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$; $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V}$; $E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,70 \text{ V}$

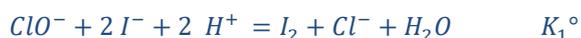
Etape (1) : Prélever un volume $V_S = 20,0 \text{ mL}$ de solution (S) et y ajouter $V_I = 20 \text{ mL}$ d'une solution d'iodure de potassium (K^+, I^-) à $C_I = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ en milieu acide, les ions iodure étant en excès.

Etape (2) : Doser ce mélange par du thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ à $C = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$; le volume équivalent est $V_e = 13,0 \text{ mL}$.

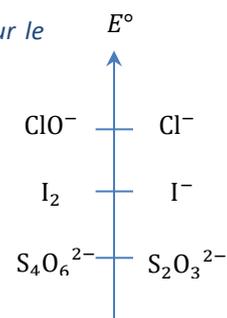
Ecrire les équations des réactions mises en jeu au cours des étapes (1) et (2) et déterminer la concentration C_S en ions hypochlorite de la solution (S).

1. **Etape 1** : mélange d'ions ClO^- , Cl^- et I^- .

réaction thermodynamiquement la plus favorisée : meilleur oxydant (de potentiel E° le plus élevé) sur le meilleur réducteur (de potentiel E° le plus faible), soit ici, après avoir équilibré la réaction redox :



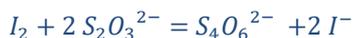
ΔE° élevée, on a donc $K_1^\circ \gg 1$: la réaction est quasi-totale ; les ions iodure I^- étant en excès, les ions ClO^- sont quasi totalement consommés.



en moles	ClO^-	+	$2 \text{I}^- + 2 \text{H}^+$	=	I_2	+	$\text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$
E.I.	$C_S V_S$		$C_I V_I$		0		x
E.F.	$C_S V_S - \xi_F = 0$		$C_I V_I - 2\xi_F$		$\xi_F = C_S V_S$		$x + \xi_F = x + C_S V_S$
			$= C_I V_I - 2C_S V_S$				

Il y a donc formation de $\xi_F = C_S V_S$ moles de I_2 (voir bilan ci-dessus).

Etape 2 : Dosage du mélange obtenu, soit I^- , I_2 et Cl^- par le thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. Cf. échelle des potentiels E° : la réaction ayant lieu est celle du meilleur oxydant sur le meilleur réducteur, soit ici :



en moles	I_2	+	$2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	=	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$	+	2I^-
E.I.	$C_S V_S$		CV		0		$C_I V_I - 2C_S V_S$
E.F. pour $V = V_e$	$C_S V_S - \xi_e = 0$		$CV_e - 2\xi_e = 0$		ξ_e		$C_I V_I - 2C_S V_S + 2\xi_e$

relation à l'équivalence en tenant compte de la stœchiométrie de la réaction de dosage :

$$\xi_e = C_S V_S = \frac{1}{2} CV_e$$

4. ♥ On considère une OPDM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble \vec{v} et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{-14} \text{ s}$. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

$$\text{PFD} : m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

$$\text{en notation complexe} : i\omega \vec{v} = -\vec{v}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m} \text{ soit } \vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{im\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1 + i\omega\tau}$$

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1 + i\omega\tau} \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\text{loi d'Ohm} \\ \text{locale}}}{\equiv}} \frac{\gamma(\omega)}{\gamma(\omega)} \underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1 + i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1 + i\omega\tau}$$

On a donc $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

pour $\omega\tau \ll 1$: $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \approx \gamma_0$

5. ♥♥ Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.

Voir cours

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\underline{\vec{E}}) - \underline{\Delta} \underline{\vec{E}}) \stackrel{\substack{\text{M.G.} \\ \text{M.F.}}}{\equiv} - \underline{\Delta} \underline{\vec{E}} \stackrel{\substack{\text{M.G.} \\ \text{M.F.}}}{\equiv} \overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \right) = - \underline{\Delta} \underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}}) \stackrel{\substack{\text{M.A.}}}{\equiv} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \underline{\vec{E}}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

6. ♥♥ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$. On recherche $\underline{\vec{E}}$ solution sous la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \underline{\vec{e}}_y$, en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde \underline{k} et celle de $\underline{\vec{E}}$ sachant que l'on cherche des solutions bornées.

La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \underline{\vec{e}}_y$$

$$\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \underline{\vec{E}}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Avec $\underline{k} = k_r + ik_i$:

Méthode 1 de résolution :

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Méthode 2 de résolution

$$\underline{k}^2 = (k_r + ik_i)^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

$$k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

On en déduit $|k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega$ soit en notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$,

$$|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})}$$

Si $\underline{E}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe \oplus est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-j)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta} x)} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\substack{\text{atténuation} \\ \text{par effet Joule}}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

7. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

8. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé puis du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu. Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée puis celle de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée). Commenter

9. ♥ On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.

$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ vérifie également par linéarité l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp(i\frac{\pi}{2})$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta} x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i \frac{x}{\delta}\right)$$

Le second terme est à exclure, l'amplitude divergerait avec x : \underline{B} est nécessairement nul.

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{A} \exp(i\omega t) = a_0 \exp(i\omega t)$$

$$\underline{A} = a_0$$

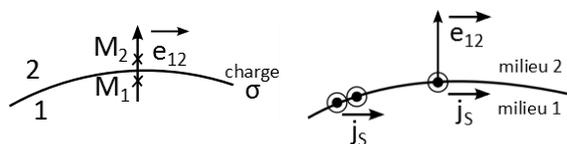
On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \text{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

10. ♥♥ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

a. Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait : $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$ et $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$, soit dans les relations de passage avec $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents : $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$
Le champ \vec{E}_i ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi \vec{E}_r se propageant suivant $-\vec{e}_x$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation ω que l'onde incidente.

Soient \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

■ **Champ électrique réfléchi (par exemple méthode complexe) :** on le cherche sous la forme $\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en $x = 0^-$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(0^-, t) &= \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} \\ &= \left(\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z \right) e^{i(\omega t)} \end{aligned}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(0^-, t) &= \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} \\ &= \left(\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z \right) e^{i(\omega t)} \end{aligned}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$ et $\underline{E}_{0rz} = 0$, soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement, $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Même amplitude et même polarisation mais déphasage de π

■ **Champ magnétique réfléchi :** $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

■ **Champ électrique résultant**

■ **Méthode N°1 : notation complexe**

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \underline{\vec{E}}_i(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \vec{E}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) \vec{e}_y = E_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

En prenant la partie réelle pour obtenir l'expression du champ réel :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \text{Re}(-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y) = -2E_0 \sin(kx) \text{Re}(ie^{i\omega t}) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \text{Re}(ie^{i\omega t}) = \text{Re}[i(\cos \omega t + i \sin(\omega t))] = -\sin(\omega t)$$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

Méthode N°2 : avec les champs réels

D'après le principe de superposition, $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$, soit d'après les résultats obtenus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \text{soit ici}$$

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

■ Champ magnétique résultant

Attention !! une onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP !! \vec{B} ne peut se calculer à l'aide de la relation de structure.

Méthode N°1

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

$$\text{Or } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{soit ici } \cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$$

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

Méthode N°2 : En exploitant l'équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

$$\text{avec } \vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y :$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} \wedge -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ \frac{\partial}{\partial x} & (-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t}) \end{vmatrix} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

Soit

$$\vec{B} = 2 \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

11. ** On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$. Etablir l'expression du courant surfacique \vec{j}_s généré à la surface et commenter le résultat obtenu.
12. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, et on recherche les solutions de la forme : $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier. Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$ où $k > 0$ et résoudre cette équation.
13. ❤ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle à tout instant et un ventre par une amplitude maximale.

Abcisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	\vec{E}	\vec{B}
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$