TD CHAP.OND.5 : DIPOLE OSCILLANT

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Validité des hypothèses d'étude du dipôle oscillant IMPORTANT | 1 | 1

Préciser pour les deux cas suivants si les approximations dipolaires et non relativistes sont respectées :

- la lumière visible émises par une lampe spectrale de TP,
- les ondes radio FM ($f \simeq 100$ MHz) émises par une antenne d'un mètre de longueur.

Exercice 2. Homogénéité des expressions des champs du dipôle rayonnant IMPORTANT | 1 | 1

Vérifier l'homogénéité des expressions fournies :

$\vec{E}(M,t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\, \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M,t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\, \vec{e}_\varphi$

Exercice 3. Dipôle oscillant et vecteur de Poynting IMPORTANT | 1 | 2

On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant :

$\vec{E}(M,t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\, \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M,t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\, \vec{e}_\varphi$

1 - Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé ainsi que son intensité $I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M,t)\| \rangle$.

2 - Déterminer l'indicatrice de rayonnement du dipôle oscillant, définie par

$$\mathcal{I}(\theta,\varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta,\varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}} = \frac{I(M)}{I_{max}}$$

Exercice 4. Affaiblissement de l'onde avec la distance IMPORTANT | 2 | 2

La puissance surfacique moyenne en un point M est $\|\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle\| = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2\theta$

1 - Etablir l'expression de la puissance moyenne traversant une sphère $\mathcal{S}(r)$ de centre O et de rayon r, de l'intérieur vers l'extérieur.

2 - Commenter le résultat obtenu.

Exercice 5. Rayonnement dipolaire et couleur du ciel IMPORTANT | 2 | 1

On admet que l'amplitude p_0 des dipôles induits par la lumière solaire est indépendante de la longueur d'onde de la lumière incidente (diffusion Rayleigh), et on rappelle que $\langle \mathcal{P} \rangle_{rayonnée} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$.

1- Justifier que lors de la traversée de l'atmosphère, la lumière solaire bleue soit plus rayonnée (notamment latéralement) que la lumière rouge, expliquant la couleur bleue du ciel.

2- Corrélativement, expliquer que la lumière s'appauvrit plus en lumière bleu qu'en lumière rouge dans le sens du faisceau principal, expliquant que celui-ci vire au rouge au soleil couchant.

EXERCICES

Exercice 6. Durée de vie atomique en physique classique IMPORTANT | 2 | 1

Dans le modèle de Rutherford, on représente un atome par un noyau immobile de charge $+e$ autour duquel tourne un électron de masse m et de charge $-e$, en orbite circulaire de rayon r.

1. Que vaut l'énergie mécanique d'un électron sur une telle orbite ?
2. L'électron émet-il un rayonnement électromagnétique sur cette orbite ? Écrire la puissance rayonnée sachant qu'elle est donnée par la **formule de Larmor** $\boldsymbol{\mathcal{P}_{ray} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2a^2}{c^3}}$ où a est l'accélération de la particule chargée. On supposera par la suite que cette puissance est la seule puissance perdue par l'atome.
3. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique à l'électron. Trouver l'évolution du rayon de l'orbite de l'électron en supposant que, pendant une révolution, le rayon de l'orbite ne varie que peu. En déduire la durée de vie de l'électron sur son orbite. Réaliser l'application numérique et commenter la valeur obtenue.
4. En physique classique, l'atome de Rutherford semble toujours promis à l'effondrement de l'électron sur le noyau et ce modèle semble incapable d'expliquer la stabilité de la matière atomique. Citer un autre exemple d'incompatibilité entre la mécanique classique et le comportement de l'atome.

Exercice 7. Atome de Thomson IMPORTANT | 2 | 2

À la suite de ses travaux sur les rayons cathodiques et sa découverte de l'électron en 1897, Joseph John Thomson, physicien anglais, émit l'hypothèse que les électrons étaient contenus dans les atomes.

Il proposa un modèle de l'atome qu'il surnomma lui-même "*plum pudding model*". Les atomes selon Thomson sont constitués :

— d'une sphère pleine positivement et uniformément chargée dont le rayon est de l'ordre du nanomètre;

— d'électrons ponctuels qui peuvent vibrer librement à l'intérieur de la sphère.

L'atome reste électriquement neutre. Ainsi, l'atome d'hydrogène est représenté dans cet exercice par une sphère de centre O, de rayon R et de charge $+e$, ainsi que par un électron de charge $-e$ et de masse m_e.

1 - Exprimer le moment dipolaire de l'atome d'hydrogène à un instant où l'électron se trouve en M tel que $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$.

2 - Montrer que le champ électrique auquel l'électron est soumis est $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\, r\,\vec{u}_r$.

3 - L'électron est initialement à la position $\overrightarrow{OM}(0) = z_0\,\vec{u}_z$ et n'a pas de vitesse initiale. Exprimer la loi horaire de son mouvement $z(t)$. Calculer la pulsation ω_0 du mouvement

Données : $R = 0{,}10$ nm, $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg ; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}.

À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ?

Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction de z_0, m_e et ω_0.

4- Le mouvement de l'électron est amorti du fait des pertes par rayonnement. On se propose de déterminer le temps caractéristique d'amortissement, temps supposé très supérieur à la période d'oscillation. On rappelle que la puissance rayonnée par un dipôle oscillant de pulsation ω et d'amplitude p_0 est $\mathcal{P}_{ray} = \frac{p_0^2}{12\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4}{c^3}$.

4.a) Exprimer la puissance rayonnée par l'électron en fonction de l'amplitude de ses oscillations z_0, puis en fonction de l'énergie mécanique E.

4.b) En déduire que E décroît exponentiellement avec un temps caractéristique que l'on exprimera et que l'on calculera. Conclure.

Exercice 8. Puissance d'un émetteur radio 2 | 2

L'antenne d'un émetteur radio est assimilée à un dipôle électrique oscillant vertical placé au niveau du sol. La puissance de l'émetteur est P.

Exprimer l'amplitude d'oscillation du champ électrique E_m en un point situé au sol, à distance d de l'émetteur.

On rappelle que le champ électrique du dipôle électrique oscillant, en coordonnées sphériques d'axe parallèle au dipôle, est de la forme $\vec{E}(M,t) = \frac{A\omega^2}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr + \psi_0)\,\vec{e}_\theta$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Application numérique : $P = 200$ W, $d = 1{,}0 \times 10^3$ m et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H. m^{-1}. Calculer E_m (il faut multiplier le résultat par 2 pour tenir compte du fait que le sol est conducteur et qu'il se produit une réflexion à sa surface)

Exercice 9. Couleur du ciel IMPORTANT | 2 | 2

Pour décrire l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement électromagnétique du soleil on adopte le modèle suivant, appelé *modèle de l'électron élastiquement lié* :

— les noyaux atomiques sont fixes;

— chaque électron (de masse me) est traité indépendamment des autres et considéré comme soumis, en plus de la force exercée par le champ électromagnétique, à une force de rappel élastique $\vec{F} = -m_e\omega_0^2\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le déplacement de l'électron par rapport à sa position au repos, ainsi qu'à une force dissipative modélisée comme un frottement fluide $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}$

On prend pour valeurs des paramètres du modèle $\omega_0 = 2{,}0 \times 10^{16}$ rad.s^{-1} et $\tau \approx 1 \times 10^8$ s.

1 - On étudie le mouvement forcé de l'électron sous l'action du champ électromagnétique d'une onde excitatrice. Le champ électrique en notation complexe de cette onde est $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(i(\omega t - kz)\big)\,\vec{u}_x$. On admet que la vitesse de l'électron reste très inférieure à la vitesse de la lumière c.

1.a) Écrire l'équation du mouvement de l'électron en utilisant une approximation usuelle.

1.b) On cherche la solution sous la forme $\underline{\vec{r}} = \vec{r}_0 \exp\big(i(\omega t - kz)\big)$. Déterminer r_0.

1.c) En déduire le moment dipolaire induit par l'onde sous la forme $\underline{\vec{p}} = \vec{p}_0 \exp\big(i(\omega t - kz)\big)$. On notera e la valeur absolue de la charge de l'électron.

1.d) Simplifier l'expression de $\vec{p}_0$ en tenant compte des valeurs numériques fournies et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse.

1.e) Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}_{ray}$ rayonnée par ce dipôle oscillant en fonction de E_0 et ω ainsi que d'autres paramètres caractéristiques du modèle.

1.f) Expliquer à l'aide de ce modèle la couleur bleue du ciel.

2.a) Rappeler l'expression de l'intensité I de l'onde excitatrice (moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting) en fonction de E_0.

2.b) Exprimer la puissance rayonnée sous la forme $\mathcal{P}_{ray} = \sigma(\omega)I$. Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$?

2.c) On suppose que le milieu contient N électrons par unité de volume. L'énergie rayonnée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente ce qui fait que l'intensité $I(z)$ diminue avec z. En faisant un bilan d'énergie sur un cylindre dont les bases sont dans les plans de cotes z et $z + dz$, établir une équation différentielle de la forme $\frac{dI}{dz} + \frac{1}{\delta}I(z) = 0$, où δ est fonction de ω et des paramètres du modèle. Résoudre cette équation. Quelle est la signification physique de δ ?

2.d) Calculer la valeur de δ pour une lumière bleue ainsi que pour une lumière rouge.

Données : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg ; $\lambda_{bleu} = 0{,}45$ µm ; $\lambda_{rouge} = 0{,}75$ µm ;
$N = 3{,}0 \times 10^{-26}$ m^{-3} ; $c = 3 \times 10^8$ m. s^{-1} ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H. m^{-1}.

2.e) Expliquer, à l'aide de ce modèle, la couleur du soleil couchant.

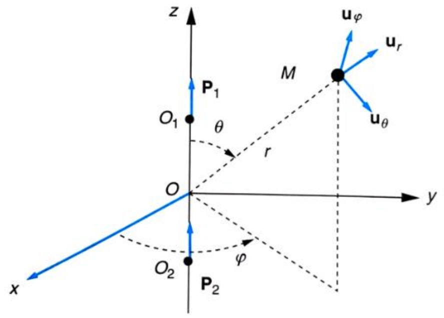
Exercice 10. Modèle d'antenne 2 | 3

Deux dipôles oscillants de moments dipolaires respectifs $\vec{p}_1 = p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{c}\right)\vec{u}_z$ et $\vec{p}_2 = p_0\, cos\left(\omega t + \frac{\omega a}{c}\right)\vec{u}_z$ sont placés aux points O_1 et O_2 de l'axe Oz de cotes respectives $z_1 = a$ et $z_2 = -a$.

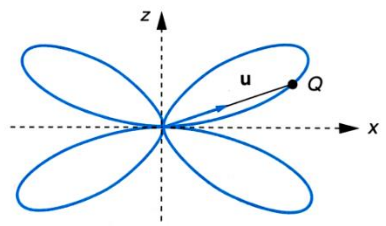
En un point M éloigné, on peut considérer que les champs ont été émis par O pour exprimer tous les facteurs géométriques $r_1/c = O_1M/c$ et $r_2/c = O_2M/c$.

On supposera que l'approximation $a \ll \lambda \ll r$ est respectée. Dans la zone de rayonnement, ces deux dipôles rayonnent alors un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \left(\ddot{p}_1\left(t - \frac{r_1}{c}\right) + \ddot{p}_2\left(t - \frac{r_2}{c}\right)\right)\frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\,\vec{u}_\theta$$



1. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de $r, a\ et\ \theta$ en limitant les calculs à l'ordre 1 en l'infiniment petit a/r.
2. En admettant qu'à grande distance, l'onde est localement plane de direction de propagation $\vec{u}_r$, en déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.
3. En déduire l'expression de la norme du vecteur de Poynting.
4. Dans le cas d'une antenne demi-onde, c'est-à-dire telle que $2\omega a/c = \pi$, on a tracé ci-dessous l'indicatrice de rayonnement en portant dans chaque direction $\vec{u}_r$ du plan une longueur proportionnelle à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting à r fixé. Commenter l'allure de cette indicatrice. Dans quelle direction la puissance moyenne rayonnée est nulle ? Interpréter sans calculs.



Exercice 11. Antenne demi onde 2 | 3

Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \frac{\lambda}{2}$ colinéaire à l'axe (Oz) et de point milieu *O* origine des espaces. Alimentée par un amplificateur de puissance, elle est parcourue par le courant

$$i(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)$$

On rappelle que l'expression du champ électrique élémentaire rayonné par un élément de courant $I(P)dz$ localisé au niveau du point P en un point M repéré par ses coordonnées sphériques $r = OM, \theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$ est :

$$d\underline{\vec{E}} = \frac{j\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin(\theta)}{r}dz \exp\left(j\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right)\vec{e}_\theta$$

1. Exprimer le courant d'antenne en notation complexe $\underline{i}(z,t)$.

2. On souhaite déterminer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en M dans la zone de rayonnement. Pour ce faire, on considère un élément de courant $i(z,t)dz\vec{e}_z$, au point P de l'antenne à la cote z. Exprimer en fonction de z et de θ, la différence de marche δ entre les ondes rayonnées par P et par O dans la direction définie par $(\theta;\varphi)$ en coordonnées sphériques d'axe Oz.

3. Déterminer en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction $(\theta;\varphi)$. On donne l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\exp(jax)\,dx = 2\frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{1-a^2}$$

4. En déduire le champ électrique cherché $\underline{\vec{E}}(M,t) = j\mu_0 c I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{2\pi r \sin(\theta)} \exp\big(j(\omega t - kr)\big)\,\vec{e}_\theta$

5. Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ rayonné par l'antenne.

6. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle R\rangle$.

7. Calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne. On donne :

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}d\theta = 1{,}22$$

8. La **résistance de rayonnement** d'une antenne demi-onde est la grandeur R_a définie par $P = \frac{1}{2}R_a I_0^2$ où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de l'antenne. Déterminer R_a pour une antenne demie–onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numériquement R_a

9. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0, pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est *P* = 2100kW (puissance de l'émetteur Grande Ondes de France Inter à Allouis) ?

10. Quelle est l'intensité du champ électrique rayonné dans le plan équatorial de cette antenne ($\theta = \frac{\pi}{2}$) à la distance $d = 100$km de l'antenne ?

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 12. Amortissement d'un dipôle oscillant 2 | 2

Un dipôle oscillant est modélisé par un ion fixe en O, de charge $+e$, et un électron de charge $-e$ et de masse m pouvant se déplacer le long de l'axe Oz et soumis à une force élastique $\vec{F} = -m_e\omega_0^2 z\vec{e}_z$.

On donne $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5\times10^{14}$ Hz ; $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg .

1) À l'ordre le plus bas non nul, on admet que le mouvement de l'électron n'est pas amorti, avec $z(t) = a\cos(\omega_0 t)$. Exprimer l'énergie mécanique E de l'électron.

2) Rappeler l'expression de la puissance moyenne $\mathcal{P}_{ray}$ rayonnée par un dipôle électrique. En notant la période $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$, exprimer le rapport $\mathcal{P}_{ray}T/E$ en fonction de μ_0, c, e, m et ω_0. Conclure.

3) En déduire que l'amplitude a des oscillations de l'électron décroît exponentiellement avec une constante de temps λ à calculer. Comparer ce résultat avec la durée de cohérence d'une raie émise par une lampe à vapeur de mercure, de l'ordre de 10^{-9} s.

Exercice 13. Diffusion Rayleigh 2 | 2

Une onde électromagnétique monochromatique, de pulsation ω, de champ électrique d'amplitude réelle E_0, est diffusée par les électrons élastiquement liés des atomes ou molécules d'un gaz, dans le domaine où la pulsation de l'onde est très inférieure à la pulsation propre ω_0 de ces électrons. Enfin, on néglige l'amortissement du mouvement des électrons.

1) Retrouver, avec ces approximations, l'expression de l'accélération de l'électron.

2) La formule de Larmor donne pour la puissance rayonnée par une particule de charge q et d'accélération

a :

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{\mu_0 q^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi c}$$

Quelle est la puissance diffusée par un électron?

3) L'onde incidente interagit avec les atomes contenus dans un cylindre d'axe Ox orienté selon la direction de propagation de l'onde. La densité particulaire des atomes est notée n, et on considère qu'un seul électron par atome est impliqué dans le phénomène de diffusion. Si l'intensité énergétique (le flux surfacique) de l'onde incidente est I_0, quelle est la loi d'évolution $I(x)$ dans le cylindre?

4) La fréquence propre de l'électron est de l'ordre de $\nu_0 \approx 10^{15}$ Hz. Évaluer la longueur L caractérisant l'atténuation de l'onde dans le gaz pour la lumière visible (dans des conditions normales de température et de pression). Quel lien ce résultat a-t-il avec la couleur du soleil couchant?

Exercice 14. Section de diffusion de l'électron 2 ou 3 | 1

Un électron de charge e, de masse m, est initialement immobile au point origine O. Une O.P.P.M., polarisée rectilignement selon z avec $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ se propage selon Ox.

1) Montrer qu'en mécanique classique, le mouvement a lieu en première approximation suivant Oz, et donner la position $z(t)$ de l'électron.

2) Sachant qu'une charge q animée d'un mouvement $z(t)$ rayonne la puissance moyenne $\mathcal{P}_{ray} = \frac{\mu_0 q^2 \langle \ddot{z}^2 \rangle}{6\pi c}$ (formule de Larmor), montrer que, vis-à-vis de l'onde, l'électron se comporte comme un petit disque absorbant dont on calculera le rayon a. Faire l'A.N.. Que représente ce rayon?